Optimização

Aula 13

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear (PL).

Aula 13 Dualidade.

Propriedades.

– Propriedades Fundamentais.

– Propriedade dos Desvios Complementares. (complementaridade das slacks)

Formas Canónica e Padrão de Dualidade.

Problema Primal

$$Maximizar \quad z = c^t X$$

$$sujeito \ a$$

$$AX \le b$$
$$X \ge 0$$

Problema Dual

$$Minimizar \quad w = b^t Y$$

$$sujeito \ a$$

$$A^t Y \ge c$$
$$Y \ge 0$$

Problema Primal

$$Maximizar \quad z = c^t X$$

$$sujeito \ a$$

$$AX = b$$
$$X \ge 0$$

Problema Dual

$$Minimizar \quad w = b^t Y$$

$$sujeito \ a$$

$$A^t Y \ge c$$
$$Y \ livre$$

Teorema 13.1 (fraco de dualidade)

Considere o anterior par de problemas duais (P)-(D) na forma canónica.
Se X é admissível para (P) e Y é admissível para (D) então:
$z = c^t X \leq b^t Y = w$, i.e., o valor da função objectivo de qualquer solução admissível do problema primal, não excede o valor da função objectivo do problema dual.

Prova: como X e Y são soluções admissíveis para os respectivos problemas primal-dual então:

X é SBAP
Y é SBAD

$$AX \leq b \qquad Y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Y^t AX \leq Y^t b = b^t Y = w \qquad \textbf{(a)}$$

multiplicando por $\boldsymbol{Y^t}$ *ambos membros*

Y é SBAD
X é SBAP

$$A^t Y \geq c \qquad X \geq 0 \quad \Rightarrow \quad X^t A^t Y \geq X^t c = c^t X = z \qquad \textbf{(b)}$$

multiplicando por X^t *ambos membros*

de **b** e **a**

$$\Rightarrow \quad z = c^t X \leq X^t A^t Y = Y^t AX \leq b^t Y = w$$

multiplicação de matrizes e vectores.

$$\Rightarrow \quad z = c^t X \leq b^t Y = w$$

Corolário 13.1. (corolário do teorema fraco de dualidade)

Se X^* é admissível para (P) e Y^* é admissível para (D) e os valores óptimos das respectivas funções objectivo coincidem, i.e., $z = c^t X = b^t Y^* = w^*$, então X^* é a *solução óptima* do *primal* e Y^* é a *solução óptima* do *dual*

Prova:

pelo teorema 13.1 *qualquer solução admissível X do primal* ⇒ $\boxed{c^t X \le b^t Y^*}$ ***(a)***

por hipótese ⇒ $\boxed{c^t X^* = b^t Y^*}$ ***(b)***

de (a) e (b) ⇒ $\boxed{c^t X \le c^t X^*}$

⇒ *X^* é a solução óptima do primal*

De igual forma, pode ser demonstrado que Y é a solução óptima do dual*

Teorema 13.2:(relações entre as soluções óptimas primal e dual).

Se o primal tem *solução óptima* (*i.e. tem óptimo finito*) então o respectivo dual também tem e os correspondentes valores *óptimos z* e w* coincidem.*

Prova: *Considere o problema primal de maximização na forma padrão e seja A a matriz das restrições:*

X é solução óptima do primal* ⇒ $X^* = \begin{bmatrix} X_B^* \\ X_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

pelo critério de optimalidade para a solução primal, todos os custos reduzidos são não negativos ⇒ $c_j - z_j = c_j - \boxed{c_B^t B^{-1}} P_j \leq 0, \quad \forall j = 1,2,\ldots n$

Faça-se **Y* = (y₁ , y₂ , ..., yₘ)**

⇒ $c_j - Y^* P_j \leq 0, \forall j = 1,2,\ldots, n$ ⇒ $A^t Y^* \geq c$

⇒ *Y* é uma SBA do problema dual*

Minimizar $w = y^t b$

s. a

$A^t Y \geq c$

***Y* livres**

$$z^* = c^t X^* = c_B^t X_B^* = c_B^t B^{-1} b = Y^{t*} b = b^t Y^* = w^*$$

$\boxed{Y^* = c_B^t B^{-1}}$ *é a solução óptima para o problema dual* ◆

Teorema Fundamental da Dualidade.

1º. Um problema de PL tem óptimo finito se e só existirem soluções admissíveis para os problemas primal-dual.

2º. Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções admissíveis, i.e., é impossível.

