



Optimização

Aula 4



Aula 4. Programação Linear (PL)

- O modelo de Programação Linear.
 - **Forma Padrão (“standard”) e Forma Canónica.**
 - **Conceitos fundamentais.**
 - **Outras formas do modelo:**
 - forma cartesiana
 - forma matricial
 - forma vectorial
- Propriedades fundamentais da Programação Linear:
 - **Redução à Forma Padrão**
 - **Conceitos Fundamentais.**
 - **Teorema Fundamental da PL.**



O Modelo de PL.

Função objetivo

Maximizar (minimizar) $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$

sujeito a:

coluna j

restrições

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1N}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2N}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_2$$

$$\text{linha } i \rightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{iN}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_i$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{Mj}x_j + \dots + a_{MN}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Condições de não} \\ \text{negatividade} \end{array}$$

onde a_{ij} , b_i e c_j ($i=1,2,\dots,M, j=1,2,\dots,N$) são constantes e em cada restrição apenas se verifica uma e só uma das relações $\{ \leq, =, \geq \}$.



Forma Padrão (“standard”).



Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de equações* diz-se que esse modelo está na *forma padrão* (ou “*standard*”).

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$
(**Minimizar**)
sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N = b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0$$



Forma Canónica.



Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de inequações* diz-se que esse modelo está na *forma canónica*.

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$
sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \leq b_2$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \leq b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0$$

Minimizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$
sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \geq b_2$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \geq b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0$$



Operações de Reformulação

I. Qualquer problema de maximização pode converter-se num problema de minimização, pois:

$$\textit{máximo } Z = - \textit{mínimo } (-Z)$$



Operações de Reformulação.

II. Qualquer restrição de desigualdade de tipo “ \leq ” pode ser convertida numa restrição do tipo “ \geq ” multiplicando por (-1) ambos os seus membros.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N \leq b_i$$



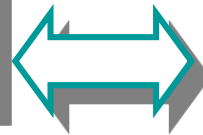
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{iN}x_N \geq -b_i$$



Operações de Reformulação.

III. Qualquer restrição de igualdade pode ser convertida em duas restrições de desigualdades “ \leq ” equivalentes àquela.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N = b_i$$



$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N &\leq b_i \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N &\geq b_i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N &\leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \dots - a_{iN}x_N &\leq -b_i \end{aligned}$$



Operações de Reformulação.

IV. Qualquer restrição de desigualdade pode ser convertida numa restrição de igualdade, através da introdução de uma nova variável (*variável de desvio* ou *folga*) x_{N+1} de valor não negativo.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N \leq b_i$$



$$b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{iN}x_N \geq 0$$



$$x_{N+1} = b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{iN}x_N \geq 0$$



$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N + x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$



Operações de Reformulação.

V. Qualquer *variável livre* x_j , (*não restringida pela condição de não negatividade*) pode ser substituída por um par de variáveis não negativas $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$, fazendo:

$$x_j = x_j' - x_j''$$

e deste modo formulando de novo o problema em função destas duas variáveis.



Conceitos Fundamentais(1).



A função a maximizar (minimizar),

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N,$$

*designa-se por **função objectivo** (f.o).*



As equações (inequações)

*designam-se por **restrições**.*



As desigualdades $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$

*designam-se por **condições de não negatividade**.*



Conceitos Fundamentais(2).



As variáveis x_1, x_2, \dots, x_N ,
designam-se por **variáveis de decisão**.



As constantes a_{ij} ,
designam-se por **coeficientes tecnológicos**.



As constantes b_i ,
designam-se por **termos independentes**.



As constantes c_j ,
designam-se por **coeficientes da função objectivo**.



Conceitos fundamentais(3).



*Qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão (x_1, x_2, \dots, x_N) que satisfaça as restrições do modelo e as condições de não negatividade designa-se por **solução admissível**.*



*O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por **região de admissibilidade**.*



*Uma **solução óptima** maximiza (minimiza) a função objectivo sobre toda a região de admissibilidade.*



Objectivo da PL



O objectivo da PL é determinar de entre as soluções admissíveis, uma que seja a “melhor”, medida pelo valor da função objectivo do modelo. Por “melhor” entende-se o maior ou menor valor, dependendo se o objectivo é maximizar ou minimizar.



