Transmissão de calor

Aula prática Nº 5

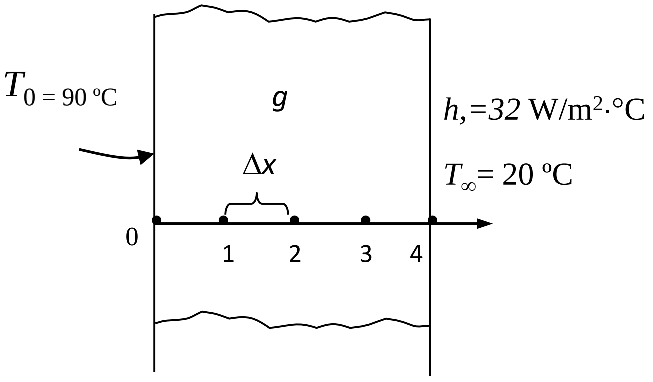
Prof. Dr. Engº Jorge Nhambiu & Engº Paxis Roque

Aula Prática-5

- Método de diferenças finitas

Problema -12.1(I)

Uma chapa de comprimento 0,8 m é submetida a uma temperatura especificada num lado e à convecção do outro lado. Formule o método de resolução por diferenças finitas para este problema. Determine as temperaturas nodais em condições de equilíbrio e a taxa de transferência de calor através da chapa. A condutibilidade térmica da chapa é k = 4,2 W/m·°C, o espaçamento entre os nós de Δx=0,2 m, a área de convecção de 25 m^2 e a sua temperatura 90°C.



Problema -12.1 (Resolução I)

Assume-se:

1. Transferência de calor através da parede constante e unidimensional;
2. Condutividade térmica constante;
3. Que não há geração de calor;
4. Transferência de calor de radiação desprezível.

O número de nós determina-se de:

$$M = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{0{,}8\ \text{m}}{0{,}2\ \text{m}} + 1 = 5$$

Problema -12.1 (Resolução II)

A temperatura da superfície é $T_0 = 90\ °C$. Esse problema envolve 4 temperaturas nodais desconhecidos e, portanto, precisa-se de 4 equações para determiná-las individualmente. Os nós 1, 2 e 3 nós são do interior e assim, para eles, pode-se usar a relação geral de diferenças finitas expressa como:

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0$$

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} = \frac{\dot{g}_m}{k}$$

para $m = 0, 1, 2, \text{ e } 3$

Problema -12.1 (Resolução II)

Não havendo geração de calor (g = 0), resulta que:

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} = 0$$

A equação de diferenças finitas para o nó 4 na superfície direita submetida à convecção é obtida através da aplicação de um balanço de energia no elemento de volume, cerca de metade do nó 4 e tomando a direção de todas as transferências de calor a ser para o nó em consideração:

Nó 1 (interior): $T_0 - 2T_1 + T_2 = 0$

Nó 2 (interior): $T_1 - 2T_2 + T_3 = 0$

Nó 3 (interior): $T_2 - 2T_3 + T_4 = 0$

Nó 4 (surperfície à direita com convecção): $h(T_\infty - T_4) + k\dfrac{T_3 - T_4}{\Delta x} = 0$

Problema -12.1 (Resolução III)

O sistema de 4 equações com 4 temperaturas desconhecidas constitui a formulação de diferenças finitas do problema. As temperaturas nodais em condições de equilíbrio são determinadas pela resolução das 4 equações simultaneamente.

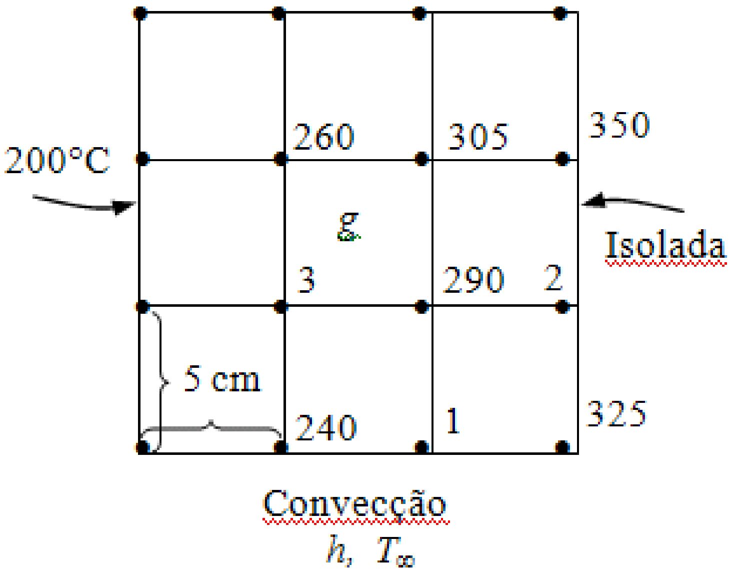
T_1 =74,97°C, T_2 =59,93°C, T_3 =44,9°C, e T_4 =29,87°C