Prova : 1º.

se X é admissível para (P) ⇒ *o valor da f. o.* $z = c^t X$

se Y' é admissível para (D) ⇒ *o valor da f.o.* $w = b^t Y$

pelo Teorema fraco de dualidade ⇒ $\boxed{z = c^t X \leq b^t Y = w}$

a solução óptima X também verifica*: $z^* = c^t X^* \leq b^t Y = w$

w é finito ⇒ *z* é finito*

o primal tem óptimo finito $\xrightarrow{\text{pelo Teorema 13.2}}$ *o dual tem óptimo finito* ♦

Teorema Fundamental da Dualidade.

Prova 2º:

2º. Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções admissíveis, i.e., é impossível.

suponha que o primal não tem óptimo finito (i.e. $z \to \infty$);

suponha ao contrário que o dual tem soluções admissíveis;

seja Y uma solução dual admissível (SBAD) :

pelo Teorema fraco de dualidade ⇒ $z = c^t X \le b^t Y = w$ *é limitada* !!!

⇒ *absurdo !!! (por hipóteses $z \to \infty$)*

⇒ *o dual não tem soluções admissíveis*

analogamente é possível demonstrar que se o dual não tem óptimo finito, então o primal não tem soluções admissíveis.

Teorema Fundamental da Dualidade. Conclusões

Segundo o Teorema fundamental da dualidade pode concluir-se que para os problemas primal-dual, verifica-se uma e só uma das seguintes situações:

- Ambos têm soluções óptimas X* e Y* e os valores óptimos das respectivas funções objectivo coincidem: z* = w*;
- Se um problema não tem óptimo finito, então o outro é impossível;
- Ambos os problemas são impossíveis.

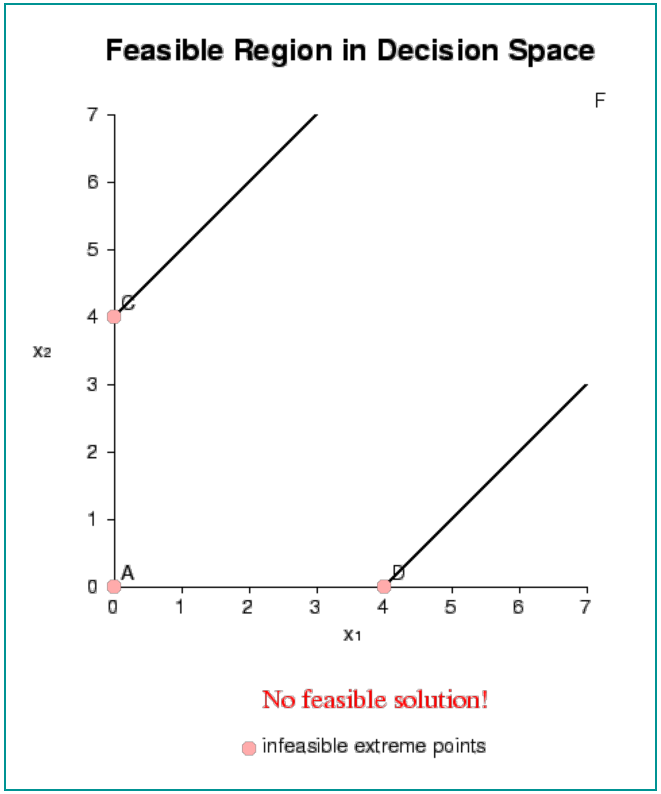
Ambos os Problemas são Impossíveis. Exemplo.