Soluções do Problema de PL

- Um problema de PL pode ter:
 - uma única solução óptima
- *ou*
 - múltiplas soluções óptimas (*uma infinidade*)
- *ou*
 - não ter óptimo finito
- *ou*
 - não ter nenhuma solução (*neste caso o problema é impossível*)



Exemplo Protótipo: Formulação

Secção N°	Capacidade utilizada por unidade de produção		Capacidade disponível
	Produto 1	Produto 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro unitário (mil Mt)	3	5	

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeito a

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

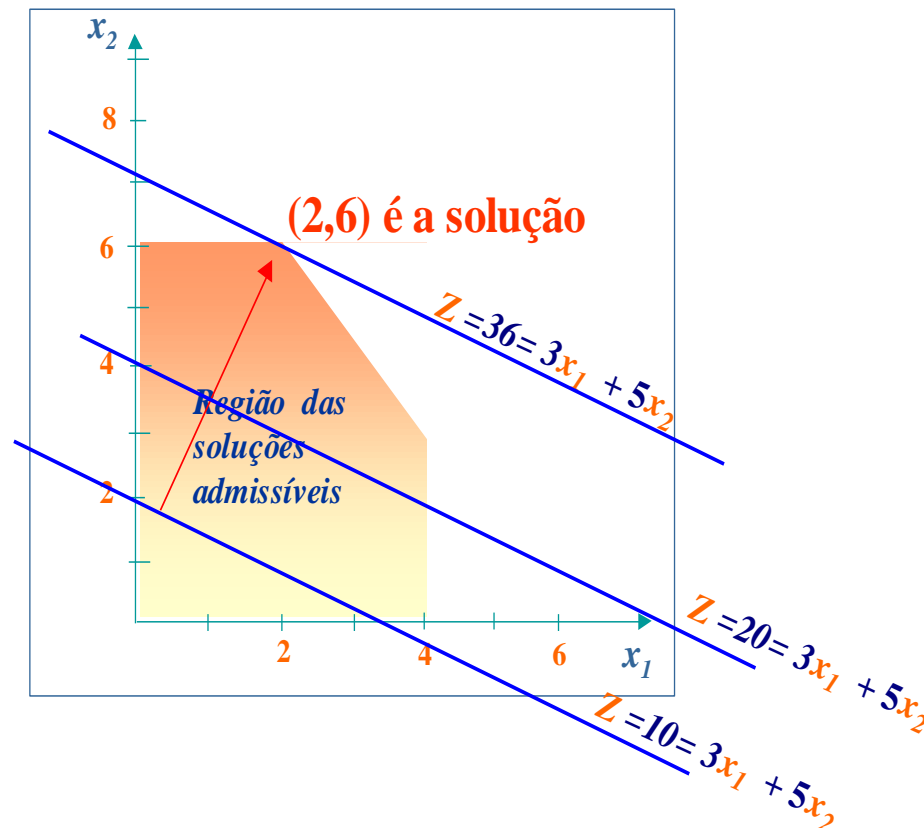
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

x_i – o número de unidades do produto produzidas por minuto, $i = 1, 2$.
 Z – o lucro total por minuto.



Uma Única Solução Óptima

No exemplo protótipo determinamos *uma única solução óptima*:
 $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, onde a *função objectivo* alcança o seu *valor máximo* $Z = 36$.

