# Optimização

## Aula 14



Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

# Programação Linear (PL)

**Aula 14 Dualidade.**

Algoritmo Dual Simplex.

# O que é o Simplex Dual?

O Simplex Dual é uma variante do método Simplex que resolve problemas de programação linear começando de uma solução óptimas para o problema dual, mas que não é viável para o problema primal. Em vez de garantir a viabilidade primal desde o início (como o Simplex normal), o Simplex Dual garante a viabilidade dual e vai ajustando até atingir a viabilidade primal.

- **Ideia principal**

**O Simplex Primal**: parte de uma solução primal viável, melhora a função objetivo até achar o óptimo.

**O Simplex Dual**: parte de uma solução dual viável, vai corrigindo a inviabilidade primal até chegar à solução óptima.

Isso é útil, por exemplo, em problemas com restrições de ≥ (maior ou igual) ou quando já temos um *tableau* que não é viável, mas é dualmente viável.

# O algoritmo do Simplex Dual.

## Quais as etapas do algoritmo

1. **Identificar inviabilidade primal**: procurar variáveis básicas com valores negativos.
2. **Escolher variável de saída:** selecionar a linha com valor negativo mais "forte" (mais inviável).
3. **Escolher variável de entrada**: fazer uma razão entre os coeficientes da linha escolhida e os da função objectivo para manter viabilidade dual.
4. **Pivotar:** actualizar o *tableau* como no Simplex normal.
5. **Repetir**: até que todas as variáveis básicas sejam $\geq 0$ (solução viável primal). Nesse ponto, a solução é óptima para ambos (primal e dual).

# O algoritmo do Simplex Dual.

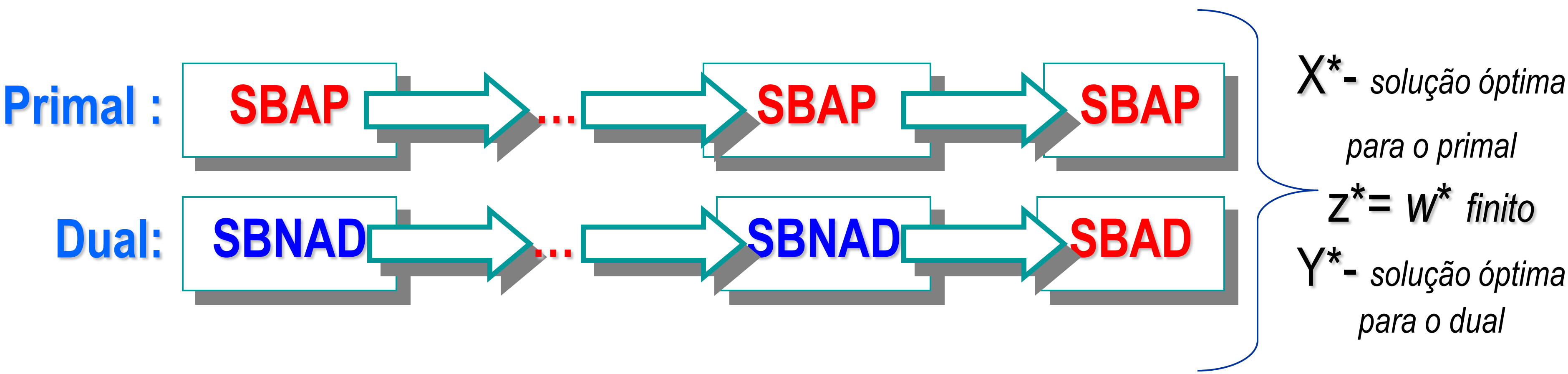
## Quais as Aplicações práticas

1. Quando se tem problemas na forma não padrão (restrições $\geq$ ou $=$).
2. Em reoptimização, se já resolveu um problema e depois muda-se apenas o lado direito das restrições, o Simplex Dual é mais rápido que recomeçar pelo primal.
3. É muito usado em problemas de transporte, produção, energia e logística.

# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Primal

## Caso 1: Óptimo finito

No caso **de óptimo finito o algoritmo Primal aplicado ao problema primal** consiste em partir de uma **SBAP**, a que corresponde uma **SBNAD**, prosseguindo de **SBAP (SBNAD)** em **SBAP (SBNAD)** até obter **um par de soluções admissíveis do primal e do dual** (**SBAP e SBAD**) que são as **soluções óptimas para os respectivos problemas**



# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Primal.

## Caso 1: Óptimo finito. Exemplo Protótipo: Problema Primal

### Soluções complementares

SBAP $X^0 = (0,0,4,12,18)$, $z^0=0$ ⇔ SBNAD $Y^0 = (0,0,0,-3,-5)$, $w^0=0$

SBAP $X^1 = (0,6,4,0,6)$, $z^1=30$ ⇔ SBNAD $Y^1 = (0,5/2,0,-3,0)$, $w^1=30$

SBAP $X^2 = (2,6,2,0,0)$, $z^2=36$ ⇔ SBAD $Y^2 = (0,3/2,1,0,0)$, $w^2=36$

### Soluções óptimas:

*Primal:* $X^* = (2,6,2,0,0)$ ⇔ $z^* = w^* = 36$ ⇔ *Dual:* $Y^* = (0,3/2,1,0,0)$

# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Primal

## Caso 2: Óptimo não finito.

No caso **de óptimo não finito o algoritmo Primal aplicado ao problema primal** consiste em partir de uma **SBAP**, a que corresponde **uma SBNAD**, prosseguindo de **SBAP (SBNAD)** em **SBAP (SBNAD)** sem nunca obter uma **SBAD**, e concluir que **o primal não tem óptimo finito**, sendo então **o dual impossível**.

Primal : SBAP $\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ SBAP $\Rightarrow$

Dual: SBNAD $\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ SBNAD $\Rightarrow$

*Óptimo não finito para o primal*

**K=∅** *para o dual, i.e. o dual é impossível*

# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Dual.

## Caso 1: Óptimo finito.

No caso **de óptimo finito o algoritmo Primal aplicado ao problema dual** consiste em partir de uma **SBAD**, à que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** até obter **um par de soluções admissíveis do primal e do dual** (**SBAP** e **SBAD**) que são **soluções óptimas para os respectivos problemas**

**Dual:** SBAD → ... → SBAD → SBAD

**Primal :** SBNAP → ... → SBNAP → SBAP

**Y*-** *solução óptima para o dual*

$z^* = w^*$ *finito*

**X*-** *solução óptima para o primal*

*O dual do problema dual é o problema primal*

# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Dual.