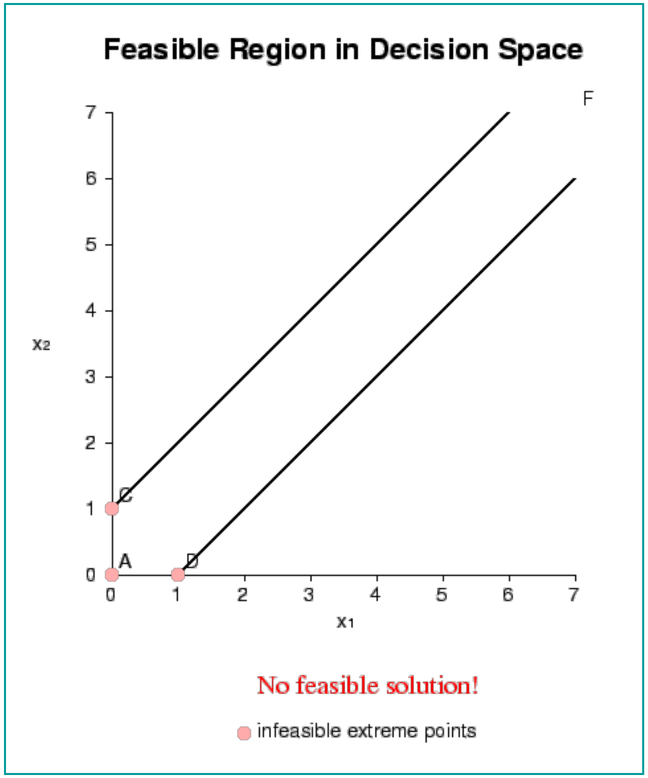
Primal

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z = x_1 + x_2 \\ &\text{sujeito a} \\ &-x_1 + x_2 = 4 \\ &x_1 - x_2 = 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } w = 4y_1 + 4y_2 \\ &\text{sujeito a} \\ &-y_1 + y_2 \geq 1 \\ &y_1 - y_2 \geq 1 \\ &y_1, y_2 \text{ livres} \end{aligned}$$





Problema dual: Forma Canónica e Forma Padrão.

Forma canónica

Primal

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad z = c^t X \\ &\text{s. a} \\ &\quad A X \leq b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

reduzir à forma padrão

Forma padrão

Primal

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad z = c^t X \\ &\text{s. a} \\ &\quad A X + I X_s = b \\ &\quad X, X_s \geq 0 \end{aligned}$$

A matriz das restrições pode ser decomposta como: [A, I], X_s é o vector das variáveis de folga

Dual

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad w = y^t b \\ &\text{s. a} \\ &\quad A^t Y \geq c \\ &\quad I Y \geq 0 \\ &\quad Y \text{ livres} \end{aligned}$$

Fica redundante, pode ser eliminada, e obtém-se a forma canónica do problema dual

Dual (forma canónica)

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad w = y^t b \\ &\text{s. a} \\ &\quad A^t Y \geq c \\ &\quad Y \geq 0 \end{aligned}$$

Se uma solução é admissível para o problema dual na forma padrão com variáveis duais livres, é admissível para o problema dual do problema original na forma canónica, i.e., verificam-se as restrições de não negatividade para as variáveis duais.

Formulando o Problema Dual a partir da Forma Padrão. Exemplo Protótipo.

Forma canónica

Primal

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\;\; &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

reduzir à forma padrão

Forma padrão

Primal

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\text{Minimizar } w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 &\ge 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\ge 5 \\ y_1 &\ge 0 \\ y_2 &\ge 0 \\ y_3 &\ge 0 \\ y_1, y_2, y_3 &- \text{livres} \end{aligned}$$

Dual (forma canónica)

$$\text{Minimizar } w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 &\ge 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\ge 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Ficam redundantes, podem ser eliminadas, e obtém-se a forma canónica do problema dual

Variáveis de Decisão Duais e Quadro Primal Óptimo.

Relação I: Os valores das variáveis de decisão da solução óptima dual encontram-se no quadro simplex óptimo na linha z_j nas colunas correspondentes à base inicial de identidade $B^O = I$.

Primal → **Dual**

Maximizar $z = c^t X$ *s. a* $A X \leq b$ $X \geq 0$	*Maximizar* $z = c^t X$ *s. a* $A X + I X_s = b$ $X, X_s \geq 0$	*Minimizar* $w = y^t b$ *s. a* $A^t Y \geq c$ $IY \geq 0$ Y livres	*Minimizar* $w = y^t b$ *s. a* $A^t Y \geq c$ $Y \geq 0$

A matriz das restrições para o problema na forma padrão pode ser decomposta como: $[N^O\ B^O] = [A\ I]$, $B^O = I$.

m variáveis de decisão duais que correspondem às m restrições primais

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) = C_B B^{-1}$$

Quadro simplex óptimo

		X_N^O	X_B^O	$\bar{b}$
C_B	X_B	$B^{-1}N^O$	$B^{-1}I$	$B^{-1}b$
	z_j	$C_B\ B^{-1}N^O$	$\boxed{C_B\ B^{-1}}$	$C_B B^{-1} b$
	$c_j - z_j$	$C_N^O - C_B\ B^{-1}N^O$	$C_J - C_B\ B^{-1}$	

variáveis de decisão duais

valor da f.o. $z^* = w^*$

Variáveis de Folga Duais e Quadro Primal Óptimo.