A taxa de transferência de calor através da parede é simplesmente a transferência de calor por convecção na face direita e determina-se de:

$$\dot{Q}_{\text{parede}} = \dot{Q}_{\text{conv}} = hA(T_4 - T_\infty) = (32\ \text{W/m}^2.°\text{C})(25\ \text{m}^2)(29{,}97\text{-}20)°\text{C} = 7896\ \mathbf{W}$$

Problema -12.2 (I)

Um longo corpo sólido é submetido a uma constante transferência de calor bidimensional. Determine as temperaturas nodais e a taxa de perda de calor na superfície inferior numa secção de 1 m de comprimento. A condutibilidade térmica do sólido é k=214 W/m·°C, o calor é gerado no corpo uniformemente a uma taxa de g= 8x10^6 W/m^3, o espaçamento entre os nós é de Δx=Δy =0,05 m, o coeficiente de troca de calor por convecção 50 W/m^2·°C e a temperatura ambiente T_∞= 20 °C.



Problema -12.2 (Resolução I)

Assume-se:

1. Transferência de calor através do corpo estável e bidimensional;
2. Calor é gerado uniformemente no organismo;
3. Transferência de calor por radiação desprezível.

A expressão geral para o cálculo da temperatura num nó interior pelo método de diferença finita considerando o escoamento bidimensional com geração de calor é expressa como:

$$T_{\text{esq}} + T_{\text{topo}} + T_{\text{direita}} + T_{\text{baixo}} - 4T_{\text{nó}} + \frac{\dot{g}_{\text{nó}} l^2}{k} = 0$$

Problema -12.2 (Resolução II)

Onde:
$$\frac{\dot{g}_{\text{nó}} l^2}{k} = \frac{\dot{g}_0 l^2}{k} = \frac{(8\times10^6\ \text{W/m}^3)(0,05\ \text{m})^2}{214\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}} = 93,5^\circ\text{C}$$

As equações de diferenças finitas para os nós na fronteira são obtidas através da aplicação do balanço de energia sobre os volumes elementares e assumindo que a direção de todas as transferências de calor a é para o nó em consideração:

Nó 1 (convecção): $$k\frac{l}{2}\frac{240-T_1}{l} + kl\frac{290-T_1}{l} + k\frac{l}{2}\frac{325-T_1}{l} + hl(T_\infty - T_1) + \frac{\dot{g}_0 l^2}{2k} = 0$$

Nó 2 (interior): $$350 + 290 + 325 + 290\text{-}4\ T_2 + \frac{\dot{g}_0 l^2}{k} = 0$$

Nó 3 (interior): $$260 + 290 + 240 + 200\text{-}4T_3 + \frac{\dot{g}_0 l^2}{k} = 0$$

Problema -12.2 (Resolução III)

Calculando, resulta:

T_1 **= 280,9°C**, T_2 **= 397,1°C**, T_3 **= 330,8°C**,

A taxa de perda de calor da superfície inferior através de uma secção de 1 m de comprimento será:

$$\dot{Q} = \sum_m \dot{Q}_{\text{elemento, } m} = \sum_m hA_{\text{superficie},m}(T_m - T_\infty)$$

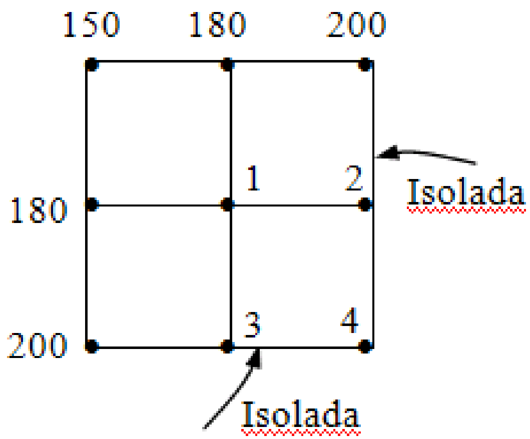
$$\dot{Q} = h(l/2)(200 - T_\infty) + hl(240 - T_\infty) + hl(T_1 - T_\infty) + h(l/2)(325 - T_\infty)$$

$$\dot{Q} = (50 \text{ W/m}^2\,°\text{C})(0{,}05 \text{ m} \cdot 1 \text{ m})[(200\text{-}20)/2 + (240\text{-}20) + (280{,}9\text{-}20) + (325\text{-}20)/2]°\text{C}$$

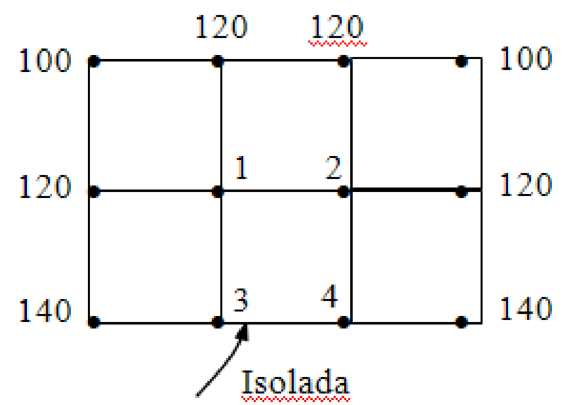
$$\dot{Q} = \mathbf{1808 \;\; W}$$

Problema -12.3 (I)

Um longo corpo sólido é submetido a uma transferência de calor constante bidimensional. Determine as temperaturas nodais sabendo que a condutibilidade térmica do sólido é k=20W/m·°C e o espaçamento entre os nós Δx=Δy =0,02 m.