## Caso 1: Óptimo finito. Exemplo Protótipo: Problema Dual.

### Soluções complementares

SBAD $Y^0 = ( 3,5/2,0,0,0 )$ , $w^o=42$ ⇔ SBNAP $X^0 = ( 4,6,0, 0,-6 )$ , $z^o=42$

SBAD $Y^1 =( 0,3/2,1, 0, 0)$ , $w^1=36$ ⇔ SBAP $X^1 = ( 2,6, 2, 0, 0 )$ , $z^1=36$

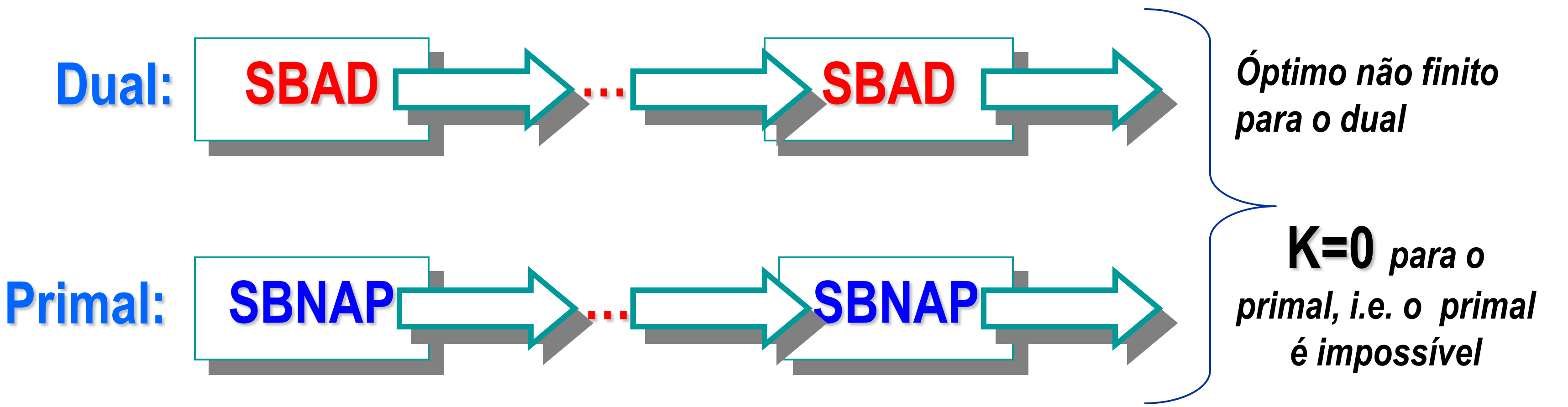
### Soluções óptimas

Dual: $Y^* = ( 0,3/2,1,0,0 )$ ⇔ $w^*= z^*=36$ ⇔ Primal : $X^* = ( 2,6,2,0,0 )$

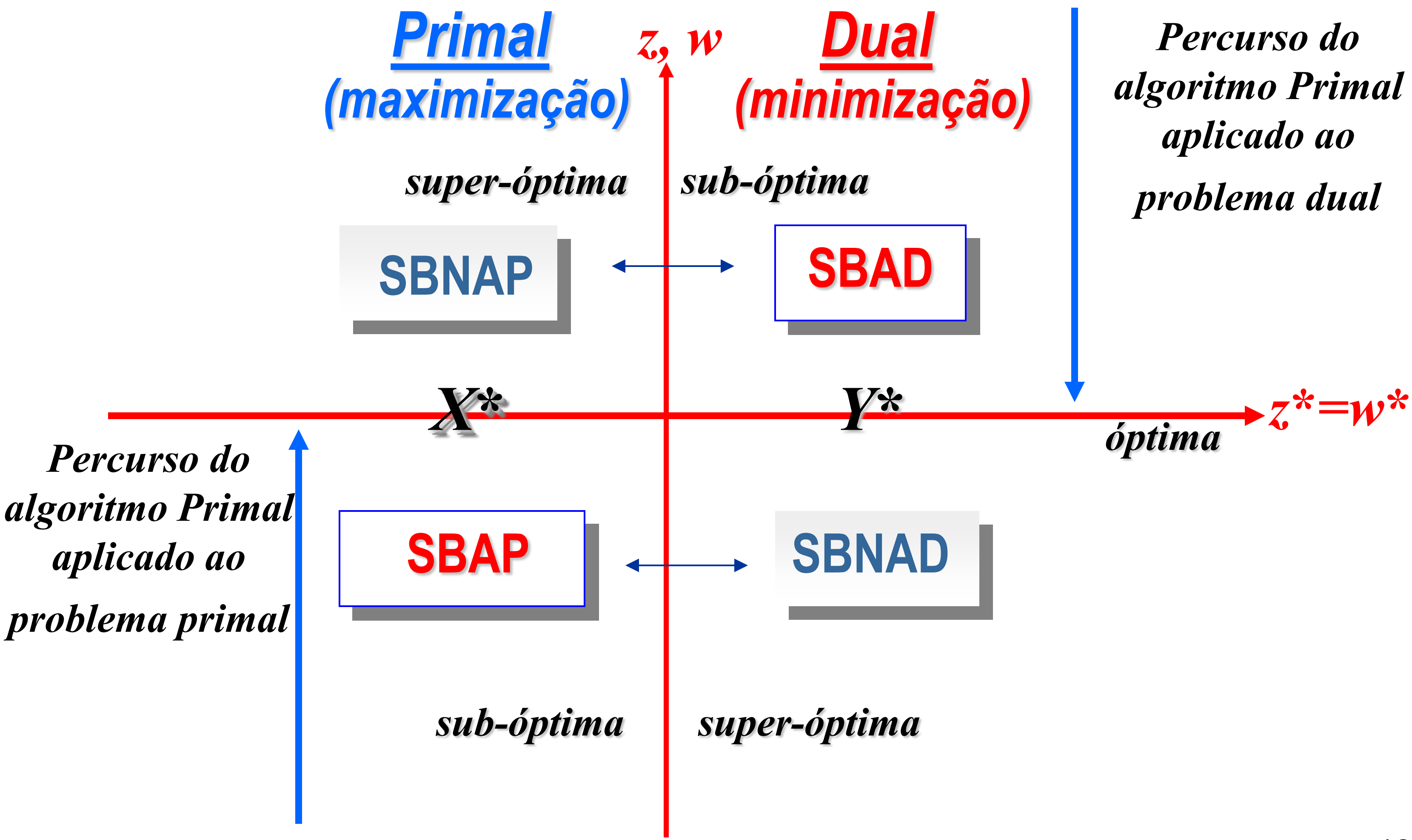
# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Dual.