Relação 2: Os valores das variáveis de folga correspondentes à solução óptima dual encontram-se no quadro simplex óptimo e são os simétricos dos elementos da linha dos custos reduzidos nas colunas correspondentes às variáveis de decisão primais.

Às n variáveis de folga duais correspondem às n variáveis de decisão primais: $Y_s = (y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n})$

$$A^t Y \geq c \Rightarrow A^t Y - I\, Y_s = c$$

substituindo por $Y = C_B B^{-1}$

$$\Rightarrow A^t C_B B^{-1} - I\, Y_s = c$$

$$\Rightarrow -Y_s = c - A^t C_B B^{-1} = c - C_B B^{-1} A$$

$$\Rightarrow -Y_s = C_{N^o} - C_B B^{-1} N^0$$

Quadro simplex óptimo

		X_N^o	X_B^o	$\bar{b}$
C_B	X_B	$B^{-1}N^o$	$B^{-1}I$	$B^{-1}b$
	z_j	$C_B\ B^{-1}N^o$	$C_B\ B^{-1}$	$C_B B^{-1}b$
	$c_j - z_j$	$C_{N^o} - C_B\ B^{-1}N^o$	$C_J - C_B\ B^{-1}$	

variáveis de folgas duais

variáveis de decisão duais

(por hipótese as colunas de N^O *correspondem às colunas da matriz A)*

Quadro Óptimo do Exemplo Protótipo. Solução dual.

a solução óptima para o problema dual é:
$y_1 = 0$,
$y_2 = 3/2$,
$y_3 = 1$

C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
	c_j	3	5	0	0	0	
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

as variáveis de folga do dual são simétricas aos custos reduzidos correspondentes às colunas das variáveis de decisão primais

$y_4 = 0$, $y_5 = 0$

Solução Complementar.

Relação 3: A cada solução básica primal (SBP), admissível ou não admissível, corresponde-lhe uma solução básica dual (SBD), admissível ou não admissível, a que chamamos solução complementar.

Exemplo protótipo: 2º Quadro Simplex (a solução não é óptima)

X =(0,6,4,0,6) SBAP ⇔solução complementar Y = (0,5/2, 0, -3, 0) - SBNAD

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}$
0	x_3	1	0	1	0	0	4
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	x_5	3	0	0	-1	1	6
	z_j	0	5	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	$c_j - z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	

Variáveis de decisão duais:
$y_1 = 0$,
$y_2 = 5/2$,
$y_3 = 0$

as variáveis de folga duais
$y_4 = -3$, $y_5 = 0$

O facto de não ser um quadro óptimo para o primal, significa que a solução do dual não é admissível.

Solução Dual Complementar. Critério de Admissibilidade.

Relação 4: Se num quadro simplex correspondente a uma solução básica primal (SBP), admissível ou não admissível, todos os custos reduzidos são não positivos então a solução dual complementar é admissível (SBAD).

Se todos os custos reduzidos são *não positivos*, i.e., $c_j - z_j \leq 0$ verifica-se o *critério de optimalidade* para a *solução primal*

$$c_j - \boxed{C_B B^{-1}} P_j \leq 0 \quad \forall j,\ j = 1,2,\ldots,n,\ n+1,\ldots,n+m$$

$Y^t = C_B B^{-1}$

$$c_j - Y^t P_j \leq 0 \quad \forall j,\ j = 1,2,\ldots,n,\ n+1,\ldots,n+m$$

$$Y^t P_j \geq c_j \quad \forall j,\ j = 1,2,\ldots,n,\ n+1,\ldots,n+m$$

$$Y^t A \geq c$$

(neste caso por hipótese A refere-se à matriz de restrições correspondente ao problema na forma padrão, já que são incluídas todas as colunas do quadro simplex)

$$A^t Y \geq c$$

Y *é uma* SBAD. (solução básica admissível para o dual)

Relação entre as Soluções dos Problemas Primal–Dual.

Relação 5: Se ambos os problemas têm soluções admissíveis (ambos são possíveis) então ambos têm óptimo finito e os correspondentes valores óptimos z* e w*coincidem

Relação 6: Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções admissíveis (é impossível).

