

Sistemas Energéticos

3º ano 6º semestre

Aula 9



Aula 9: Transferência de Calor em Fornos

Tópicos

- Transferência de Calor no Espaço de Trabalho
- Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho
- Transferência de Calor Externa
- Transferência de calor no interior da carga
- Convecção como condição de contorno
- Equações de Bessel



9.1 Transferência de Calor no Espaço de Trabalho

No espaço de trabalho dos fornos dá-se uma complexa troca de calor de vários modos: radiação, condução e convecção. Estes modos de transferência de calor ocorrem em simultâneo e com influência recíproca.

O calor dos gases incandescentes transmite-se tanto ao material a tratar, por radiação e convecção, como às paredes, abóbada e soleira do forno. A superfície interna da alvenaria aquece-se e por sua vez imite calor por radiação ao material, através de uma camada de gases em movimento, que absorvem uma parte deste calor.



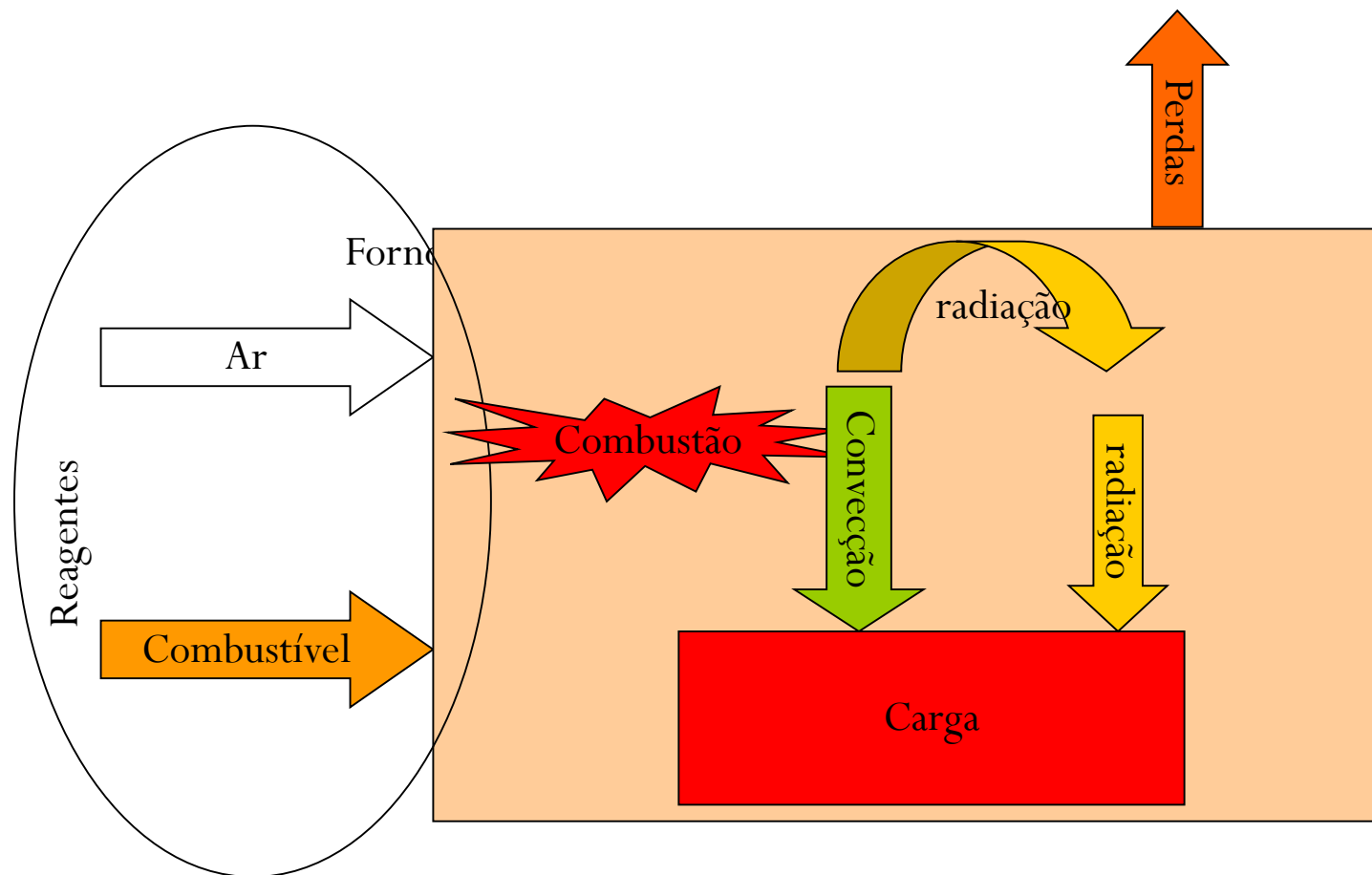


9.1 Transferência de Calor no Espaço de Trabalho

Assim, a abobada e parede são irradiadores secundários. Uma parte do calor transmitido à alvenaria dissipa-se ao meio ambiente, por meio da condutibilidade, estas são perdas de calor. Para as peças colocadas na soleira, o calor é também transmitido à carga por condutibilidade térmica através da soleira.



9.1 Transferência de Calor no Espaço de Trabalho



Transferência de Calor no Forno

9.1 Transferência de Calor no Espaço de Trabalho

A quantidade total de calor transmitida ao material, aos gases e à alvenaria é dada por:

$$Q_{\text{carga}} = Q_g^r + Q_{\text{revest}}^r + Q_g^c \quad (9.1)$$

Onde;

Q_g^r e Q_g^c são o calor transmitido pelos gases por radiação e por convecção

Q_{revest} é o calor transferido à carga por radiação da abóbada, paredes e soleira do forno.





9.1 Transferência de Calor no Espaço de Trabalho

Nos fornos metalúrgicos a fracção de calor secundário transmitido por radiação Q_{revest} pode atingir valores de 40 a 60% do calor total fornecido à carga.

A divisão dos fluxos de calor em de radiação e convecção é convencional, pois cerca de 10% da energia térmica é transmitida à carga por convecção directa mas o somatório da convecção pode chegar a 65% a custa do calor secundário de radiação que primeiramente é transferido ao revestimento por convecção.

9.1 Transferência de Calor no Espaço de Trabalho

O aquecimento por radiação divide-se em três modos:

a) Transferência de calor radiante uniformemente distribuída

$$Q_{\text{carga}}^r = Q_{\text{revestimento}}^r \quad (9.2)$$

b) Transferência de calor radiante directamente orientada

$$Q_{\text{carga}}^r > Q_{\text{revestimento}}^r \quad (9.3)$$



c) Transferência de calor radiante indirectamente orientada.

$$Q_{\text{carga}}^r < Q_{\text{revestimento}}^r \quad (9.4)$$



9.1 Transferência de Calor no Espaço de Trabalho

Em fornos diferentes, realizam-se diferentes regimes de aquecimento. Por exemplo nos fornos de fusão é racional realizar o aquecimento por radiação dirigida directamente quando a chama luminosa é dirigida à carga. Em fornos de aquecimento de peças metálicas é cómodo realizar o aquecimento indirecto do revestimento, que por sua vez emite calor para aquecer uniformemente a carga.