## Caso 2: Óptimo não finito.

No caso **de óptimo não finito o algoritmo Primal aplicado ao problema dual** consiste em partir de uma **SBAD**, a que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** sem nunca obter uma **SBAP**, e concluir que **o dual não tem óptimo finito**, sendo então **o primal impossível**.

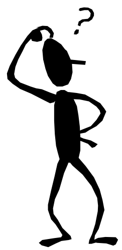


# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal. Representação gráfica



# Algoritmo Dual Simplex.

*O algoritmo dual Simplex tem um comportamento homólogo ao algoritmo primal do simplex aplicado ao problema dual*



**Em que consiste o algoritmo dual *Simplex*?**

O algoritmo dual Simplex consiste em partir *duma solução básica admissível dual* (SBAD), a que corresponde uma *solução básica não admissível primal* (SBNAP),prosseguindo até:

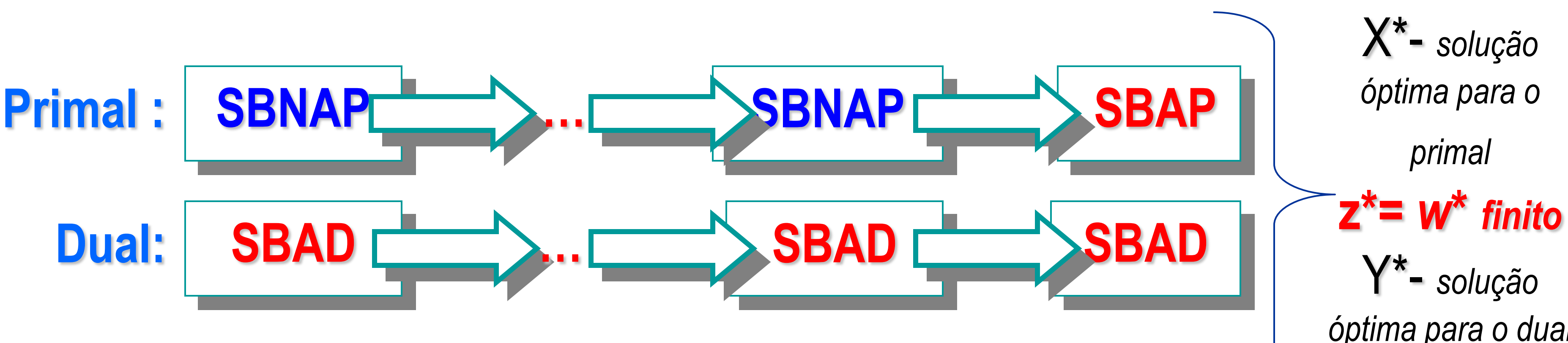
**1º:** se atingir uma solução básica admissível primal (SBAP) e concluir que *o problema tem óptimo finito.*

**2º:** nunca se atingir uma solução básica admissível primal, e concluir que o problema dual não tem óptimo finito, sendo então *o primal impossível.*

# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Dual aplicado ao Problema Primal.

## Caso 1: Óptimo finito.

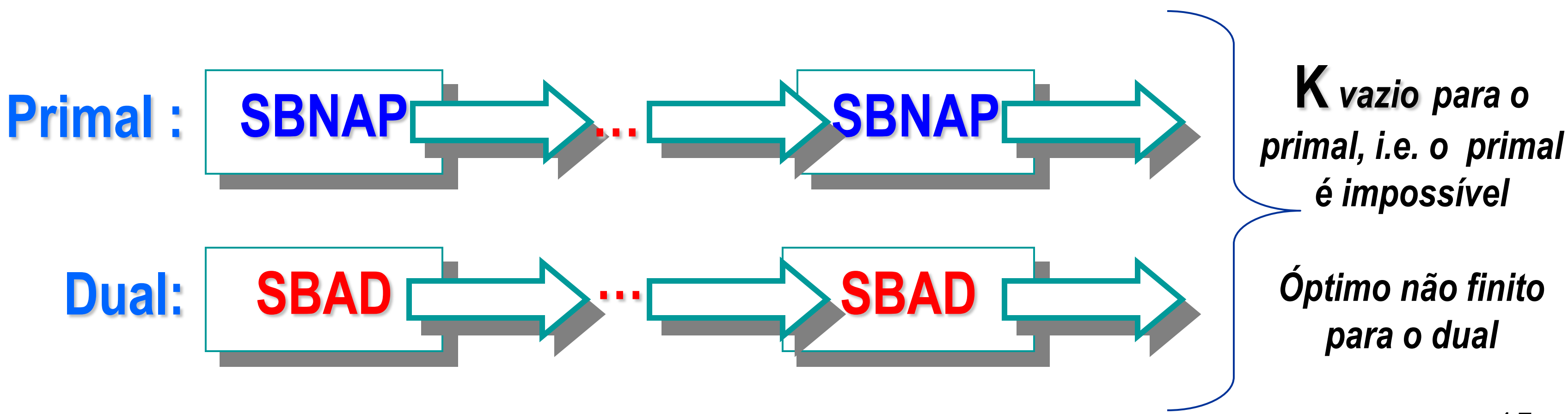
No caso **de óptimo finito o algoritmo Dual aplicado ao problema primal** consiste em partir de uma **SBAD**, à que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** até obter **um par de soluções admissíveis do primal e do dual** (**SBAP e SBAD**) que são **soluções óptimas para os respectivos problemas.**