PRIMAL / DUAL	Possível $K \neq \varnothing$	Impossível $K = \varnothing$
Possível $K \neq \varnothing$	**$z^* = w^*$ ambos os problemas têm óptimo finito**	**$w^* \to \infty$ o problema dual não tem óptimo finito**
Impossível $K = \varnothing$	**$z^* \to \infty$ o problema primal não tem óptimo finito**	**Nenhum dos dois problemas têm soluções admissíveis**

Resolução do Problema Dual. Exemplo protótipo.

Redução à forma padrão: subtraiam-se duas variáveis de folga y_4 , y_5

Minimizar $w = 4y_1 + 12\, y_2 + 18\, y_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 \quad &+ 3y_3 \geq 3 \\ 2y_2 \quad &+ 2y_3 \geq 5 \end{aligned}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 \quad &+ 3y_3 - y_4 &= 3 \\ 2y_2 \quad &+ 2y_3 \quad - y_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \geq 0$$

Como não é possível determinar uma matriz identidade introduz-se uma variável artificial y_6 *na restrição nº 2 (para a equação nº1 a variável* y_1 *pode ser tomada como variável básica inicial).*

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 \quad &+ 3y_3 - y_4 &= 3 \\ 2y_2 \quad &+ 2y_3 \quad - y_5 + y_6 &= 5 \end{aligned}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6 \geq 0$$

y_6 - *variável artificial*

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^0 = \begin{pmatrix} P_1 & P_6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo protótipo. Resolução do Problema Dual. Método das duas fases: 1ª Fase.

Para aplicação da 1ª fase constrói-se o problema auxiliar:

Minimizar $w' = y_6$

sujeito a

$$y_1 + 3y_3 - y_4 = 3$$

$$2y_2 + 2y_3 - y_5 + y_6 = 5$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

y_6*- variável artificial*

C_B	Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}$
	c_j	0	0	0	0	0	1	
0	y_1	1	0	3	-1	0	0	3
1	y_6	0	2	2	0	-1	1	5
	z_j	0	2	2	0	-1	1	5
	$z_j - c_j$	0	2	2	0	-1	0	
0	y_1	1	0	3	-1	0	0	3
0	y_2	0	1	1	0	-1/2	1/2	5/2
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	-1	

A SBA inicial para a 2ª fase é $Y^0=(3,5/2,0,0,0)$

Exemplo protótipo. Resolução do Problema Dual. Método das duas fases: 2ª Fase.

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

sujeito a

$$y_1 + 3y_3 - y_4 = 3$$
$$2y_2 + 2y_3 - y_5 + y_6 = 5$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

y_6- *variável artificial*

	c_j	4	12	18	0	0	0	
C_B	Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}$
4	y_1	1	0	3	-1	0	0	3
12	y_2	0	1	1	0	-1/2	1/2	5/2
	z_j	4	12	24	-4	-6	6	42
	$z_j - c_j$	0	0	6	-4	-6	6	
18	y_3	1/3	0	1	-1/3	0	0	1
12	y_2	-1/3	1	0	1/3	-1/2	1/2	3/2
	z_j	2	12	18	-2	-6	6	36
	$z_j - c_j$	-2	0	0	-2	-6		

A solução óptima é $Y^* = (0,3/2,1,0,0)$

Par de Problemas Primal-Dual. Quadros Óptimos.

Primal: $X^* = (2,6,2,0,0)$ $z^* = w^* = 36$ **Dual:** $Y^* = (0,3/2,1,0,0)$

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

	c_j	4	12	18	0	0	0	
C_B	Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}$
18	y_3	1/3	0	1	-1/3	0	0	1
12	y_2	-1/3	1	0	1/3	1/2	1/2	3/2
	z_j	2	12	18	-2	-6	6	36
	$z_j - c_j$	-2	0	0	-2	-6		

a solução óptima para o dual é: $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$, $y_3 = 1$

as variáveis de folga do dual $y_4 = 0$, $y_5 = 0$

as variáveis de folga do primal são simétricas aos custos reduzidos das colunas correspondentes às variáveis de decisão duais: $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$

a solução óptima para o primal, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, encontram-se na linha z_j nas colunas correspondentes à matriz inicial identidade, i.e.,nas colunas correspondentes a y_1 e à variável artificial y_6

Exemplo Protótipo: Soluções complementares

Primal: $X^* = (\mathbf{2},\mathbf{6},\mathbf{2},0,0)$ $z^*=w^*=36$ **Dual:** $Y^* = (\mathbf{0},\mathbf{3/2},\mathbf{1},0,0)$