9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

Se na fornalha existirem muitas fontes de calor por radiação uniformemente distribuída, nos cálculos da irradiação no espaço de trabalho é possível usar-se a equação clássica de Stefan Boltzman:

$$Q_{\text{carga}}^r = C_o \varepsilon_f H_r \xi \left[\left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}}{100} \right)^4 \right]_{\text{med}} = C_{\text{med}} H \xi \Delta \quad (9.5)$$



$C_o = 5,67 \text{ W/m}^2\text{K}^4$ é o coeficiente de radiação do corpo negro

ε_f – Emissividade do espaço de trabalho

T_g e T_{carga} temperaturas absolutas do gás e da carga

ξ – coeficiente de poluição da superfície de radiação obtida de dados experimentais 0,6 a 0,75

o índice “med” refere-se a temperaturas médias.

9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

Admitindo que as perdas de calor para o ambiente são iguais ao calor transmitido por convecção ao revestimento, é possível exprimir-se o valor da emissividade do espaço de trabalho por :

$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon_{\text{carga}} \varepsilon_{\text{gás}} \psi (1 - \varepsilon_g) + 1}{\psi (1 - \varepsilon_g) [\varepsilon_{\text{carga}} + \varepsilon_{\text{gás}} (1 - \varepsilon_{\text{carga}})] + \varepsilon_{\text{gás}}} \quad (9.6)$$

Onde

ε_g e $\varepsilon_{\text{carga}}$ são os valores de emissividade dos gases e da carga respectivamente

$\psi = \frac{Hr}{F_{\text{reves}}^r}$ é a razão entre a superfície de radiação da carga e a superfície total interna do revestimento.



9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

A superfície de radiação da carga é sempre menor que a superfície total da carga, daí:

$$Hr = \varphi \cdot F_{\text{carga}} \quad (9.7)$$

Onde φ é o coeficiente da fracção da superfície de radiação da carga, que obtém-se de dados experimentais. Este coeficiente é um parâmetro geométrico e depende da forma da superfície da carga, do seu tamanho, da disposição das peças, da distância entre elas e do modo de colocação destas na soleira. Para algumas peças o valor de φ pode-se determinar de gráficos.



9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

Para fornos eléctricos de resistência

Nos casos mais complexos o valor de ψ determina-se experimentalmente. Para fornos eléctricos de resistência a emissividade calcula-se de:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{\text{carga}} \cdot \varepsilon_{\text{ir}} \frac{\psi + 1}{\psi(\varepsilon_{\text{carga}} + \varepsilon_{\text{ir}} - \varepsilon_{\text{carga}} \cdot \varepsilon_{\text{ir}}) + \varepsilon_{\text{ir}}} \quad (9.8)$$

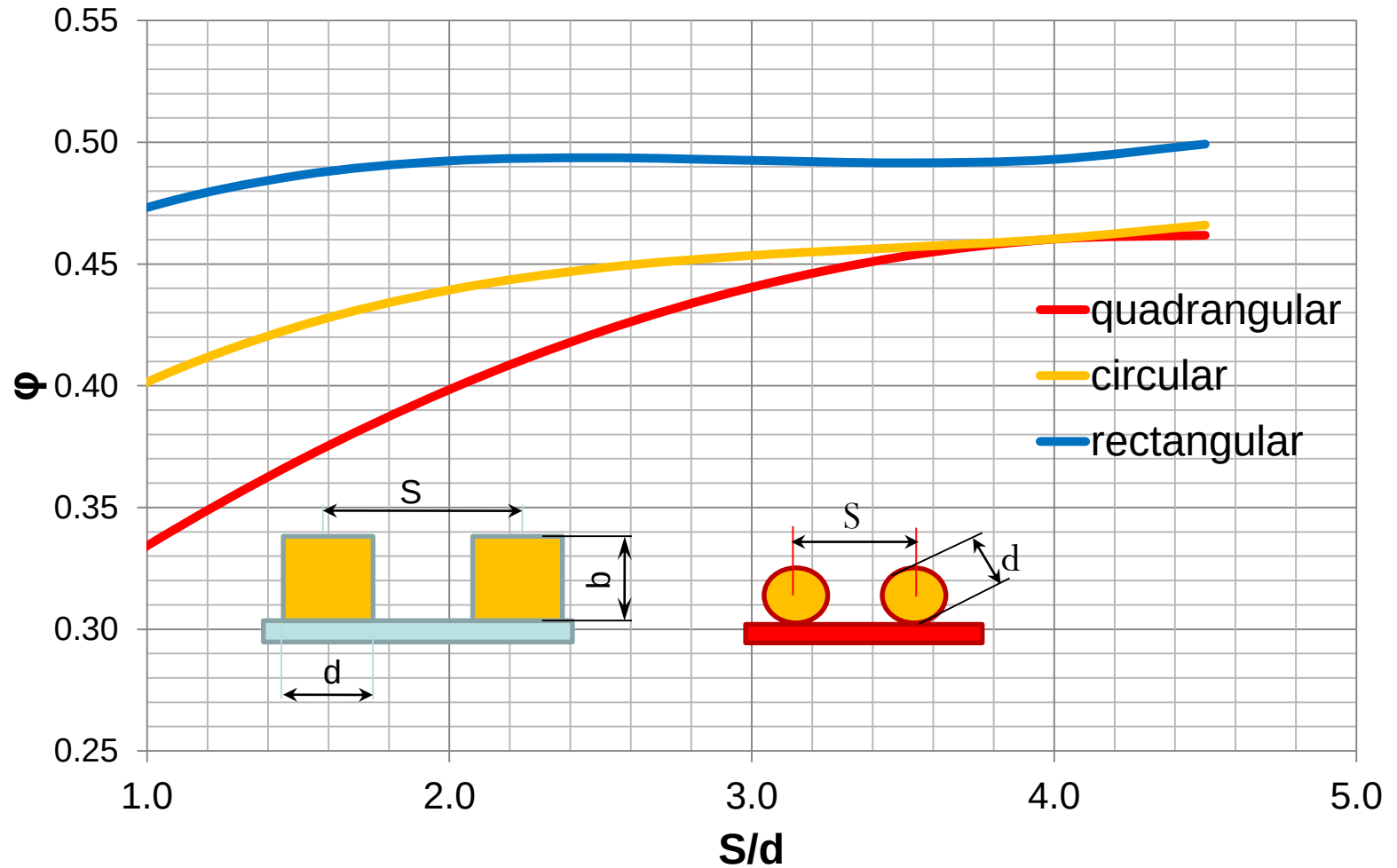
Onde :

ε_r emissividade dos irradiadores





Coeficiente de Fracção



9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

A fórmula do calor transmitido à carga em fornos eléctricos tem o seguinte aspecto:

$$Q_{\text{carga}}^r = C_o \varepsilon_f H_r \xi \left[\left(\frac{T_{ir}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}}{100} \right)^4 \right]_{med} = C_{med} H \xi \Delta \quad (9.9)$$

Onde: T_{ir} é a temperatura absoluta dos irradiadores

A temperatura dos gases de escape também varia ao longo do percurso dos mesmo de uma máxima até uma mínima como também a temperatura da carga varia de uma temperatura inicial até uma final.



