



Optimização

Aula 12



Programação Linear (PL)

Aula 12: Dualidade.

Definição do Problema Dual.



Definição do problema dual.



O que é *dualidade em Programação Linear*?

Dualidade significa a existência de um outro problema de PL, associado a cada problema de PL.

Esse outro problema *designa-se por*
problema dual (D).

Nesta relação com o problema dual o problema original *designa-se por*
problema primal (P).



Para que serve a *dualidade em Programação Linear*?

1. Para a interpretação econômica

Cada variável do dual pode ser interpretada como o valor sombra ou preço implícito dos recursos do problema primal.

2. Como ferramenta de cálculo

Resolver o dual pode, em muitos casos, ser mais fácil ou mais eficiente que resolver o primal, especialmente quando há muitas variáveis no primal mas poucas restrições (ou vice-versa).

3. Para a análise de sensibilidade

O dual é a base para estudar como mudanças nos parâmetros (ex.: disponibilidade de recursos, coeficientes da função objetivo) afetam a solução ótima.

✓ *O problema dual em PL é uma ferramenta que fornece significado econômico, critério de optimalidade, eficiência computacional e análise de sensibilidade, tornando-se indispensável tanto na teoria como na prática.*



O par de problemas duais (P) – (D).



Os problemas *primal* (P) e *dual* (D) são conhecidos por *par de problemas duais* (P)-(D)

- (P)-(D) são suportados pelo mesmo sistema de parâmetros;
- a resolução de um deles constitui a resolução simultânea do outro;
- a solução de um, está completamente determinada pela solução do outro.

O par de problemas duais (P)- (D) não é mais do que um par de representações matemáticas do mesmo problema real.



Relações entre o par de problemas duais.

um problema

o outro problema

1^a

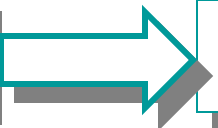
uma restrição



uma variável

2^a

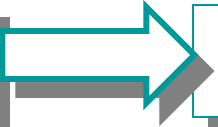
uma variável



uma restrição

3^a

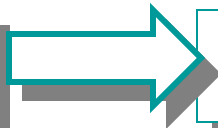
matriz A



matriz A transposta

4^a

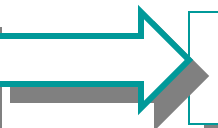
um coeficiente da f.o



um termo independente

5^a

um termo independente



um coeficiente da f.o.



Relações entre o par de problemas duais.

um problema

o outro problema

6^a

*um problema de maximização
com restrições de
desigualdade do tipo $(\leq)$*



*um problema de
minimização com restrições
de desigualdade do tipo $(\geq)$*

7^a

*um problema de
minimização com restrições
de desigualdade do tipo $(\geq)$*



*um problema de
maximização com restrições
de desigualdade do tipo $(\leq)$*



Par de Problemas Duais na forma canónica.

Problema Primal

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$i=1,\dots,M, \quad j=1,\dots,N$$

Problema Dual

$$\text{Minimizar } w = \sum_{i=1}^M b_i y_i$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^M a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$y_i \geq 0$$

$$i=1,\dots,M, \quad j=1,\dots,N$$



Definição do Problema Dual.

*O dual do problema dual é
o problema primal.*

*A relação entre os dois problemas
é recíproca.*

*Se um dos problemas
indistintamente foi designado
primal,
então o outro é designado
dual.*



Diagrama de Tucker para os problemas (P)-(D).

$$(D): w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

$$(D): a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j$$

Problema primal

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad \dots \quad x_n \geq 0$$

Min w

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$\vdots$

$$y_m \geq 0$$

a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

$$\leq b_1$$

$$\leq b_2$$

$\vdots$

$$\leq b_m$$

b_i - termos independentes do (P)

b_i - coeficientes da f.o. do (D)

$$(P): z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

IV

IV

IV

$$(P): a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

Max z

c_1

c_2

$\dots$

c_n

Problema dual

c_j - coeficientes da f.o. do (P)

c_j - termos independentes do (D)



Diagrama de Tucker para o Exemplo Protótipo.

(P)- 2 variáveis: x_1, x_2	Problema primal		(D)- $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	Min w
(D)- 3 variáveis: y_1, y_2, y_3	$y_1 \geq 0$	1	0
	$y_2 \geq 0$	0	2
	$y_3 \geq 0$	3	2
(D)-1ª rest.: $y_1 + 3y_3 \geq 3$	IV	IV	(P)- 1ª rest.: $x_1 \leq 4$
			(P)- 2ª rest.: $2x_2 \leq 12$
			(P)- 3ª rest.: $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
(P): $z = 3x_1 + 5x_2$	Max z	3	(D) -2ª rest.: $2y_2 + 2y_3 \geq 5$
	Problema dual		



Exemplo Protótipo: Par de Problemas Duais

Problema Primal

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 4 \\2x_2 &\leq 12 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Problema Dual

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

sujeito a

$$\begin{aligned}y_1 + 3y_3 &\geq 3 \\2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \\y_1, y_2, y_3 &\geq 0\end{aligned}$$



Solução do problema dual. Exemplo protótipo.