Soluções complementares

SBAP $X^0 = (\mathbf{0},\mathbf{0},4,12,18)$, $z^0=0$ ⟷ **SBNAD** $Y^0 = (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{-3},\mathbf{-5})$, $w^0=0$

SBAP $X^1 = (\mathbf{0},\mathbf{6},4,\ 0,\ \ 6)$, $z^1=30$ ⟷ **SBNAD** $Y^1 = (\mathbf{0},\mathbf{5/2},\mathbf{0},\mathbf{-3},0)$, $w^1=30$

SBAP $X^2 = (\mathbf{2},\mathbf{6},2,\ 0,\ \ 0)$, $z^2=36$ ⟷ **SBAD** $Y^2 = (\mathbf{0},\mathbf{3/2},\mathbf{1},\ 0,0)$, $w^2=36$

Restrições do Problema Primal em Notação Vectorial.

Considere a matriz *A* do problema primal representada por *m* linhas P^i:

$$AX = \begin{pmatrix} P^1 \rightarrow a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ P^2 \rightarrow a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}. \\ . & & & \\ .. & & & \\ P^i \rightarrow a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ P^m \rightarrow a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ .. \\ x_J \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ .. \\ b_i \\ b_m \end{bmatrix}$$

então uma *restrição i do problema primal* pode ser representada como:

$$\boxed{P^i X \leq b_i}$$

$$i = 1,2,\dots,m$$

Restrições do Problema Dual em Notação Vectorial.

Considere a matriz *A* do problema primal representada por *n* colunas P_j:

$$A^tY = Y^tA = \left(y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_i \; \ldots \; y_m \right) \begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_j & \ldots & P_n \\ a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot\cdot \\ c_j \\ c_n \end{pmatrix}^t$$

então uma *restrição j do problema dual* pode ser representada como:

$$\boxed{Y^t P_j \geq c_j}$$

$$j = 1,2,\ldots,n$$

Restrições Saturadas e Não Saturadas.

Uma restrição encontra-se ***saturada*** se verifica a igualdade.

- *se* $P^i X = b_i$ *para o problema primal.*
- *se* $Y^t P_j = c_j$ *para o problema dual*

Caso contrário a restrição encontra-se ***não saturada***

- *se* $P^i X < b_i$ *para o problema primal.*
- *se* $Y^t P_j > c_j$ *para o problema dual*

Teorema 13.4: Propriedade dos Desvios Complementares.

Se X* e Y* são soluções óptimas para o primal (P) e dual(D), respectivamente, então verificam a seguinte propriedade designada como *propriedade dos desvios complementares* ou complementaridade das *slacks*:

1º. Se uma variável de decisão de qualquer dos problemas for não nula na solução óptima, então, no outro problema a restrição associada a essa variável encontra-se saturada, i.e., a variável de folga correspondente é nula.

2º. Se uma restrição de qualquer dos problemas não se encontra saturada na solução óptima desse problema (se uma variável de folga é positiva) então, no outro problema, a variável de decisão associada a essa restrição é nula.

Propriedade dos Desvios...

Em síntese a propriedade dos desvios complementares pode resumir-se pela seguintes expressões:

I. $$\boxed{x_j^*(Y^{*t}P_j - c_j) = 0, \ \forall j = 1,\dots n}$$

$$\boxed{x_j^* \times y_{m+j}^* = 0, \ \forall j = 1,\dots,n}$$

é nulo o produto da j-ésima variável de decisão do primal pela j-ésima variável de folga do dual

II. $$\boxed{y_i^*(b_i - P_i X^*) = 0, \ \forall i = 1,\dots m}$$

$$\boxed{y_j^* \times x_{n+i}^* = 0, \ \forall i = 1,\dots,m}$$

é nulo o produto da i-ésima variável de decisão do dual pela i-ésima variável de folga do primal.

Propriedade dos desvios...

- I. Se a variável de decisão do primal é positiva então a variável de folga correspondente do dual é nula.

$\boxed{x_j^* > 0} \Rightarrow \boxed{y_{m+j}^* = 0}$

pela propriedade de desvios complementares $\boxed{x_j^*(Y^{*t}P_j - c_j) = 0, \ \forall j = 1,\ldots,n}$

$\boxed{x_j^* > 0} \Rightarrow \boxed{Y^{*t}P_j - c_j = 0}$

$\Rightarrow \boxed{Y^{*t}P_j = c_j}$

$\Rightarrow \boxed{a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* = c_j}$

⇒ a restrição do problema dual associada a essa variável *encontra-se saturada*

⇒ a *variável de folga* do problema *dual* associada a essa restrição é *nula*

⇒ $\boxed{y_{m+j}^* = 0}$

Propriedade dos desvios...