9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

A diferença média efectiva entre os gases e a carga para o processo total calcula-se de :

$$\Delta_1 = \left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}}{100} \right)^4 \right]_{med} = \sqrt{\left[\left(\frac{T_f^t}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}^{final}}{100} \right)^4 \right] \left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}^o}{100} \right)^4 \right]} \quad (9.10)$$

T_f^t – temperatura teórica absoluta da queima do combustível

T_f – temperatura dos gases de escape



9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

A expressão Q_{carga} não toma só em conta o calor transmitido à carga por radiação, que desempenha um papel predominante em instalações de altas temperaturas. Para o cálculo do calor transmitido por convecção usa-se a seguinte fórmula:

$$Q_g^c = h_c \cdot F_{\text{carga}} (t_g - t_{\text{carga}}) \quad (9.11)$$

Onde:



h_c – é o coeficiente de troca de calor por convecção

t_g – é a temperatura dos gases de combustão

t_{carga} – é a temperatura da carga

$$Q_{\text{carga}} = Q_{\text{carga}}^r + Q_g^c \quad (9.12)$$

9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

Em cálculos aproximados pode-se desprezar a temperatura inicial da carga e neste caso o valor de Δ_1 pode ser expresso por:

$$\Delta_1 = \left(\frac{T_g^t}{100} \right)^4 \sqrt{(1 - \theta_{\text{carga}}^4) \theta_{\text{g.esc}}^4} = \left(\frac{T_g^t}{100} \right)^4 \theta_{\text{g.esc}}^2 \sqrt{(1 - \theta_{\text{carga}}^4)} \quad (9.13)$$

Onde:



$$\theta_{\text{g.esc}} = \frac{T_{\text{g.esc}}}{T_g^t} \quad \text{e} \quad \theta_{\text{c arg a}} = \frac{T_{\text{c arg a}}''}{T_g^t} \quad \text{e o valor} \quad \theta_{\text{c arg a}}' = \frac{T_{\text{c arg a}}'}{T_g^t} \approx 0$$

9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

No caso da fusão da carga em que só varia a temperatura dos gases tem-se:

$$\Delta_2 = 0,774 \cdot \theta_{g,esc}^2 - \theta_{carga}^4 \quad (9.14)$$

Neste caso as fórmulas de cálculo transformam-se em:

$$Q_{carga}^r = C_o \varepsilon_f H_r \xi \left(\frac{T_f}{100} \right)^4 \Delta \quad (9.15)$$



9.2 Transferência de calor uniformemente distribuída no espaço de trabalho

$$Q_{\text{carga}} = C_o \varepsilon_f H_r \xi \beta_c \left(\frac{T_f}{100} \right)^4 \Delta \quad (9.16)$$

Onde o coeficiente β_c é o coeficiente de correcção que leva em conta os efeitos da convecção (1,05-1,15).

Na maioria dos fornos industriais o espaço de trabalho é a própria câmara de combustão. A combustão ocorre próximo da carga e a transferência de calor realiza-se geralmente por radiação (o papel da convecção varia entre 5-15%).



9.3 Transferência de Calor Externa

A equação de balanço térmico do forno passa a ser:

$$\beta_o C_o \varepsilon_f H_r \xi \left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}}{100} \right)^4 \right]_{med} = \dot{B} V_g \bar{c}_g (t_t - t_{esc}) \eta_f \quad (9.17)$$

Onde:

B – é o consumo de combustível

β_o – é o coeficiente que toma em conta a convecção

V_g – volume dos gases de combustão por unidade de combustível

η_f – rendimento térmico da câmara de combustão

c_g – valor médio do calor específico dos gases no intervalo de temperaturas t_t e t_{esc}



$$\bar{c}_g = \frac{C_g t_t - C_{g.esc} t_{esc}}{t_t - t_{esc}} \quad (9.18)$$

9.3 Transferência de Calor Externa

A equação de balanço pode ser apresentada como:

$$\frac{\left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}}{100} \right)^4 \right]_{med}}{(T_f - T_{\text{carga}})} = \frac{\dot{B}V_g \bar{c}_g \eta_f}{C_o \varepsilon_f H_r \xi} \quad (9.19)$$

Ou

$$B_o = \frac{\dot{B}V_g \bar{c}_g \eta_f}{10C_o H_r \left(\frac{T_t}{1000} \right)^3} = \frac{\left[\left(\frac{T_f}{T_t} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{carga}}}{T_t} \right)^4 \right]_{med}}{1 - \frac{T_{\text{esc}}}{T_t}} \varepsilon_f \xi \quad (9.20)$$



Onde

B_o – é o critério de Boltzman

$\frac{T_i}{T_g}$ - são temperaturas adimensionais que se designam por θ

9.3 Transferência de Calor Externa

Lembrando que as temperaturas médias se obtêm de:

$$(\theta_f^4 - \theta_{\text{carga}}^4)_{\text{med}} = \sqrt{(1 - \theta_{\text{carga}}^4)(\theta_{\text{esc}}^4 - \theta_{\text{carga}}^4)} \quad (9.21)$$

Admitindo que :

$$\theta_{\text{carga}}' \approx 0$$

Obtém-se:

$$(\theta_f^4 - \theta_{\text{carga}}^4)_{\text{med}} = \theta_{\text{esc}}^2 \sqrt{(1 - \theta_{\text{carga}}^4)} = m \theta_{\text{esc}}^2 \quad (9.22)$$

A equação adimensional de Boltzman é dada por:

$$B_o = \frac{\theta_{\text{esc}}^2 \sqrt{(1 - \theta_{\text{carga}}^4)}}{1 - \theta_{\text{esc}}} \varepsilon_f \xi \quad (9.23)$$

9.3 Transferência de Calor Externa

Calculando o consumo de combustível da equação de balanço do forno e usando as Equações 9.20 e 9.23 determinam-se as temperaturas dos gases de escape e outras grandezas.