Caso-1



Caso-2

Problema -12.3 (II)

Assume-se

1. Transferência de calor através do corpo estável e bidimensional;
2. Não há geração de calor no corpo;
3. A transferência de calor por radiação é desprezível.

A expressão geral para o cálculo da temperatura num nó interior pelo método de diferença finita considerando o escoamento bidimensional e sem geração de calor é:

$$T_{\text{esq}} + T_{\text{topo}} + T_{\text{dirt}^{\text{o}}} + T_{\text{baixo}} - 4T_{\text{nó}} + \frac{\dot{g}_{\text{nó}} l^2}{k} = 0$$

$$T_{\text{nó}} = (T_{\text{esq}} + T_{\text{topo}} + T_{\text{dirt}^{\text{o}}} + T_{\text{baixo}})/4$$

Problema -12.3 (Resolução I)

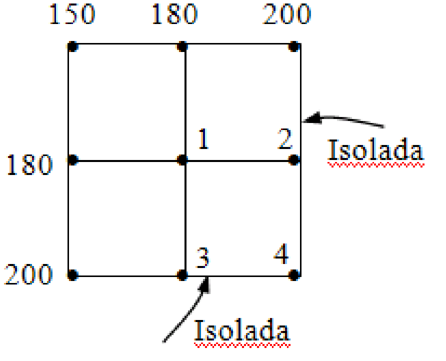
Caso-1

Existe simetria sobre o isolamento superfícial, bem como sobre a linha diagonal. Por isso $T_3 = T_2$ e T_1, T_2, T_4 são as únicas temperaturas nodais desconhecidas. Assim, precisamos apenas 3 equações para determiná-las individualmente. Além disso, podemos substituir as linhas de simetria por isolamento e utilizar o conceito de imagem de espelho, ao escrever as equações de diferenças finitas para os nós interiores.

Nó 1 (interior): $T_1 = (180 + 180 + T_2 + T_3)/4$

Nó 2 (interior): $T_2 = (200 + T_4 + 2T_1)/4$

Nó 4 (interior): $T_4 = (2T_2 + 2T_3)/4$



Problema -12.3 (Resolução II)

Sendo, $T_3 = T_2$ resulta:

$$T_2 = T_3 = T_4 = \mathbf{190°C}$$
$$T_1 = \mathbf{185°C}$$

Caso -2

Neste caso existe também simetria relativamente à superfície com isolamento, bem como a linha diagonal. Trocando as linhas de simetria de isolamento, e utilizando o conceito de imagem-espelho, as equações de diferenças finitas para os nós do interior pode ser escrito como:

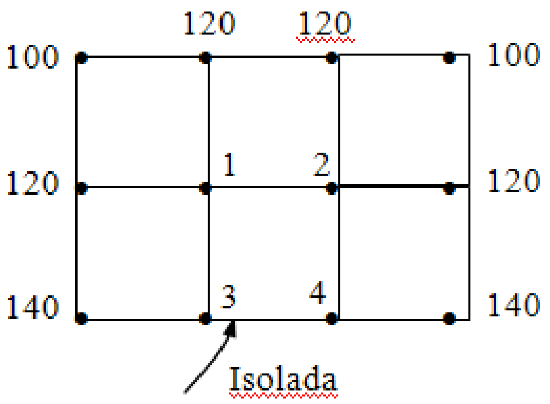
Problema -12.3 (Resolução III)

Nó 1 (interior): $T_1 = (120 + 120 + T_2 + T_3)/4$

Nó 2 (interior): $T_2 = (120 + 120 + T_4 + T_1)/4$

Nó 3 (interior): $T_3 = (140 + 2T1 + T_4)/4$

Nó 4 (interior): $T_4 = (2T_2 + 140 + T_3)/4$



Resolvendo as equações resulta:

$$T_1 = T_2 = \mathbf{122,9°C}$$

$$T_3 = T_4 = \mathbf{128,6°C}$$

Nota que tirar partido da simetria simplifica o problema.

Trabalho Para Casa 05

Formular e resolver o problema de elementos finitos apresentado na lista.

Entregar na Secretaria do Departamento de Engenharia Mecânica até as 9 horas de quinta-feira dia 3 de Abril de 2014.