II. Se a variável de folga do dual é positiva então a variável de decisão correspondente do primal é nula.

$y^*_{m+j} > 0$ ⇒ $x^*_j = 0$

$y^*_{m+j} > 0$ ⇒ *a restrição do problema dual associada encontra-se não saturada*

⇒ $a_{1j}y^*_1 + a_{2j}y^*_2 + \ldots + a_{mj}y^*_m > c_j$

⇒ $Y^{*t}P_j > c_j$

⇒ $Y^{*t}P_j - c_j > 0$

pela propriedade de desvios complementares

$x^*_j(Y^{*t}P_j - c_j) = 0, \quad \forall j = 1,\ldots,n$

⇒ $x^*_j = 0$

Propriedade dos desvios...

III. Se a variável de decisão do dual é positiva então a variável de folga correspondente do primal é nula.

$$\boxed{y_i^* > 0} \Rightarrow \boxed{x_{m+i}^* = 0}$$

IV. Se a variável de folga do primal é positiva então a variável de decisão correspondente do dual é nula.

$$\boxed{x_{m+i}^* > 0} \Rightarrow \boxed{y_i^* = 0}$$

Propriedade dos Desvios Complementares. Conclusões.

A variáveis de decisão primais positivas correspondem restrições duais saturadas (i.e.,variáveis de folga duais nulas, slacks nulas);

A restrições duais não saturadas (i.e, variáveis de folga duais positivas, slacks positivas) correspondem variáveis de decisão primais nulas;

e reciprocamente:

A variáveis de decisão duais positivas correspondem restrições primais saturadas (i.e, variáveis de folga primais nulas, slacks nulas);

A restrições primais não saturadas (i.e, variáveis de folga primais positivas, slack positivo) correspondem variáveis de decisão duais nulas.

Propriedade dos Desvios Complementares. Exemplo Protótipo.

Primal: $X^* = (2,6,2,0,0)$

Dual: $Y^* = (0,3/2,1,0,0)$

variáveis de decisão | **variáveis de folga**

os produtos das variáveis de decisão do primal pelas correspondentes variáveis de folga do dual são nulos

$x_1 = 2 \Leftrightarrow y_4 = 0$

$x_2 = 6 \Leftrightarrow y_5 = 0$

variáveis de folga | **variáveis de decisão**

os produtos das variáveis de decisão do dual pelas correspondentes variáveis de folga do primal são nulos

$x_3 = 2 \Leftrightarrow y_1 = 0$

$x_4 = 0 \Leftrightarrow y_2 = 3/2$

$x_5 = 0 \Leftrightarrow y_3 = 1$

Aplicando Dualidade e as Propriedades de Desvios Complementares para resolver o Problema Primal.

Como o problema dual é um problema com duas variáveis pode ser resolvido graficamente.