A equação de cálculo da temperatura dos gases de escape tem o seguinte aspecto:

$$\left(\frac{m}{B_o} \varepsilon_f \xi \right) \theta_{esc}^2 + \theta_{esc} - 1 = 0 \quad (9.24)$$



9.3 Transferência de Calor Externa

Para a correcção devido a troca de calor por convecção introduz-se β_{conv} que é expressa em fracções do fluxo de calor por radiação. Resolvendo a Equação 9.24 relativamente a θ_{esc} e introduzindo o valor de β_{conv} obtém-se:



$$\theta_{\text{esc}} = \frac{-B_o + \left(B_o^2 + 4B_o \varepsilon_f \xi \beta_{\text{conv}} m\right)^{1/2}}{2\varepsilon_f \xi \beta_{\text{conv}} m} \quad (9.25)$$

9.3 Transferência de Calor Externa

Há vezes que conhecendo-se θ_{esc} é preciso calcular-se H_r , neste caso usa-se a Equação 9.20:

$$H_r = \frac{\dot{B}V_g \bar{c}_g \eta_f (1 - \theta_{esc})}{10c_o \beta_{conv} \left(\frac{T_t}{1000} \right)^3 (\theta_f^4 - \theta_{carga}^4) m \varepsilon_f \xi} \quad (9.26)$$

A fracção do calor total transmitido por radiação pode ser calculada de:



$$\sigma = \frac{Q_{carga}}{Q_{total}} = \frac{\dot{B}V_g \bar{c}_g (T_t - T_{esc}) \eta_f}{\dot{B}V_g c_g^* T_t} \approx \left(1 - \frac{T_{esc}}{T_t} \right) \eta_f \quad (9.27)$$

9.3 Transferência de Calor Externa

O aquecimento de partes da carga em fornos de cuba pode ser considerado problema externo no caso em que

$$B_i = \frac{h \cdot d_{eq}}{2k} < 0,6 \div 1,0 \quad (9.28)$$

No caso de escoamento de gases na camada densa, por causa das pequenas dimensões das fendas e pequena espessura da camada de gases irradiantes, considera-se que a troca de calor é feita predominantemente por convecção. Devido ao valor das fendas ser variável, o movimento é pulsante o que provoca turbulência no fluxo. Para calcular a transferência de calor nestas condições usam-se as seguintes fórmulas empíricas:



9.3 Transferência de Calor Externa

O coeficiente de transferência de calor determina-se como:

$$\begin{aligned} \text{Re}_{cam} < 200 & \quad \text{Nu}_{cam} = 0,106\text{Re}_{cam} \\ \text{Re}_{cam} \geq 200 & \quad \text{Nu}_{cam} = 0,61\text{Re}_{cam} \end{aligned} \quad (9.29)$$

No cálculo do número de Reynolds $\text{Re} = \frac{d_{eq} w}{\nu}$

A velocidade w é a média para toda a cuba quando vazia.

A superfície das partículas metálicas calcula-se de:

$$\frac{F_{carg}}{V_{carg}} = \frac{6(1-f)}{d} \quad (9.30)$$

Onde:

f é o coeficiente de porosidade



9.3 Transferência de Calor Externa

No caso de movimento contra-corrente entre os gases e a carga utilizam-se as seguintes expressões

$$Nu_{cam} = 0,014Re_{cam} Pr^{0,33} \quad (Re < 200) \quad (9.31)$$

$$Nu_{cam} = 0,056Re_{cam}^{0,87} Pr^{0,33} \quad (Re = 200 \div 700; Pr = 0,68 \div 1,1)$$

No caso do movimento dos gases transversalmente à carga tem-se:

$$Nu_{cam} = 0,055Re_{cam} \quad (9.32)$$

Quando se trata de transferência de calor em camada em suspensão (leito fluidizado) ela é ocorre tanto por convecção como por radiação.



9.3 Transferência de Calor Externa

A intensificação da troca de calor depende da velocidade do fluxo, da concentração das partículas e do seu tamanho e a transferência de calor calcula-se de:

$$\begin{aligned}Nu_{cam} &= 0,194 Re_{cam}^{0,87} Pr^{0,33} & (30 < Re < 480) \\Nu_{cam} &= 0,316 Re_{cam}^{0,87} Pr^{0,33} & (Re > 500)\end{aligned}\tag{9.33}$$



A velocidade que se utiliza no cálculo do número de Reynolds é a relativa

9.3 Transferência de Calor Externa

Na camada em ebulição a transferência de calor calcula-se de:

$$Nu_{cam} = 0,316 Re_{cam}^{0,8} \quad (Re = 40 \div 500) \quad (9.34)$$

A velocidade para o cálculo do número de Reynolds está relacionada com a área da rede de passagem de ar. A troca máxima de calor ocorre quando:

$$Re_{opt} = 0,121 Ar^{0,5} \quad (9.35)$$

Onde:



$$Ar = \frac{g d_{eq}^3}{\nu^2} \frac{\rho_{carga} - \rho_{gás}}{\rho_{gás}} \quad (9.36)$$

$$Nu = 0,86 Ar^{0,2} \quad (Ar = 30 \div 2 \cdot 10^5) \quad (9.37)$$

9.4 Transferência de calor no interior da carga

Conhecendo o fluxo de combustível, o volume da carga, a temperatura inicial da mesma e o tipo de carga, pode-se calcular o tempo necessário para se atingir uma temperatura determinada de:

$$\dot{B}V_g \bar{c}_g (t_t - t_{esc}) \eta_f = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad (9.38)$$

Acreditando que a temperatura da superfície da peça é a mesma que a temperatura dos gases pode-se escrever:

$$(t_{\text{ext}} - t_i) = \theta \quad \frac{dT}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.39)$$



9.4 Transferência de calor no interior da carga

Substituindo as variáveis obtém-se:

$$dt = \frac{\rho V c_{\text{carga}}}{\dot{B} V_g \bar{c}_g \eta_f} \frac{d\theta}{\theta} \quad (9.40)$$

Integrando a Expressão 9.40 obtém-se:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{t_{(\text{tempo})} - t_{\text{ext}}}{t_i - t_{\text{ext}}} = \exp \left[- \left(\frac{\dot{B} V_g \bar{c}_g \eta_t}{\rho V c_{\text{carga}}} \right) t \right] \quad (9.41)$$

Onde:

t_i – é a temperatura inicial da carga

t_{ext} – é a temperatura externa da carga

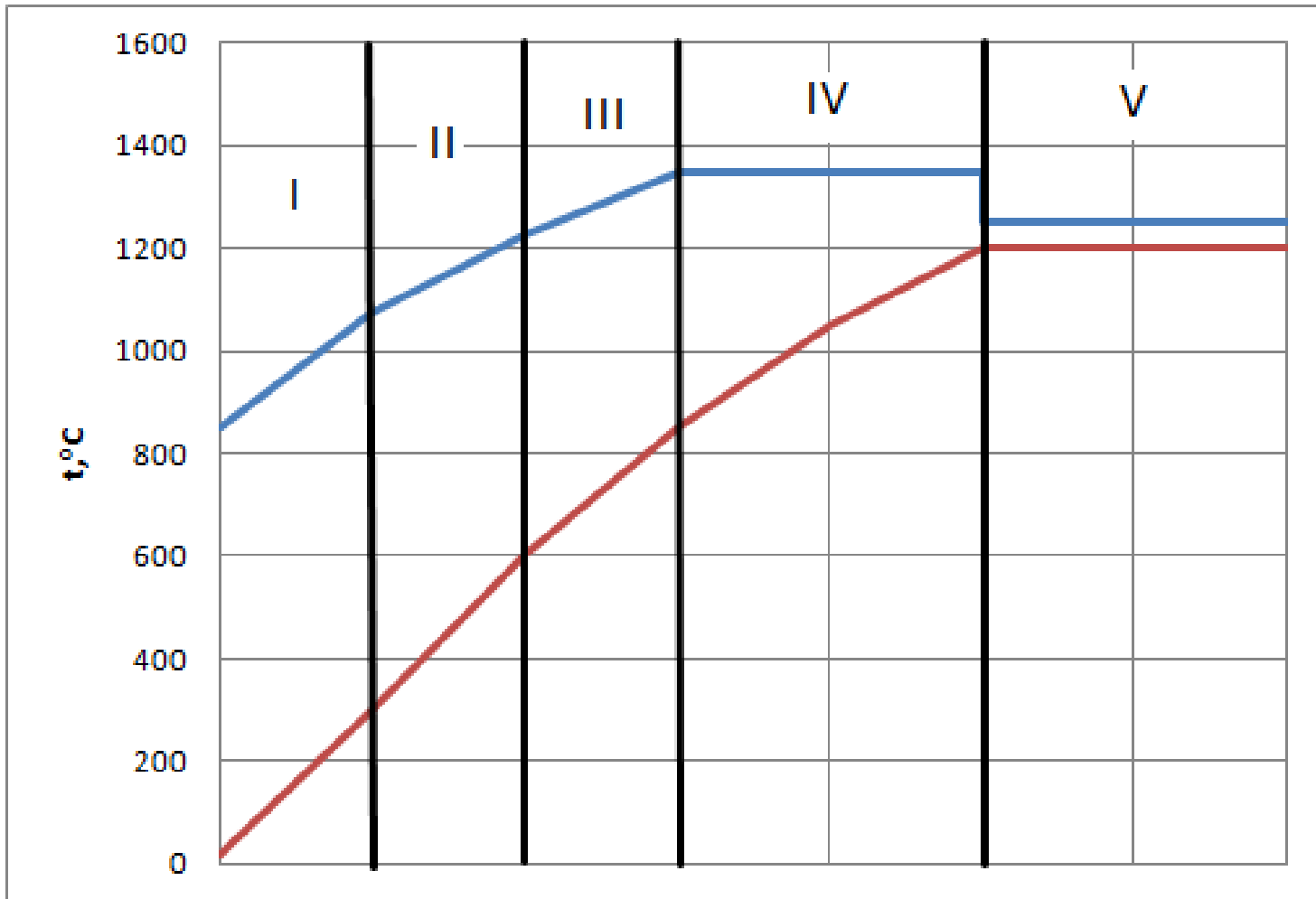
$t_{(\text{tempo})}$ – é a temperatura no interior da carga no instante t

V – é o volume da carga

c_{carga} – é o calor específico da carga

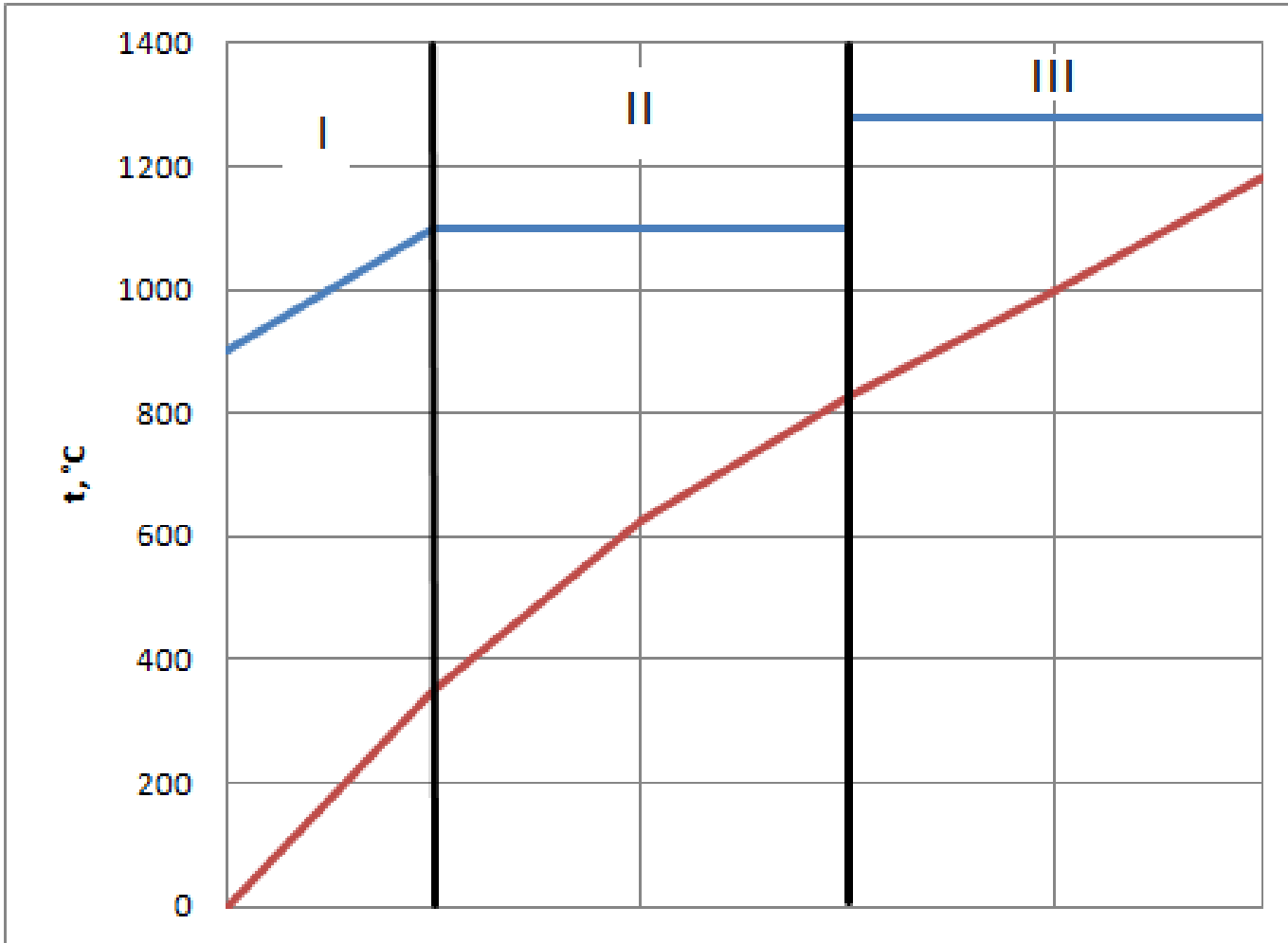


Aquecimento em Fornos de Cinco zonas de aquecimento





Aquecimento em Fornos de Duas zonas de aquecimento



9.5 Convecção como condição de contorno

Em muitas situações práticas os problemas de condução de calor em regime transiente, relacionam-se com uma condição de contorno de convecção na superfície do sólido.