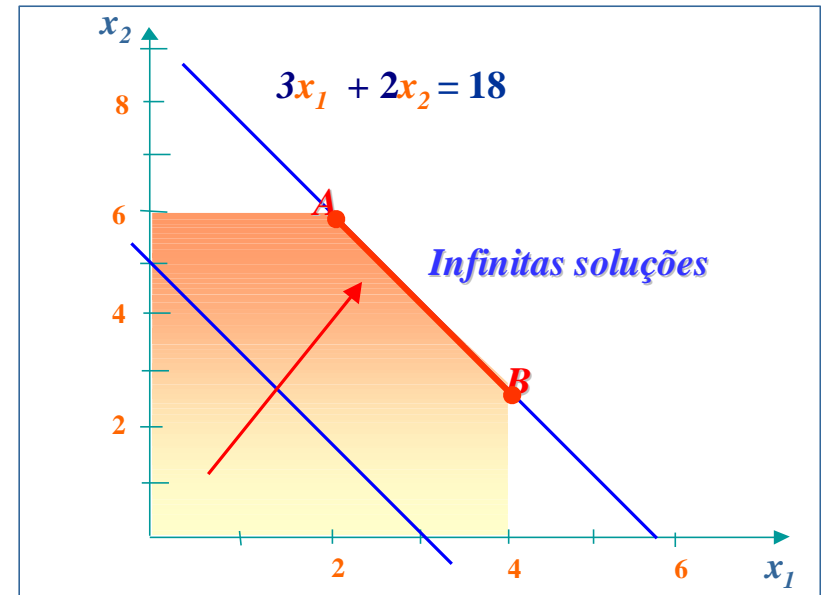




Múltiplas Soluções

Se um problema de PL tem soluções óptimas múltiplas então tem um número infinito delas.

No exemplo protótipo mudámos o lucro unitário do *produto 2* de 5 para 2 Mts, i.e., a função objectivo é agora a recta $Z=3x_1+2x_2$ (a f.o. tem o mesmo gradiente da recta da 3ª restrição $3x_1+2x_2=18$). Todos os pontos (uma infinidade) do segmento de recta AB, são soluções óptimas, pois todas alcançam o melhor valor da f.o.: $z=18$.



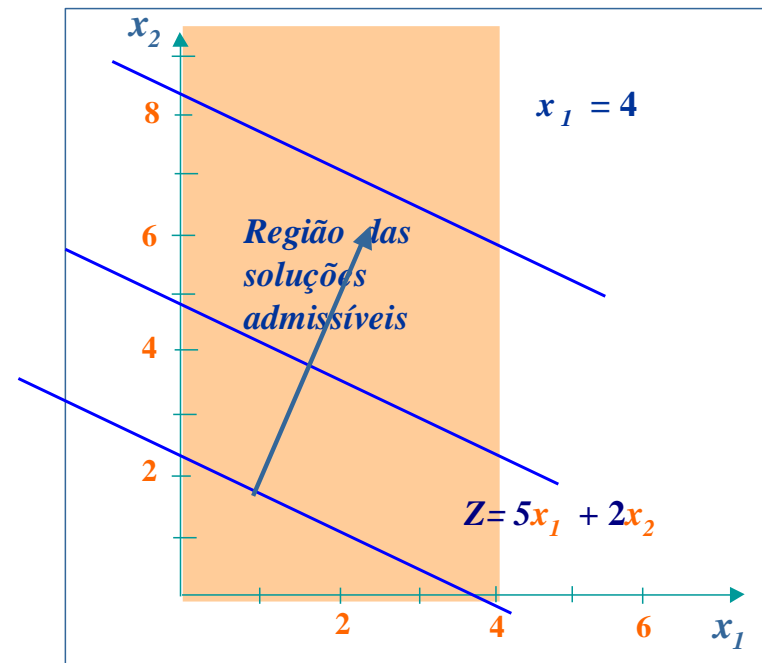


O Problema não tem Óptimo Finito.

Se as restrições não evitarem o crescimento indefinido do valor da função objectivo Z , no sentido favorável (positivo ou negativo) então *o problema não tem óptimo finito*.

No exemplo protótipo, eliminando as restrições:

$2x_2 \leq 12$, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, a região de admissibilidade fica não limitada e o valor da função objectivo pode crescer *indefinidamente* nesta região.





O problema é Impossível

Se não existirem soluções admissíveis (o conjunto de soluções admissíveis é vazio), então o problema não tem nenhuma solução, *o problema é impossível.*



Outras formas do modelo. 1º. Forma Cartesiana.

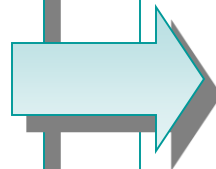
Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$
sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \leq b_2$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \leq b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0$$



$$\text{Maximizar } Z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$



Outras formas do modelo. 2º. Forma Matricial.