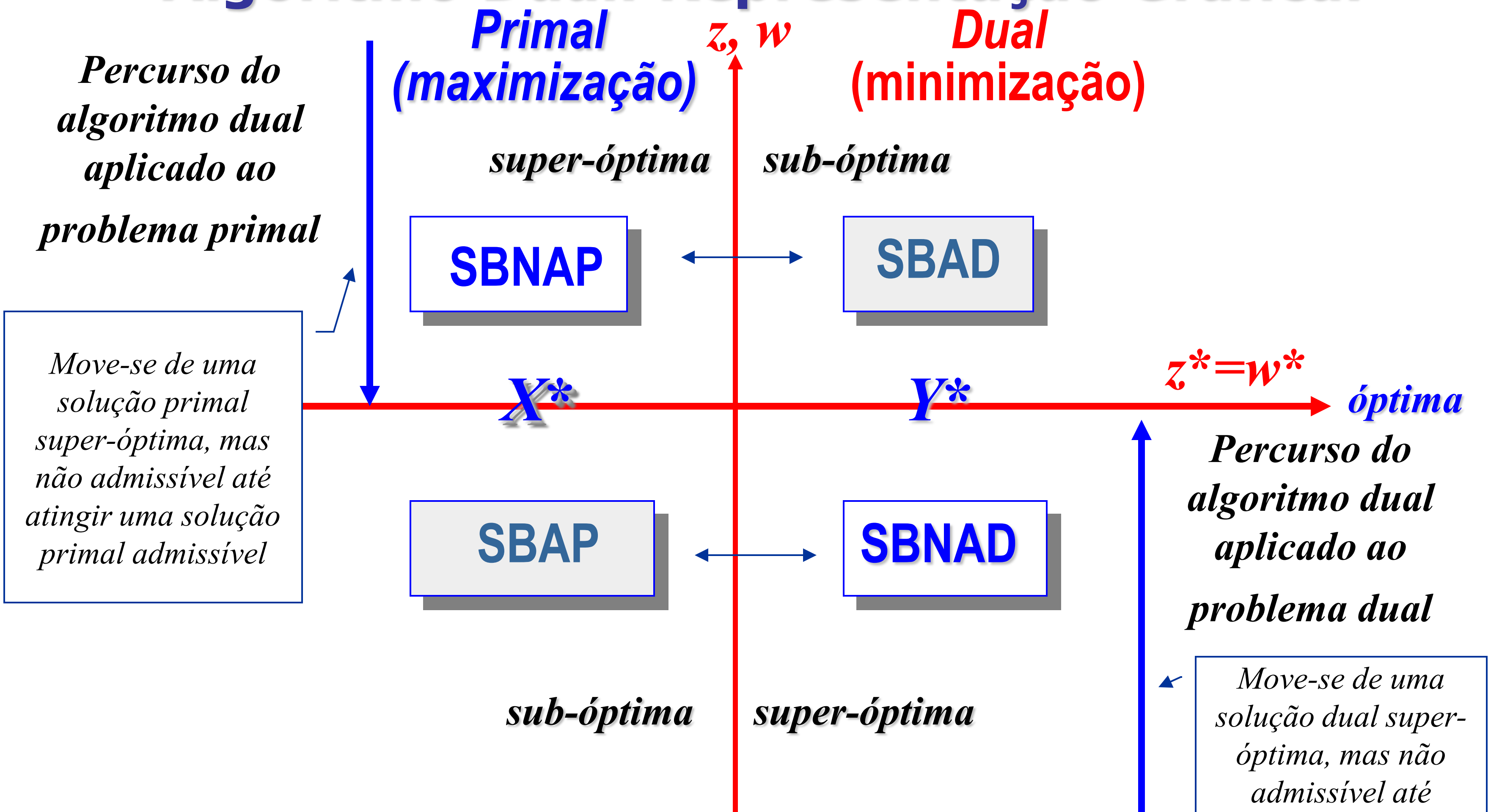
# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Dual aplicado ao Problema Primal.

## Caso 2: Problema impossível.

No caso **de problema impossível o algoritmo Dual aplicado ao problema primal** consiste em partir de uma **SBAD**, a que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** sem nunca atingir uma **SBAP**, e concluir que **o dual não tem óptimo finito**, sendo então **o primal impossível**.

