Optimização

Aula 28

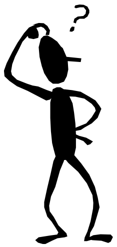
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Não Linear

Aula 28: Programação Não-Linear - Funções de Várias variáveis (Prática)

- Condições óptimas de funções irrestritas;
- Método de Busca por Gradiente.

Problema 28.1



Dada a seguinte função de duas variáveis procurar o seu mínimo:

$$y = 3x^2 + 2xz + 2z^2 + 7$$

Problema 28.1 (Solução I)

As primeiras derivadas encontra-se de:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6x + 2z = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2x + 4z = 0$$

O ponto candidato a óptimo é x =0 e z = 0

Problema 28.1 (Solução I)

As segundas derivadas encontra-se de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = 2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 2$$

Problema 28.1 (Solução IV)

As raízes do gradiente determinam-se de:

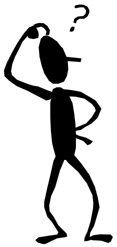
$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = 6$$

$$d_2 = 20$$

O ponto que minimize a função é x_1=0 e x_2= 0 e o valor da função é 7

Problema 28.2



Dada a seguinte função de duas variáveis procurar o seu mínimo:

$$y = \frac{1}{4x_1} + x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{x_2}$$

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Problema 28.2 (Solução I)

As primeiras derivadas encontra-se de:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{1}{4x_1^2} + 2x_1 x_2^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1^2 x_2 - \frac{1}{x_2^2}$$

Problema 28.2 (Solução II)

As segundas derivadas encontra-se de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2x_1^3} + 2x_2^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 2x_1^2 + \frac{2}{x_2^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 4x_1 x_2$$

Problema 28.2 (Solução III)

As raízes do gradiente determinam-se de::

$$-\frac{1}{4x_1^2}+2x_1x_2^2=0$$

$$2x_1^2x_2-\frac{1}{x_2^2}=0$$

$$x_1^*=0,379$$

$$x_2^*=1,516$$

Problema 28.2 (Solução IV)

As raízes do gradiente determinam-se de::

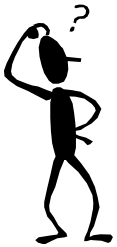
$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13,788 & 2,298 \\ 2,298 & 0,861 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = 13,788$$

$$d_2 = 6,590$$

O ponto que minimize a função é x_1=0,379 e x_2= 1,516 e o valor da função é 1,649

Problema 28.3



Dada a seguinte função de duas variáveis, procurar o seu mínimo:

$$y = \frac{x_1^2}{4} + \frac{2}{x_1 x_2} + 4x_2$$

Problema 28.3 (Solução I)

Dada a seguinte função de duas variáveis procurar o seu mínimo:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{x_1}{2} - \frac{2}{x_1^2 x_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_1 x_2^2} + 4$$

Problema 28.3 (Solução II)

As segundas derivadas encontra-se de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{x_1^3 x_2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \frac{4}{x_1 x_2^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2}{x_1^2 x_2^2}$$

Problema 28.3 (Solução III)

Com as segundas derivadas encontram-se os pontos candidatos:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{2}{x_1^2 x_2} = 0$$

$$-\frac{2}{x_1 x_2^2} + 4 = 0$$

$$x_1^* = 2$$

$$x_2^* = \frac{1}{2}$$

Problema 28.3 (Solução IV)

A Hessiana é dada por:

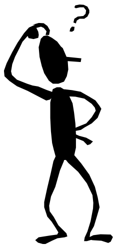
$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} & 2 \\ 2 & 16 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \frac{3}{2}$$

$$d_2 = 20$$

O ponto que minimize a função é x_1= 2 e x_2= 0,5 e o valor da função no ponto é 5

Problema 28.4



Dada a seguinte função de duas variáveis procurar o seu mínimo:

$$f(x) = x_1 + \frac{\left(4 \cdot 10^6\right)}{x_1 x_2} + 250 x_2$$

Problema 28.4 (Solução I)

As primeiras derivadas encontra-se de:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 1 - \frac{\left(4 \cdot 10^6\right)}{x_1^2 x_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 250 - \frac{\left(4 \cdot 10^6\right)}{x_1 x_2^2}$$

Problema 28.4 (Solução II)

As segundas derivadas encontra-se de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{\left(4 \cdot 10^6\right)}{x_1^2 x_2^2} \frac{2x_2}{x_1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \frac{\left(4 \cdot 10^6\right)}{x_1^2 x_2^2} \frac{2x_1}{x_2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\left(4 \cdot 10^6\right)}{x_1^2 x_2^2}$$

Problema 28.4 (Solução III)

As raízes do gradiente determinam-se de:

$$x_1^2 x_2 - 4 \cdot 10^6 = 0$$

$$250 x_1 x_2^2 - 4 \cdot 10^6 = 0$$

Estas equações dão:

$$x_1^2 x_2 = 250 x_1 x_2^2$$

ou

$$x_1 x_2 \left(x_1 - 250 x_2 \right) = 0$$

daqui obtem-se:

$$x_1^* = 1000$$

$$x_2^* = 4$$

Problema 28.4 (Solução IV)

A Hessiana é dada por:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \frac{4 \cdot 10^6}{x_1^2 x_2^2} \begin{vmatrix} \dfrac{2x_2}{x_1} & 1 \\ 1 & \dfrac{2x_1}{x_2} \end{vmatrix}$$

Problema 28.4 (Solução V)

A forma da Hessiana é dada por:

$$H = \frac{4 \cdot 10^6}{(4000)^2} \begin{vmatrix} 0,008 & 1 \\ 1 & 500 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = 0,008$$

$$d_2 = 3$$

O ponto que minimize a função é x_1= 1000 e x_2= 4 e o valor da função no ponto é 3000