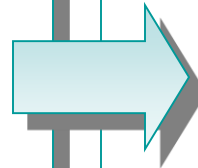
Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$
sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \leq b_2$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \leq b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0$$



$$\text{Maximizar } Z = c' X$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_N]', X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$$

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_M]',$$

$$A = [a_{ij}]_{(M \times N)}, 0 = [0, 0, \dots, 0]'$$



Outras formas do Modelo. 3º. Forma Vectorial

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$

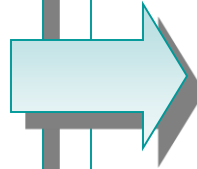
sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \leq b_2$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \leq b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0$$



Maximizar $Z = c'X$

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_N P_N \leq P_0$$

$$x_j \geq 0$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_N]', X = [x_1, x_2, \dots, x_N]'$$

$$P_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{Mj}]' \quad P_0 = [b_1, b_2, \dots, b_M]'$$



Redução à Forma Padrão (1)

O primeiro passo para a resolução de um problema de PL consiste na sua *redução à **Forma Padrão***. Para isto é preciso *converter as restrições funcionais de desigualdade em restrições equivalentes de igualdade*.

uma *restrição de desigualdade* de tipo “ \leq ” pode ser convertida numa *restrição de igualdade* adicionando uma nova variável **não negativa** (*variável de desvio ou folga*) x_{N+1} :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N \leq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N + x_{N+1} = b_i$$
$$x_{N+1} \geq 0$$



Redução à Forma Padrão (2)

uma *restrição de desigualdade* de tipo “ \geq ” pode ser convertida numa *restrição de igualdade* subtraindo uma nova variável não negativa (*variável de desvio ou folga*) x_{N+1} :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N \geq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N - x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$



Exemplo Protótipo. Redução à Forma Padrão.

Restrição de
desigualdade

Variável de
folga

Restrição de
igualdade

1^a

$$x_1 \leq 4$$

$$x_3$$

$$x_1 + x_3 = 4$$

2^a

$$2x_2 \leq 12$$

$$x_4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

3^a

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_5$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$



Exemplo Protótipo. Redução à Forma Padrão.

As variáveis de folga têm coeficientes nulos na f.o.

Forma Canónica

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Forma Padrão

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



A introdução destes conceitos são necessários para a compreensão do método Simplex.

Conceitos Fundam

- Suponha-se que:
 - m - número de restrições funcionais,
 - n - número total de variáveis (*de decisão e de folga*);
 - $b_i \geq 0$, ($i=1,2,\dots,m$) - em caso contrário multiplicar por (-1)
 - o problema de PL se encontra na forma padrão:

$$\text{Maximizar } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (4.1)$$

sujeito a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \quad (4.2)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

...

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n \geq 0 \quad (m \leq n) \quad (4.3)$$



Conceitos Fundamentais



Qualquer conjunto de valores para as variáveis (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaça as restrições do modelo, i.e, que seja uma solução do sistema de equações lineares (4.2)

*designa-se por **solução**.*



*Uma **solução admissível** é uma solução $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X \in \mathcal{R}^n$, que também verifica as condições de não negatividade (4.3), i.e., todos os seus valores são não negativos.*



*O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por **região de admissibilidade**.*



*Uma **solução óptima** maximiza (minimiza) a função objectivo sobre toda a região de admissibilidade.*



Como determinar uma solução do problema de PL na forma Padrão?

$$\text{Maximizar } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (4.1)$$

sujeito a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \quad (4.2)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n \geq 0 \quad (m \leq n) \quad (4.3)$$

$c(A)$ - característica de uma matriz $A_{m \times n}$ que corresponde ao número máximo de colunas de A linearmente independentes

Para determinar uma solução do problema de PL é preciso resolver o sistema de equações lineares (4.2). Este sistema é constituído por m equações e n incógnitas, Suponha que a característica da matriz do sistema é igual a m , $c(A)=m$, e que $m \leq n$. Este sistema tem uma *infinitude de soluções*, tratando-se portanto dum sistema *possível e indeterminado de grau $n-m$* . Isto significa que podemos exprimir m variáveis em função das $n-m$ restantes.



Exemplo Protótipo. Resolução do Sistema de Equações Lineares.

O sistema de equações lineares é constituído por **3 equações** e **5 incógnitas**, onde $3 \leq 5$. A característica $c(A)=3$.