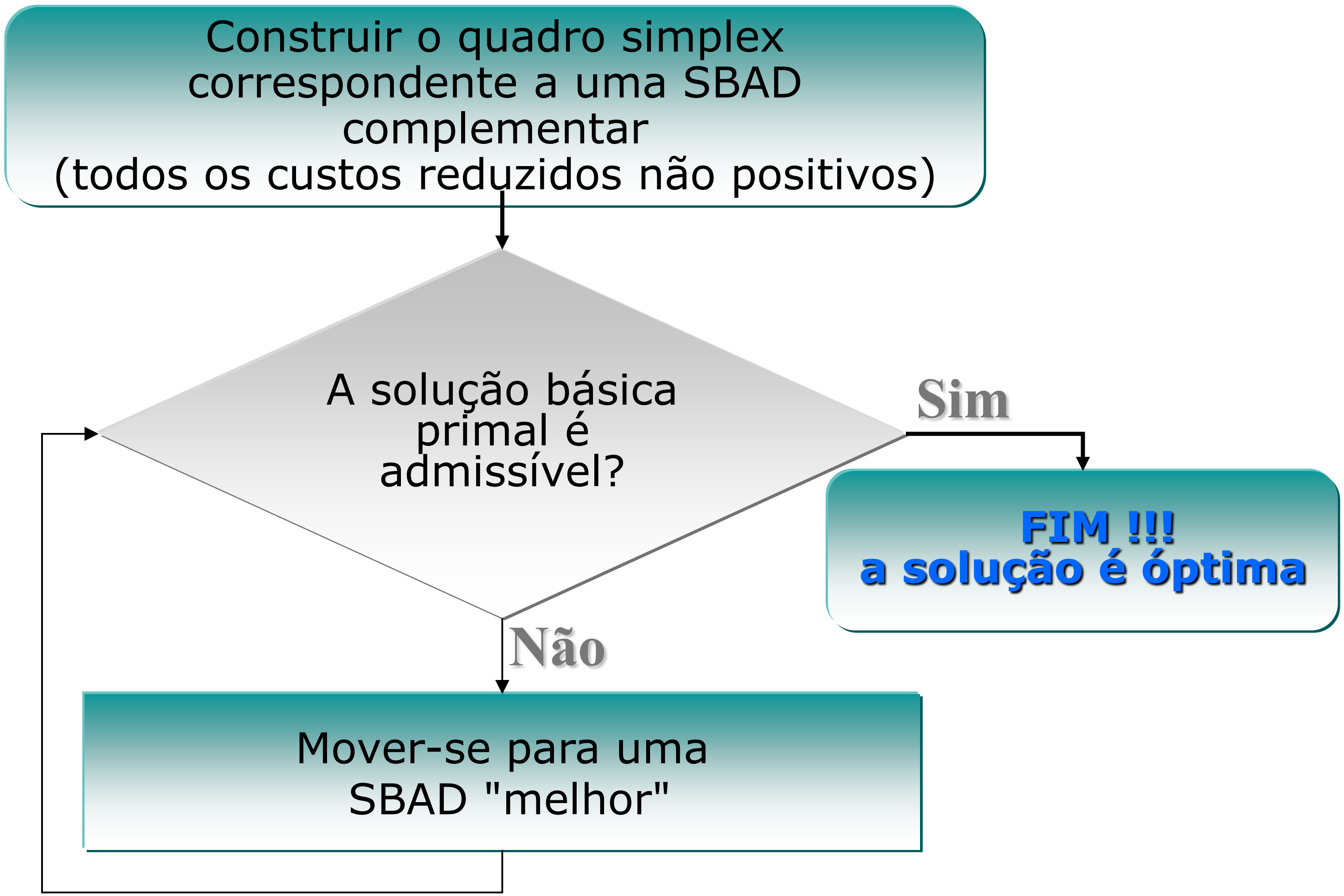


# Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Dual. Representação Gráfica.



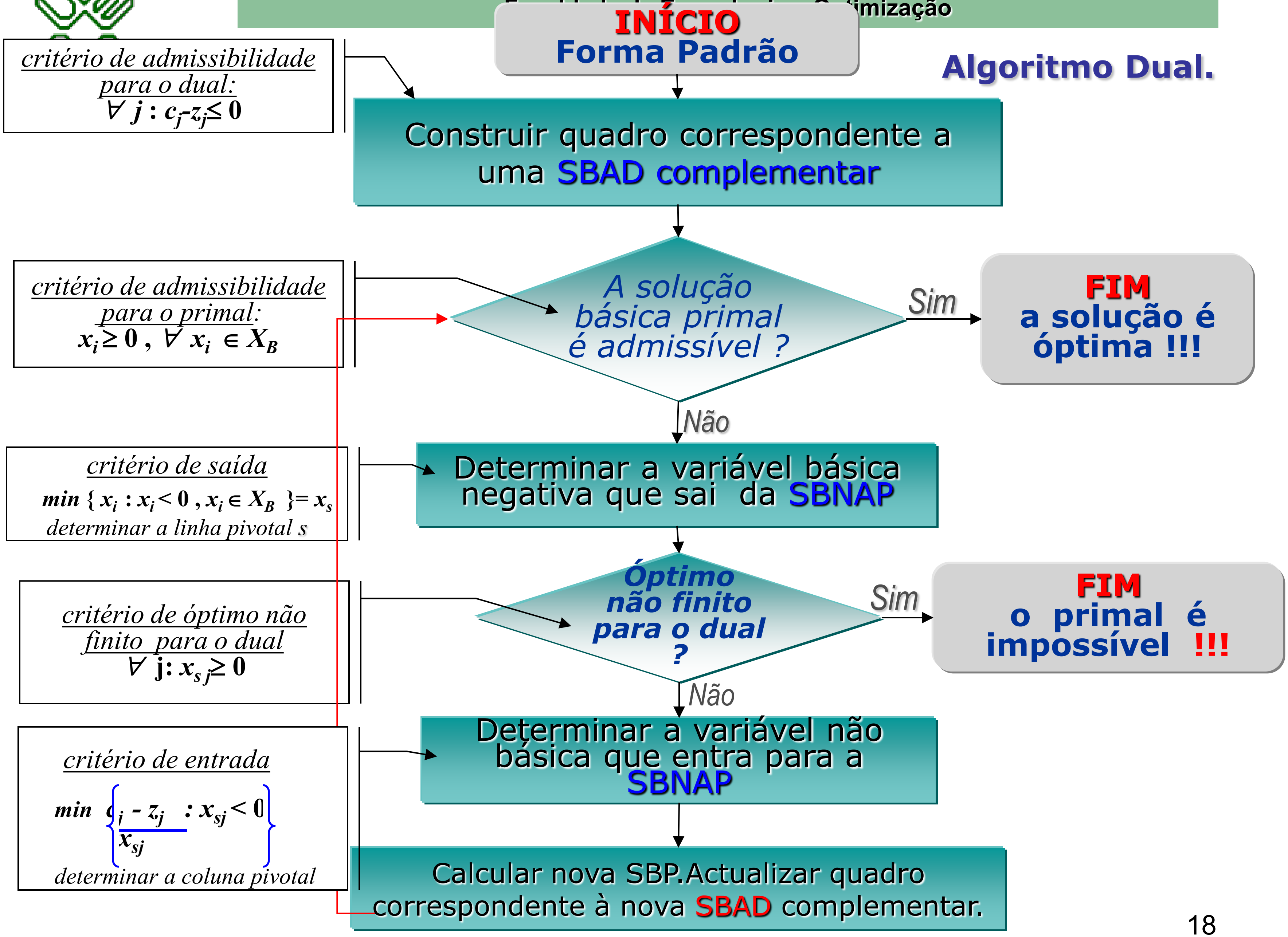

*Enquanto o algoritmo primal mantém a admissibilidade da solução primal,o algoritmo dual, mantém a admissibilidade da solução dual.*

# Algoritmo Dual Simplex. Fluxograma Geral.



# Algoritmo Dual.

**Fluxograma**



# Exemplo. Redução á forma padrão.

*minimizar* $2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4$

*sujeito a:*

$$2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 \geq 20$$
$$7x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 \leq 35$$
$$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq 15$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

$\Rightarrow$

*minimizar* $2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4$

*sujeito a:*

$$2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 20$$
$$7x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_6 = 35$$
$$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_7 = 15$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0$$

*Multiplicando por (-1) as equações 1 e 3 , obtém-se uma matriz inicial identidade*

*minimizar* $2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4$

*sujeito a:*

$$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = -20$$
$$7x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_6 = 35$$
$$-4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 = -15$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0$$

# Algoritmo Dual. Exemplo: determinando uma SBP inicial.

**Passo 1**: Determinar uma SBP inicial que corresponde a uma SBAD. Construir o quadro *simplex* correspondente.

Com a redução à forma padrão, é possível identificar uma SBP que corresponda a uma SBAD complementar.

(verifica : $\forall\, j : c_j - z_j \leq 0,\ j=1,\ldots,n$)

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -2 & 3 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_5 & P_6 & P_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} X_B \\ \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{bmatrix} -20 \\ 35 \\ -15 \end{bmatrix} \end{array}$$

***A SBP inicial $X^0 = (0, 0, 0, 0, -20, 35, -15)$ é não admissível.***

# Algoritmo Dual. Exemplo: 1º quadro Simplex correspondente à SBP Inicial.

**1º quadro, Passo 1:** Construção do 1º quadro correspondente à SBNAP **X⁰** = ( 0, 0, 0, 0, **-20**, **35**, **-15** ).