$$hA(T_{\infty} - T)_{x=0} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (9.42)$$

A solução para este caso é:

$$\frac{T - T_i}{T_{\infty} - T_i} = 1 - \operatorname{erf} X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha \tau}{k^2}\right) \right] \left[1 - \operatorname{erf}\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha \tau}}{k}\right) \right] \quad (9.43)$$



Onde:

T_i = temperatura inicial do sólido

T_{∞} = temperatura ambiente

$$X = x / (2\sqrt{\alpha \tau}) \quad \text{e}$$

9.5 Convecção como condição de contorno

O **Módulo de Biot** compara as grandezas relativas das resistências térmicas de convecção na superfície e de condução no interior do corpo.

$$Bi = \frac{\text{Convecção na superfície do corpo}}{\text{Condução através do corpo}}$$

$$\text{Módulo de Biot} = Bi = \frac{hs}{k} \quad (9.44)$$



9.5 Convecção como condição de contorno

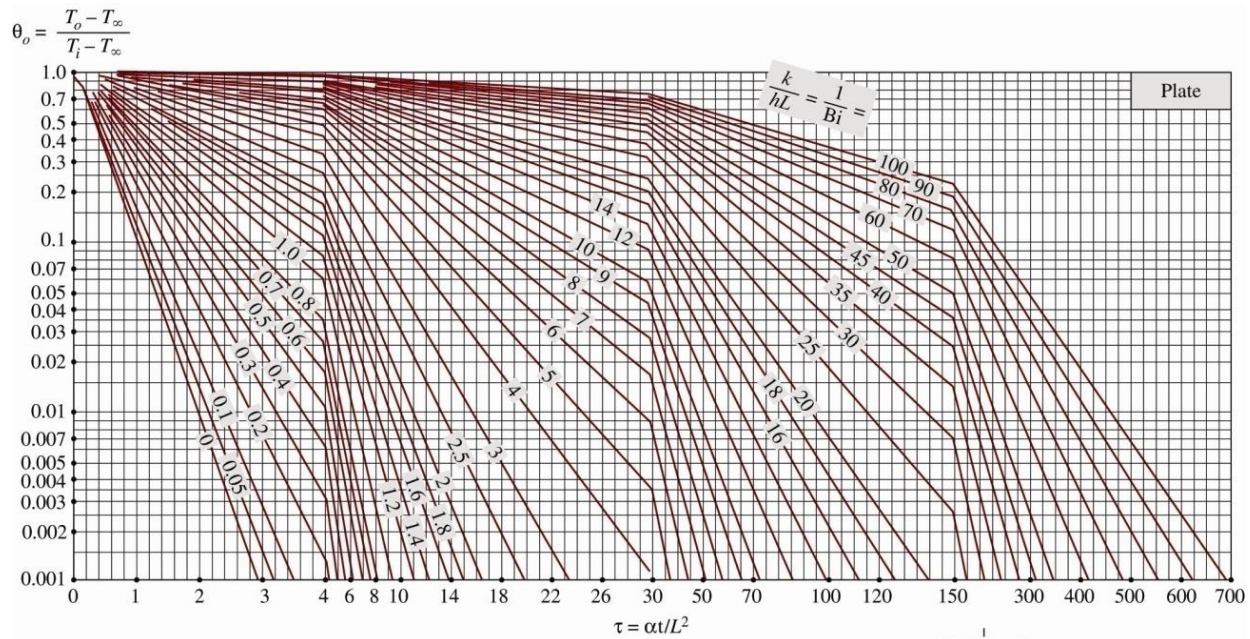
O **Módulo de Fourier** compara uma dimensão característica do corpo com a profundidade de penetração dos efeitos térmicos para um dado tempo t .

$$\text{Módulo de Fourier} = Fo = \frac{\alpha \tau}{s^2} = \frac{kt}{\rho c s^2} \quad (9.45)$$

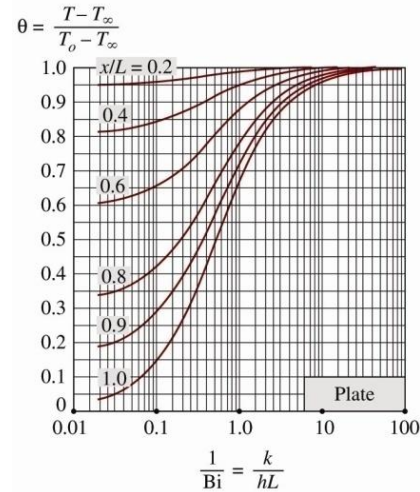
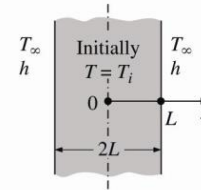
s - representa uma dimensão característica do corpo

Utilizam-se geralmente **Cartas de Heisler** para a determinação das temperaturas mas tem de ser respeitada a condição do valor de módulo de Fourier $(h\tau/s^2) > 0,2$

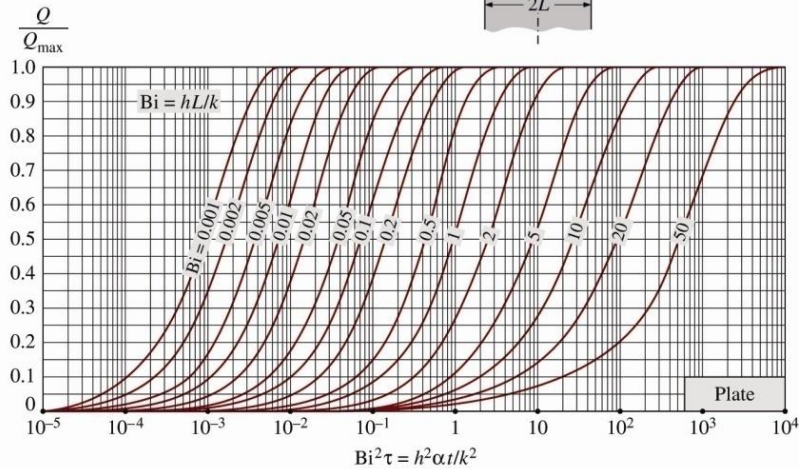




(a) Midplane temperature (from M. P. Heisler)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)