Como determinar *a solução do problema dual*
para o *exemplo protótipo*?



A solução para *o problema dual do exemplo protótipo* foi já determinada e pode ser encontrada no quadro óptimo do problema primal na linha dos z_j correspondentes às variáveis de folgas x_3 , x_4 , x_5 , onde inicialmente se encontrava a base inicial.



Solução do problema dual.Exemplo protótipo.

Quadro ótimo do problema primal

colunas correspondentes à inversa da base associada à solução ótima

a solução ótima para o problema dual é:
 $y_1 = 0$,
 $y_2 = 3/2$,
 $y_3 = 1$

as variáveis de folga do dual têm valor simétrico ao valor dos custos reduzidos correspondentes às colunas das variáveis de decisão
 $y_4 = 0$, $y_5 = 0$

		C_j					
		3 5 0 0 0					
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	Z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$C_j - Z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	



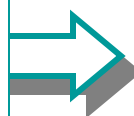
Caso 1: Uma restrição de desigualdade do tipo oposto...

Se uma restrição de desigualdade for *do tipo oposto* ao da respectiva forma canónica, então **a correspondente variável dual é não positiva**.

Prova: Considere um problema de *maximização* contendo *restrições de desigualdade do tipo* ($\geq$).

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = \sum_{j=1}^N c_j x_j \\ \text{sujeito a:} & \sum_j a_{i_1 j} x_j \leq b_{i_1} \quad i_1 = 1, 2, \dots, p \\ & \sum_j a_{i_2 j} x_j \geq b_{i_2} \quad i_2 = p+1, p+2, \dots, M \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \end{array}$$

As restrições de desigualdades do tipo ($\geq$) podem ser sempre convertidas em restrições do tipo ($\leq$) multiplicando por (-1) ambos os membros.


$$-\sum_j a_{i_2 j} x_j \leq -b_{i_2} \quad i_2 = p+1, p+2, \dots, M$$



Caso 1: Uma restrição de desigualdade do tipo oposto...

Designando por y_{i_1} e y'_{i_2} as variáveis duais correspondentes às restrições de desigualdade tem-se o problema dual:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} - \sum_i b_{i_2} y'_{i_2} \\ &\text{sujeito a: } \sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} - \sum_i a_{i_2 j} y'_{i_2} \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, N \\ &\quad y_{i_1}, y'_{i_2} \geq 0 \quad i_1 = 1, 2, \dots, p \quad i_2 = p + 1, p + 2, \dots, M \end{aligned}$$

$$y_{i_2} = -y'_{i_2} \leq 0$$

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} + \sum_i b_{i_2} y_{i_2} \\ &\text{sujeito a: } \sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} + \sum_i a_{i_2 j} y_{i_2} \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, N \\ &\quad y_{i_1} \geq 0 \quad i_1 = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

a cada restrição de desigualdade do tipo oposto corresponde uma variável dual **não positiva**

$$y_{i_2} \leq 0 \quad i_2 = p + 1, p + 2, \dots, M$$





Caso 1: Uma restrição de desigualdade do tipo oposto.

Problema Primal

Maximizar $z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$

sujeito a

$$\sum_j a_{i_1 j} x_j \leq b_{i_1} \quad i_1 = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_j a_{i_2 j} x_j \geq b_{i_2} \quad i_2 = p+1, p+2, \dots, M$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Problema Dual

Minimizar $w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} + \sum_i b_{i_2} y_{i_2}$

sujeito a

$$\sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} + \sum_i a_{i_2 j} y_{i_2} \geq c_j$$

$$y_{i_1} \geq 0 \quad i_1 = 1, 2, \dots, p$$

$$y_{i_2} \leq 0 \quad i_2 = p+1, p+2, \dots, M$$
$$j = 1, 2, \dots, N$$





Caso 1: Exemplo.

Problema Primal

Minimizar $z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeito a

$$x_1 + x_3 \geq 5$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 18$$

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 \leq 22$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema Dual

Maximizar $w = 5y_1 + 18y_2 + 12y_3 + 22y_4$

sujeito a

$$y_1 + 2y_3 + 4y_4 \leq 5$$

$$y_2 + y_3 + y_4 \leq 1$$

$$y_1 + 2y_2 + y_4 \leq 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, y_4 \leq 0$$

Como esta restrição é de **tipo oposto** corresponde-lhe uma **variável dual não positiva**



Caso 2: Uma restrição de igualdade.

Se uma restrição *for de igualdade*,
então a **correspondente** variável dual *é livre*.

*Pode ser demonstrado a partir do facto de que **qualquer restrição de igualdade** pode ser convertida **em duas restrições de desigualdade** de um mesmo tipo.*

Provar!!!





Caso 2: Uma restrição de igualdade.