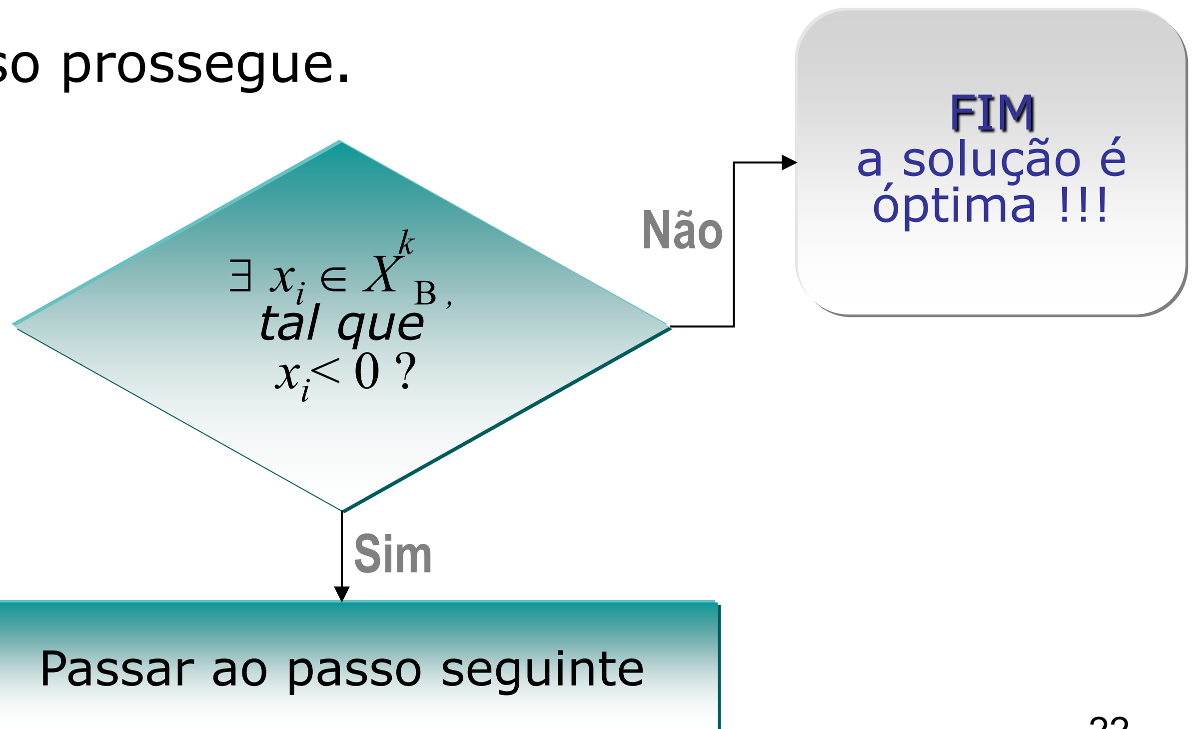
| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
| 0 | $x_5$ | -2 | 3 | 5 | -4 | 1 | 0 | 0 | -20 |
| 0 | $x_6$ | 7 | 2 | 6 | -2 | 0 | 1 | 0 | 35 |
| 0 | $x_7$ | -4 | -5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | -15 |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\boxed{0}$ |
| | $z_j - c_j$ | -2 | -7 | -6 | -5 | 0 | 0 | 0 | |

*verifica o critério de optimalidade: os custos reduzidos são não positivos, i.e. a solução dual complementar é admissível.*

*valor da f.o.*

# Algoritmo Dual.
# Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

- Existe algum $x_i \in X^k_{\mathrm{B}}$ , *tal que* $x_i < 0$ *, i=1,…m* ?
  - Não, o processo termina: a solução básica do primal é admissível, i.e., a solução é óptima para o primal.
  - Sim, o processo prossegue.



# Algoritmo Dual. Exemplo: 1º Quadro.
# Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

Existe alguma *variável básica* negativa?

$X^0_B = ( \boxed{-20},\ 35,\ \boxed{-15} )$

$\exists\, x_i \in X^0_B$, *tal que* $x_i < 0$ ?

*$X^0$ não é admissível para o primal* **(SBNAP)**

Sim

***Passar ao passo seguinte***

# Algoritmo Dual.

## Passo 3:Determinando a variável básica negativa que sai.

linha pivotal $s$

| $X_B$ | $x_1$ | … | $x_j$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{i_1}$ | $x_{11}$ | … | $x_{1j}$ | … | $x_{1n}$ |
| $x_{i_2}$ | $x_{21}$ | … | $x_{2j}$ | … | $x_{2n}$ |
| . | | | | | |
| . | | | | | |
| $x_{i_S}<0$ | $x_{s1}$ | … | $x_{sj}$ | … | $x_{sn}$ |
| . | | | | | |
| . | | | | | |
| $x_{i_M}$ | $x_{m1}$ | … | $x_{mj}$ | … | $x_{mn}$ |

**Critério de saída:**

$$\min_i \{ x_i \in X^k_B : x_i < 0 \} = x_s$$

# Algoritmo Dual. Exemplo. 1º Quadro.

## Passo 3:Determinando a variável básica negativa que sai.

$min \{ x_i \in X^k_B : x_i < 0 \} = -20$

*linha pivotal*

| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
| 0 | $x_5$ | -2 | 3 | 5 | -4 | 1 | 0 | 0 | $\boxed{-20}$ → ***mínimo*** |
| 0 | $x_6$ | 7 | 2 | 6 | -2 | 0 | 1 | 0 | 35 |
| 0 | $x_7$ | -4 | -5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | $\boxed{-15}$ |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\boxed{0}$ |
| | $z_j - c_j$ | -2 | -7 | -6 | -5 | 0 | 0 | 0 | |