Primal de Minimização

$$\text{Minimizar} \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

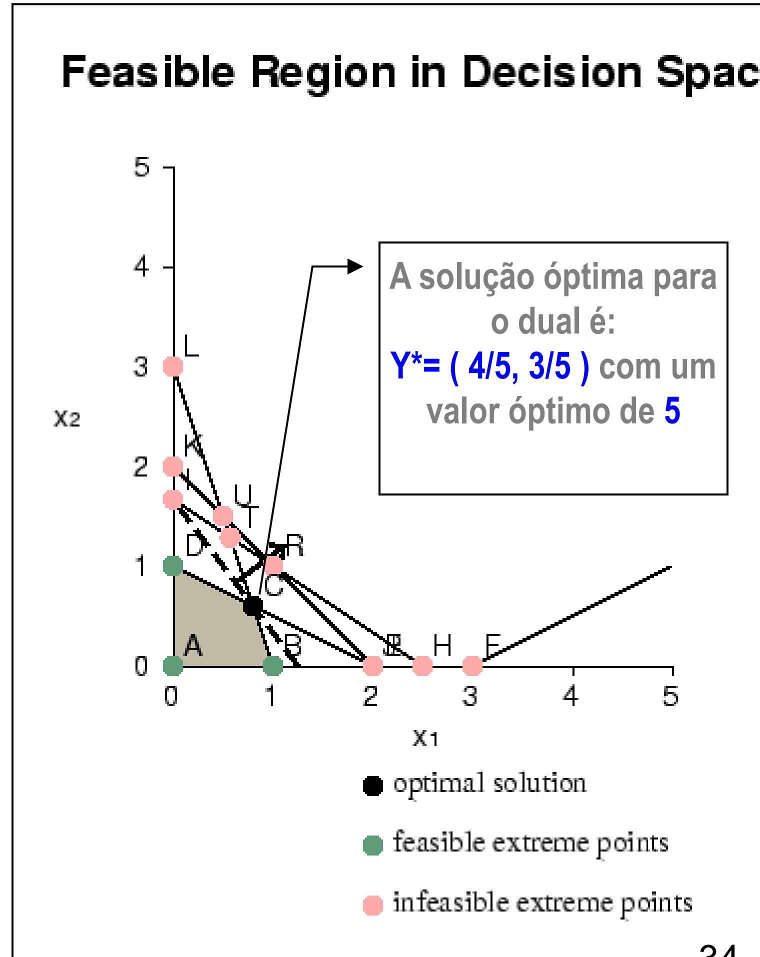
Dual de Maximização

$$\text{Maximizar} \quad w = 4y_1 + 3y_2$$

sujeito a

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$
$$y_1 - 2y_2 \leq 3$$
$$2y_1 + 3y_2 \leq 5$$
$$y_1 + y_2 \leq 2$$
$$3y_1 + y_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$



Utilizando o dual e as propriedades....

$$X^* = (\underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}_{\text{variáveis de decisão}}, \underbrace{x_6, x_7}_{\text{variáveis de folga}})$$

$$Y^* = (\underbrace{y_1, y_2}_{\text{variáveis de decisão}}, \underbrace{y_3, y_4, y_5, y_6, y_7}_{\text{variáveis de folga}})$$

Y*= (4/5 , 3/5) é a solução óptima do problema dual obtida graficamente

1º: Pela propriedade dos desvios complementares se a variável de decisão do dual é positiva então a variável de folga correspondente do primal é nula.

$y_1 = 4/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop.desvios}} x_6 = 0$ $\qquad$ $y_2 = 3/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop.desvios}} x_7 = 0$

2º: Calcular as variáveis de folga duais, substituindo os valores de $y_1 = 4/5$, $y_2 = 3/5$ nas restrições duais.

$y_3 = 2 - y_1 - 2y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_3 = 2 - 4/5 - 6/5 \Rightarrow y_3 = 0 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop.desvios}} x_1 > 0$

$y_4 = 3 - y_1 + 2y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_4 = 3 - 4/5 + 6/5 \Rightarrow y_4 = 13/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop.desvios}} x_2 = 0$

$y_5 = 5 - 2y_1 - 3y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_5 = 5 - 8/5 - 9/5 \Rightarrow y_5 = 8/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop.desvios}} x_3 = 0$

$y_6 = 2 - y_1 - y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_6 = 2 - 4/5 - 3/5 \Rightarrow y_6 = 3/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop.desvios}} x_4 = 0$

$y_7 = 3 - 3y_1 - y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_7 = 3 - 12/5 - 3/5 \Rightarrow y_7 = 0 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop.desvios}} x_5 > 0$

Utilizando o dual e as propriedades....

$$\text{Minimizar} \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$X^* = (\underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}_{\text{variáveis de decisão}}, \underbrace{x_6, x_7}_{\text{variáveis de folga}})$$

$$Y^* = (\underbrace{y_1, y_2}_{\text{variáveis de decisão}}, \underbrace{y_3, y_4, y_5, y_6, y_7}_{\text{variáveis de folga}})$$

3º: Calcular $x_1 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ substituindo $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ nas restrições primais

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 4 \quad \xRightarrow[x_2=x_3=x_4=x_6=0]{\text{substituindo por}} \quad x_1 + 3x_5 = 4$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_7 = 3 \quad \xRightarrow[x_2=x_3=x_4=x_6=0]{\text{substituindo por}} \quad 2x_1 + x_5 = 3$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \qquad x_5 = 1$$

A solução primal óptima é $X^* = (\boxed{1, 0, 0, 0, 1}, \boxed{0, 0})$

Os produtos das variáveis de decisão primais (duais) com as correspondentes variáveis de folga duais (primais) são nulos

A solução dual óptima é $Y^* = (\boxed{4/5, 3/5}, \boxed{0, 13/5, 8/5, 3/5, 0})$