Problema Primal

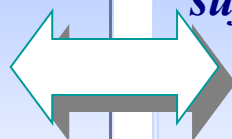
Maximizar $z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$

sujeito a

$$\sum_j a_{i_1 j} x_j \leq b_{i_1} \quad i_1 = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_j a_{i_2 j} x_j = b_{i_2} \quad i_2 = p+1, p+2, \dots, M$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$



Problema Dual

Minimizar $w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} + \sum_i b_{i_2} y_{i_2}$

sujeito a

$$\sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} + \sum_i a_{i_2 j} y_{i_2} \geq c_j$$

$$y_{i_1} \geq 0 \quad i_1 = 1, 2, \dots, p$$

$$y_{i_2} \text{ livres} \quad i_2 = p+1, p+2, \dots, M$$
$$j = 1, 2, \dots, N$$



Relações primal-dual.

Problema Primal
Maximização

Problema dual
Minimização

uma restrição i

uma variável i

$\leq$

≥ 0

$\geq$

≤ 0

$=$

livre

*Restrição
de tipo
oposto*

uma variável j

uma restrição j

≥ 0

$\geq$

≤ 0

$\leq$

livre

$=$

*Restrição
de tipo
oposto*



Problema Primal.
Minimização

Relações primal-dual

Problema dual.
Maximização

uma restrição i

uma variável i

$\geq$

≥ 0

$\leq$

≤ 0

$=$

livre

*Restrição
de tipo
oposto*

uma variável j

uma restrição j

≥ 0

$\leq$

≤ 0

$\geq$

livre

$=$

*Restrição
de tipo
oposto*



Formulação do Problema Dual.

Exemplo 1.

Primal

Primal : 2 restrições,
3 variáveis

$\Leftrightarrow$ Dual : 2 variáveis,
3 restrições

restrições duais:

Primal : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Dual : 3 restrições de tipo $\geq$

variáveis duais:

Primal : restrição nº 1 tipo $\leq$

$\Leftrightarrow$ Dual : $y_1 \geq 0$

Primal : restrição nº 2 tipo $=$

$\Leftrightarrow$ Dual : y_2 livre

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dual

Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$

sujeito a:

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \text{ livre}$$



Primal : 3 restrições,
5 variáveis

$\Leftrightarrow$ Dual : 3 variáveis,
5 restrições

Formulação do problema dual. Exemplo 2.

Primal

$$\text{Minimizar } z = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 5x_5$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a: } -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= -20 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 &\geq 8 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 &\leq 100 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ } x_3 \text{ livre}, x_4 \geq 0, x_5 \leq 0$$

Dual

$$\text{Maximizar } w = -20y_1 + 8y_2 + 100y_3$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a: } -5y_1 + y_2 + 2y_3 &\leq 1 \\ 4y_1 - y_2 &\leq 6 \\ -13y_1 + 5y_2 - y_3 &= -7 \\ 2y_1 + y_3 &\leq 1 \\ -5y_1 + y_2 &\geq -5 \end{aligned}$$

$$y_1 \text{ livre}, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0$$



Formulação do problema dual. Exemplo 3.

Primal : 3 restrições,
2 variáveis

⇔ Dual : 3 variáveis,
2 restrições

restrições duais:

(P) : $x_2 \geq 0$

⇔ (D) : rest. 2 tipo $\geq$

(P) : x_1 livre

⇔ (D) : rest 1 tipo $=$

variáveis duais:

(P) : :rest. 1 tipo $=$

⇔ (D) : y_1 livre

(P) : :rest. 2 tipo $\geq$

⇔ (D) : $y_2 \leq 0$

(P) : :rest. 3 tipo $\leq$

⇔ (D) : $y_3 \geq 0$

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$

$$x_1 \text{ livre}, x_2 \geq 0$$

Dual

Minimizar $w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$

sujeito a:

$$y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$y_1 \text{ livre}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0$$



Pares de Problemas Duais. Notação Matricial.

Forma Canónica.

Problema Primal

$$\text{Maximizar } z = c^t X$$

sujeito a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Problema Primal

$$\text{Minimizar } z = c^t X$$

sujeito a

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Minimizar } w = b^t Y$$

sujeito a

$$A^t Y \geq c$$

$$Y \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Maximizar } w = b^t Y$$

sujeito a

$$A^t Y \leq c$$

$$Y \geq 0$$



Pares de Problemas Duais. Notação Matricial. Forma Padrão.

Problema Primal

$$\text{Maximizar } z = c^t X$$

sujeito a

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Problema Primal

$$\text{Minimizar } z = c^t X$$

sujeito a

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Minimizar } w = b^t Y$$

sujeito a

$$A^t Y \geq c$$

Y livre

Problema Dual

$$\text{Maximizar } w = b^t Y$$

sujeito a

$$A^t Y \leq c$$

Y livre



Definição do Problema Dual. Conclusões.



O estudo da *dualidade* em Programação Linear considera um problema (*o qual é geralmente designado por problema dual*) distinto daquele que se pretende resolver (*problema primal*), mas cuja abordagem permite obter algumas conclusões directamente relacionadas com o *problema original (problema primal)*, nomeadamente referente às *condições de optimalidade*.