*a variável candidata a sair é: $x_5$*

# Algoritmo Dual.

## Passo 4: Teste de óptimo não finito para o dual (primal impossível).

*Existe alguma componente negativa na linha pivotal ?*

$$\min_{i} \{ x_i \in X^k_B : x_i < 0 \} = x_s$$

| $X_B$ | $x_1$ | … | $x_j$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{i_1}$ | $x_{11}$ | … | $x_{1j}$ | … | $x_{1n}$ |
| $x_{i_2}$ | $x_{21}$ | … | $x_{2j}$ | … | $x_{2n}$ |
| . | | | | | |
| . | | | | | |
| $x_{i_S}<0$ | $x_{s1}$ | … | $x_{sj}$ | … | $x_{sn}$ |
| . | | | | | |
| . | | | | | |
| $x_{i_M}$ | $x_{m1}$ | … | $x_{mj}$ | … | $x_{mn}$ |

*Existe algum $x_{sj} < 0$ ?*

Não

**FIM**

***óptimo não finito para o dual***, i.e., o primal não tem soluções admissíveis: ***o primal é impossível***

Sim

Passar ao passo seguinte

# Algoritmo Dual. Exemplo. 1º Quadro.
## Passo 4: Teste de óptimo não finito para o dual.

*Existe alguma componente negativa na linha pivotal ?*

| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
| 0 | $x_5$ | - 2 | 3 | 5 | -4 | 1 | 0 | 0 | -20 → ***mínimo*** |
| 0 | $x_6$ | 7 | 2 | 6 | -2 | 0 | 1 | 0 | 35 |
| 0 | $x_7$ | - 4 | -5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | -15 |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $z_j - c_j$ | -2 | -7 | - 6 | -5 | 0 | 0 | 0 | |

*Há 2 componentes negativas na linha pivotal, i.e., é possível passar ao passo seguinte do algoritmo*

# Algoritmo Dual.

## Passo 5: Determinar a variável não básica que entra.

linha pivotal $s$

| $X_B$ | $x_1$ … $x_j$ … $x_n$ |
|---|---|
| $x_{i_1}$ | $x_{11}$ … $x_{1j}$ … $x_{1n}$ |
| $x_{i_2}$ | $x_{21}$ … $x_{2j}$ … $x_{2n}$ |
| . | |
| $x_{i_S}<0$ | $x_{s1}$ … $x_{sj}$ … $x_{sn}$ |
| . | |
| $x_{i_M}$ | $x_{m1}$ … $x_{mj}$ … $x_{mn}$ |

**1º.** Seleccionar os coeficientes negativos da linha pivotal *s* : $x_{sj} < 0$

**2º.** Dividir os quocientes entre os custos reduzidos e cada um destes coeficientes negativos

$$\frac{c_j - z_j}{x_{sj}} \;:\; x_{sj} < 0, \quad j = 1,2,\dots,n$$

**3º.** Seleccionar a coluna *r* onde se alcance o menor dos quocientes(*critério de entrada*):

$$\theta_0 = \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{x_{sj}} \middle| x_{sj} < 0 \right\} = \frac{c_r - z_r}{x_{sr}}$$

*A escolha de $\theta_0$ como o mínimo desta expressão garante a admissibilidade da nova solução dual, já que o percurso deste algoritmo dual Simplex é mover-se duma SBAD para outra SBAD " melhor".*

# Algoritmo Dual. Exemplo: 1º Quadro.

## Passo 5: Determinar a variável não básica que entra.

*coluna pivotal: $j = 1$*

***pivot***

| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\overline{b}$ |
| 0 | $x_5$ | - 2 | 3 | 5 | -4 | 1 | 0 | 0 | -20 → ***mínimo*** |
| 0 | $x_6$ | 7 | 2 | 6 | -2 | 0 | 1 | 0 | 35 |
| 0 | $x_7$ | - 4 | -5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | -15 |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $z_j - c_j$ | -2 | -7 | - 6 | -5 | 0 | 0 | 0 | |

↑ ***minimo***

**-2/-2= 1**

**-5/-4= 5/4**

# Algoritmo Dual.

## Passo 6: 1º. Calcular nova SBP com SBAD complementar. 2º. Construir o novo quadro simplex.

1ª *A variável básica negativa que sai* → $x_s$

2ª *A variável não básica que entra* → $x_r$

**SBP:**

$$X^0 = (x_1, x_2, x_s, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

$x_s$ sai → $x_r$ entra

**nova SBP:**

$$X^1 = (x_1, x_2, x_r, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

Calcular o novo quadro aplicando o método de Gauss-Jordan, tomando o pivot como elemento redutor.

# Algoritmo Dual. Exemplo. 1º Quadro.

## Passo 6: Calcular nova SBP com SBAD complementar.

1ª A variável básica negativa que sai → $x_5$

2ª A variável não básica que entra → $x_1$

**SBP inicial $X^0$ :**

$$X^0_B = (x_5, x_6, x_7)$$

$$X^0 = (0,0,0,0,-20, 35, -15)$$

$x_1$ entra → $x_5$ sai

**SBP $X^1$ :**

$$X^1_B = (x_1, x_6, x_7)$$

$$X^1 = ?$$

# Algoritmo Dual. Exemplo. Passo 6. Calcular nova SBP $X^1$.

**Linha 1**: *linha pivotal*
dividir pelo pivot: **-2**

**Linha 2**: linha anterior - (coeficiente coluna pivot x nova linha pivot)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 2 | 6 | -2 | 0 | 1 | 0 | 35 |
| -(7) | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| | 0 | 25/2 | 47/2 | -16 | 7/2 | 1 | 0 | -35 |

**Linha 3:** linha anterior - (coeficiente coluna pivot x nova linha pivot)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -4 | -5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | -15 |
| +4x | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| | 0 | -11 | -7 | 10 | -2 | 0 | 1 | 25 |

| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | $x_5$ | - 2 | 3 | 5 | -4 | 1 | 0 | 0 | -20 |
| 0 | $x_6$ | 7 | 2 | 6 | -2 | 0 | 1 | 0 | 35 |
| 0 | $x_7$ | - 4 | -5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | -15 |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $z_j - c_j$ | -2 | -7 | - 6 | -5 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | $x_1$ | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 25/2 | 47/2 | -16 | 7/2 | 1 | 0 | -35 |
| 0 | $x_7$ | 0 | -11 | -7 | 10 | -2 | 0 | 1 | 25 |

# Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro.