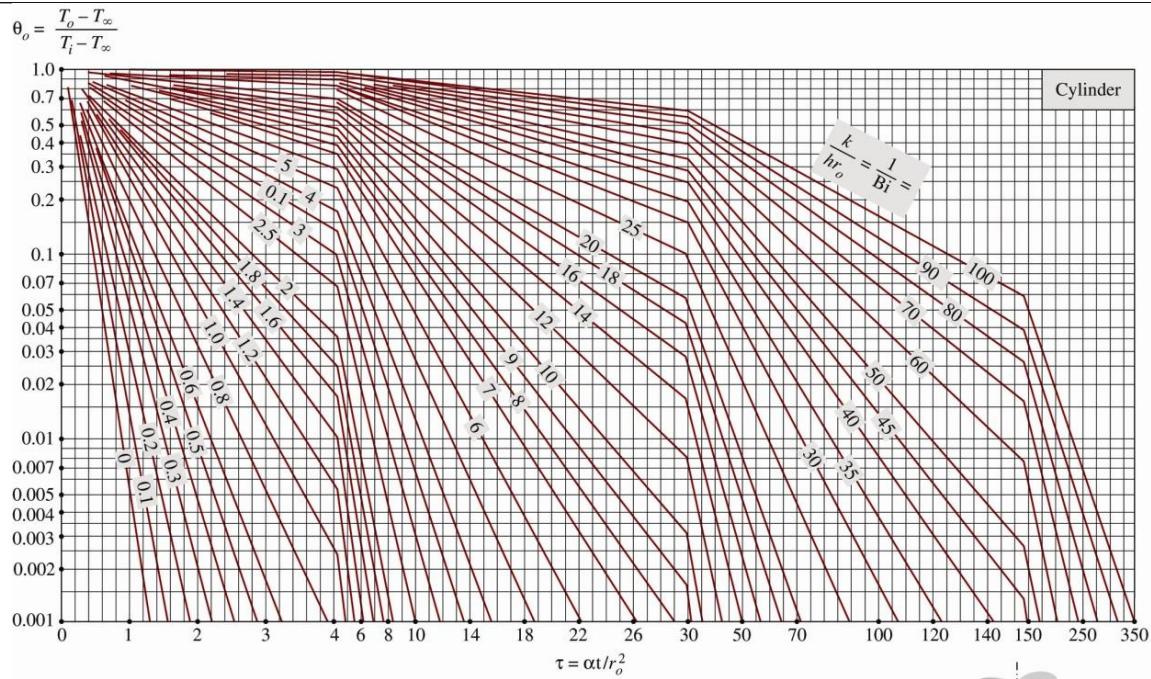


(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

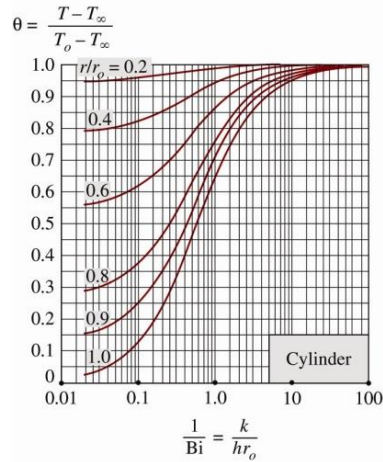
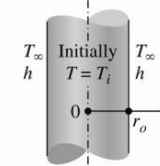


Carta para cilindro longo

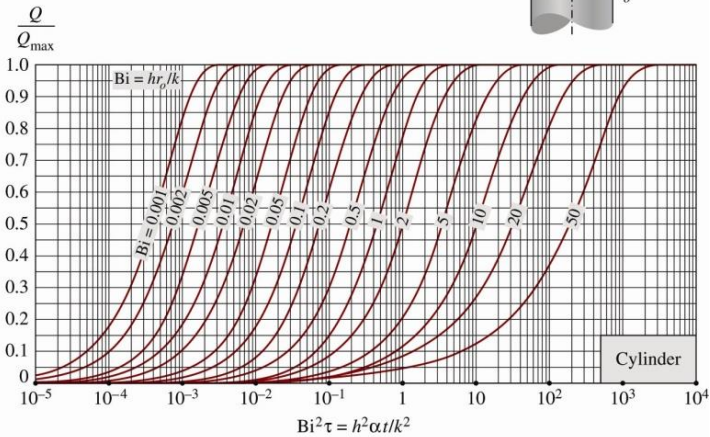
41



(a) Centerline temperature (from M. P. Heisler)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)

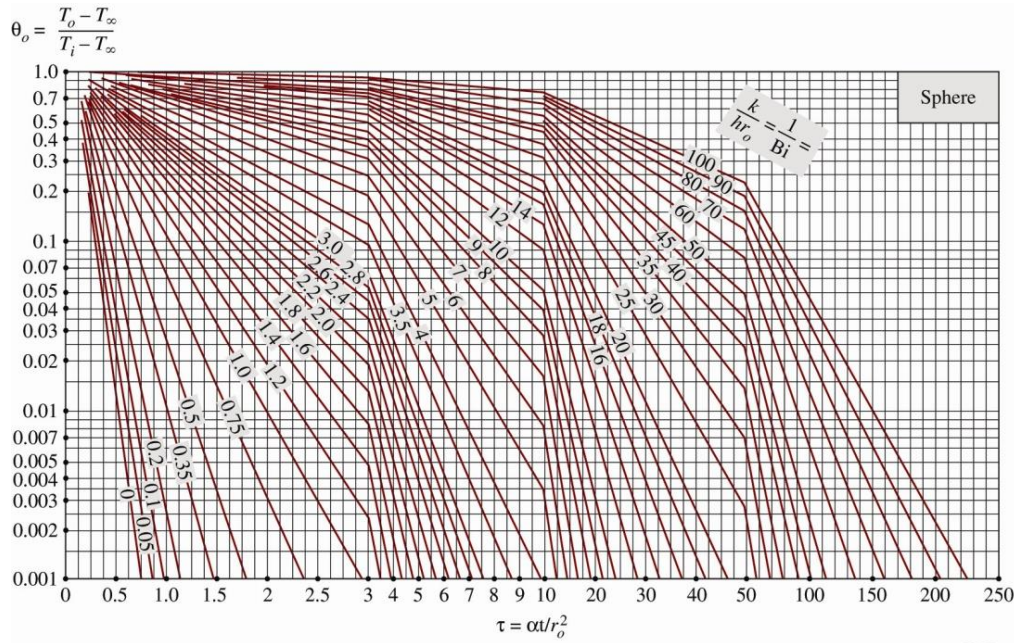


(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

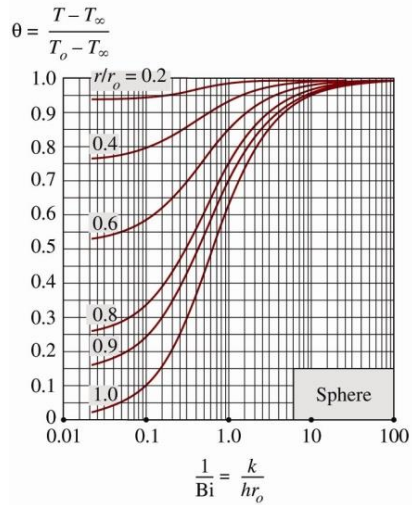
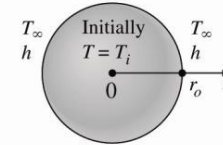