## Passo 1. Construir o quadro Simplex correspondente à nova SBP $X^1 = (10, 0, 0, 0, 0, -35, 25)$.

| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | $x_1$ | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 25/2 | 47/2 | -16 | 7/2 | 1 | 0 | -35 |
| 0 | $x_7$ | 0 | -11 | -7 | 10 | -2 | 0 | 1 | 25 |
| | $z_j$ | 2 | -3 | -5 | 4 | -1 | 0 | 0 | $\boxed{20}$ |
| | $z_j - c_j$ | 0 | -10 | -11 | -1 | -1 | 0 | 0 | |

*os custos reduzidos são não positivos, i.e., a solução dual complementar é admissível.*

# Algoritmo Dual. Exemplo: 2º quadro.

## Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

*Existe alguma variável básica negativa?*

$X^1_B = ( \; 10 \;, \; \boxed{-35} \;, \; 25 \; )$

$\exists \; x_i \in X^0_B,$ *tal que* $x_i < 0$ ?

**Sim**

*Passar ao passo seguinte*

*$X^1$ não é admissível para o primal* ***(SBNAP)***

# Algoritmo Dual. Exemplo. 2º quadro.

## Passo 3: Determinar a variável básica que sai.

| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | $x_1$ | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 25/2 | 47/2 | -16 | 7/2 | 1 | 0 | $\boxed{-35}$ → *mínimo* |
| 0 | $x_7$ | 0 | -11 | -7 | 10 | -2 | 0 | 1 | 25 |
| | $z_j$ | 2 | -3 | -5 | 4 | -1 | 0 | 0 | $\boxed{20}$ |
| | $z_j - c_j$ | 0 | **-10** | **-11** | **-1** | **-1** | 0 | 0 | |

linha pivotal

*a variável candidata a sair é: $x_6$*

# Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro.
## Passo 4: Teste de óptimo não finito para o dual, problema impossível para o primal.

*Existe algum $x_{5j} < 0$ na linha pivotal?*

| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | $x_1$ | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 25/2 | 47/2 | -16 | 7/2 | 1 | 0 | - 35 → *mínimo* |
| 0 | $x_7$ | 0 | -11 | -7 | 10 | -2 | 0 | 1 | 25 |
| | $z_j$ | 2 | -3 | -5 | 4 | -1 | 0 | 0 | 20 |
| | $z_j - c_j$ | 0 | -10 | -11 | -1 | -1 | 0 | 0 | |

*Há uma componente negativa na linha pivotal, i.e., é possível passar ao passo seguinte do algoritmo*

# Algoritmo Dual. Exemplo: 2º quadro.

## Passo 5: Determinar a variável não básica que entra.

| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
| 2 | $x_1$ | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 25/2 | 47/2 | -16 | 7/2 | 1 | 0 | - 35 → *mínimo* |
| 0 | $x_7$ | 0 | -11 | -7 | 10 | -2 | 0 | 1 | 25 |
| | $z_j$ | 2 | -3 | -5 | 4 | -1 | 0 | 0 | $\boxed{20}$ |
| | $z_j - c_j$ | 0 | -10 | -11 | $\boxed{-1}$ | -1 | 0 | 0 | |

*mínimo* ↑

-1/-16= 1/16

# Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro.

## Passo 6: Calcular nova SBP $X^2$.

1ª *A variável básica negativa que sai* → $x_6$

2ª *A variável não básica que entra* → $x_4$

**SBP inicial $X^1$:**

$$X^1_B = (x_1, x_6, x_7)$$

$$X^1 = (10, 0, 0, 0, 0, -35, 25)$$

$x_4$ *entra* → $x_6$ *sai*

**SBP $X^2$:**

$$X^2_B = (x_1, x_4, x_7)$$

$$X^2 = ?$$

# Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro.

## Passo 6. Calcular nova SBP $X^2$.

| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | $x_1$ | 1 | -3/2 | -5/2 | 2 | -1/2 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 25/2 | 47/2 | -16 | 7/2 | 1 | 0 | - 35 |
| 0 | $x_7$ | 0 | -11 | -7 | 10 | -2 | 0 | 1 | 25 |
| | $z_j$ | 2 | -3 | -5 | 4 | -1 | 0 | 0 | 20 |
| | $z_j - c_j$ | 0 | -10 | -11 | -1 | -1 | 0 | 0 | |
| 2 | $x_1$ | 1 | 1/16 | 7/16 | 0 | -1/16 | 1/8 | 0 | 45/8 |
| 5 | $x_4$ | 0 | -25/32 | -47/32 | 1 | -7/32 | -1/16 | 0 | 35/16 |
| 0 | $x_7$ | 0 | -51/16 | 123/16 | 0 | 3/16 | 5/8 | 1 | 75/8 |

# Algoritmo Dual. Exemplo.

## Passo 1: Construir o 3º quadro Simplex correspondente à nova SBP $X^2$.

$X^2 = (45/8, 0, 0, 35/16, 0, 0, 75/8)$.

| | $c_j$ | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\bar{b}$ |
| 2 | $x_1$ | 1 | 1/16 | 7/16 | 0 | -1/16 | 1/8 | 0 | 45/8 |
| 5 | $x_4$ | 0 | -25/32 | -47/32 | 1 | -7/32 | -1/16 | 0 | 35/16 |
| 0 | $x_7$ | 0 | -51/16 | 123/16 | 0 | 3/16 | 5/8 | 1 | 75/8 |
| | $z_j$ | 2 | -121/32 | -207/32 | 5 | -39/32 | -1/16 | 0 | $\boxed{355/16}$ |
| | $z_j - c_j$ | 0 | **-345/32** | **-399/32** | 0 | **-39/32** | **-1/16** | 0 | |

*os custos reduzidos são não positivos, i.e. a **solução dual** complementar **é admissível***

# Algoritmo Dual. Exemplo: 3º quadro.

## Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

*Existe alguma variável básica negativa?*

$$X^2_B = (\ 45/8\ ,\ 35/16\ \ ,75/8\ )$$

$$\exists\, x_i \in X^2_B,\ \text{tal que}\ x_i < 0\ ?$$

Não

**FIM**
**a solução é óptima !!!**

*$X^2$ é admissível para o primal* (SBAP), sendo *a solução óptima para o primal*.
*A solução dual complementar $Y^2 = C_B B^{-1}$ é admissível para o dual* (SBAD), *sendo a solução óptima para o dual.*

# Algoritmo Dual. Conclusões.

O Algoritmo Dual Simplex envolve:

- uma SBAD como ponto de partida à qual corresponde uma SBNAP;
- um mecanismo que determina a passagem para uma nova SBAD "melhor" do que a anterior;
- critérios de paragem que indicam se o problema primal tem óptimo finito (solução óptima) ou se o problema primal é impossível (neste caso o problema dual não tem óptimo finito).