Carta para esfera

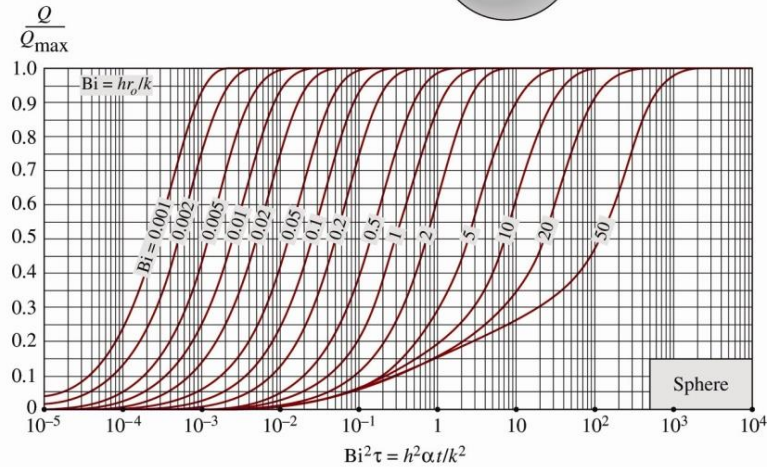
42



(a) Midpoint temperature (from M. P. Heisler)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)



(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)



9.6 Equações de Bessel

O problema de condução de calor transiente unidimensional já descrito, pode ser resolvido com exatidão para qualquer das três geometrias, mas a solução envolve séries infinitas que são de difícil solução. Os termos nas soluções convergem rapidamente com o aumento do tempo e para $t > 0,2$, mantendo o primeiro termo e negligenciando os restantes da série, resulta um erro inferior a 2%. Geralmente o interesse está em soluções para tempos $t > 0,2$, assim é conveniente expressar a solução que usa este único termo como:

9.6 Equações de Bessel

Para uma parede Plana:

$$\theta(x,t)_{\text{Parede}} = \frac{T(x,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0,2 \quad (9.46)$$

Para um Cilindro

$$\theta(x,t)_{\text{Cilindro}} = \frac{T(r,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_o), \quad \tau > 0,2 \quad (9.47)$$

Para uma Esfera



$$\theta(x,t)_{\text{Esfera}} = \frac{T(r,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\text{sen}(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}, \quad \tau > 0,2 \quad (9.48)$$

44

Onde as constantes A_1 e λ_1 são funções só de Biot e os seus valores constam da Tabela 9.1

9.6 Equações de Bessel

A função $J_{(0)}$ é a função de Bessel de ordem zero do primeiro tipo e os seus valores podem ser determinados da Tabela 9.2. É de notar que o $\cos(0)=J_0(0)=1$ e o limite de $\sin(x)/x$ também é 1. Estas relações simplificam as anteriores dando origem às seguintes, para o caso do centro da parede plana, cilindro ou esfera:

Para o centro de uma parede Plana:

$$\theta_{0,Parede} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (9.49)$$

Para o centro de um Cilindro:

$$\theta_{0,Cilindro} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (9.50)$$



9.6 Equações de Bessel

Para o centro de uma esfera:

$$\theta_{0,Esfera} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (9.51)$$

Basta conhecer o número de Biot, as relações acima podem ser usadas para determinar a temperatura de qualquer ponto do corpo. A temperatura do corpo varia desde a temperatura inicial T_i até a temperatura do meio T_∞ que é o fim do processo de condução em regime transiente. Dai, a quantidade máxima de calor que o corpo pode ganhar ou perder, (no caso de $T_i > T_\infty$) é a simples variação da energia que o corpo tinha, e é dada por:

$$Q_{\max} = mc_p (T_\infty - T_i) = \rho V c_p (T_\infty - T_i) \quad (9.52)$$





Tabela 9.1 Coeficientes usados na solução aproximada para o Regime Transiente Unidimensional (I)

Bi	Parede Plana		Cilindro		Esfera	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,1	0,3111	1,0161	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,2	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,3	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,4	0,5932	1,0580	0,8516	1,0931	1,0528	1,1164
0,5	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,1656	1,1441
0,6	0,7051	1,0814	1,0184	1,1345	1,2644	1,1713
0,7	0,7506	1,0918	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,8	0,7910	1,1016	1,1490	1,1724	1,4320	1,2236
0,9	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1,0	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732

Tabela 9.2 Coeficientes usados na solução aproximada para o Regime Transiente Unidimensional (II)

Bi	Parede Plana		Cilindro		Esfera	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
2,0	1,0769	1,1785	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3,0	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4,0	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7202
5,0	1,3138	1,2403	1,9898	1,5029	2,5704	1,7870
6,0	1,3496	1,2479	2,0490	1,5253	2,6537	1,8338
7,0	1,3766	1,2532	2,0937	1,5411	2,7165	1,8673
8,0	1,3978	1,2570	2,1286	1,5526	2,7654	1,8920
9,0	1,4149	1,2598	2,1566	1,5611	2,8044	1,9106
10,0	1,4289	1,2620	2,1795	1,5677	2,8363	1,9249
20,0	1,4961	1,2699	2,2880	1,5919	2,9857	1,9781
30,0	1,5202	1,2717	2,3261	1,5973	3,0372	1,9898
40,0	1,5325	1,2723	2,3455	1,5993	3,0632	1,9942
50,0	1,5400	1,2727	2,3572	1,6002	3,0788	1,9962
100,0	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990
∞	1,5708	1,2732	2,4048	1,6021	3,1416	2,0000



Tabela 9.2 Funções de Bessel de ordem zero e de primeira ordem do primeiro tipo

ξ	$J_0(\xi)$	$J_1(\xi)$
0,0	1,0000	0,0000
0,1	0,9975	0,0499
0,2	0,9900	0,0995
0,3	0,9776	0,1483
0,4	0,9604	0,1960
0,5	0,9385	0,2423
0,6	0,9120	0,2867
0,7	0,8812	0,3290
0,8	0,8463	0,3688
0,9	0,8075	0,4059
1,0	0,7652	0,4400
1,1	0,7196	0,4709
1,2	0,6711	0,4983
1,3	0,6201	0,5220
1,4	0,5669	0,5419

ξ	$J_0(\xi)$	$J_1(\xi)$
1,5	0,5118	0,5579
1,6	0,4554	0,5699
1,7	0,3980	0,5778
1,8	0,3400	0,5815
1,9	0,2818	0,5812
2,0	0,2239	0,5767
2,1	0,1666	0,5683
2,2	0,1104	0,5560
2,3	0,0555	0,5399
2,4	0,0025	0,5202
2,6	-0,0968	-0,4708
2,8	-0,1850	-0,4097
3,0	-0,2601	-0,3391
3,2	-0,3202	-0,2613