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$
sujeito a

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & + x_3 & = & 4 \\ & 2x_2 & + x_4 & = & 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & & + x_5 & = & 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 & & \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Este sistema tem uma **infinitude de soluções**, tratando-se portanto dum **sistema possível e indeterminado de grau $5-3=2$** , o que significa que podemos exprimir **3 variáveis** em **função das restantes 2**.



Resolução do sistema de equações lineares pelo Método Gauss-Jordan.

I- Reduzir 3 colunas de A a uma matriz identidade I.

$$\begin{array}{l} \text{L1} \rightarrow \\ \text{L2} \rightarrow \\ \text{L3} \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_o} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array} \right)$$

1º: $\text{L2} / 2$

2º: $\text{L1} \times (-3) + \text{L3}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_o} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

3º:

$\text{L2} \times (-2) + \text{L3}$



$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_o} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

4º: $\text{L3} / -3$



$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_o} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \end{array} \right)$$

5º: $\text{L1} - \text{L3}$



$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_o} \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \end{array} \right)$$

Ficam reduzidas as colunas $\{P_1, P_2, P_3\}$ a uma matriz identidade I.



Resolução do sistema de equações lineares pelo Método Gauss-Jordan.

II- Atribuindo valores arbitrários a x_4 e x_5 , as variáveis x_1, x_2, x_3 podem ser expressas em função de x_4 e x_5 .

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1/3 & 1/3 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1/2 & 0 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1/3 & -1/3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Infinitude de soluções}}$$

$$x_4 = \lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_5 = \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = 2 + 1/3 \lambda_1 - 1/3 \lambda_2$$

$$x_2 = 6 - 1/2 \lambda_1$$

$$x_3 = 2 - 1/3 \lambda_1 + 1/3 \lambda_2$$

Obviamente, quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, uma solução seria: $x_1=2, x_2=6, x_3=2, x_4=0, x_5=0$, i.e., $X=(2, 6, 2, 0, 0)$.



Base do Sistema. Variáveis básicas e não básicas.



Se uma submatriz $B_{m \times m}$ da matriz A do sistema de equações correspondente às restrições (4.2) é não singular, i.e., o determinante de $B_{m \times m}$ é não nulo,

*então $B_{m \times m}$ designa-se por **base**.*



*As m variáveis x_1, x_2, \dots, x_m , correspondentes às colunas de $B_{m \times m}$, designam-se por **variáveis básicas** e as restantes $n-m$ variáveis $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$*

*designam-se por **variáveis não básicas**.*



Solução Básica e Solução Básica Admissível.

Sem perda de generalidade, suponha que a **base** B é composta pelas m primeiras colunas, i.e., $B = \{ P_1, P_2, \dots, P_m \}$

como o determinante de B é não nulo (pela definição de base), o sistema de equações $BX_B = b$ tem solução única



Obtém-se uma **solução básica** para o sistema (4.2) atribuindo o valor 0 às **$n-m$ variáveis não básicas** $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, e determinando uma solução para as restantes **m variáveis básicas** x_1, x_2, \dots, x_m , i.e., $X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, onde $X_B = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ é a única solução do sistema $B X_B = b$.



Se todas as variáveis básicas da solução básica $X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ são **não negativas** então X é uma **solução básica admissível (SBA)**.



Solução Básica Degenerada.

Suponha-se $X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ uma solução básica para o sistema (4.2) com as correspondentes variáveis básicas x_1, x_2, \dots, x_m .



*Se alguma variável básica x_1, x_2, \dots, x_m for igual a zero,
a solução básica designa-se por
solução básica degenerada.*



*Se todas as variáveis básicas são **não nulas**
a solução básica designa-se por
solução básica não degenerada.*



Exemplo Protótipo: Base, SBA.

• A matriz B composta pelas colunas $B = \{ P_3, P_4, P_5 \}$ é uma base do sistema. O determinante de B é não nulo, pelo que o sistema de equações $BX_B = b$ tem solução única.

$$\begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_6 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 12 \\ 3 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 18 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow[\text{resolvendo } BX_B=b]{\text{ }} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_B \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_6 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{array} \right] \end{array}$$

Obviamente $x_3=4, x_4=12, x_5=18$ é a única solução deste sistema.

$X = (0, 0, 4, 12, 18)$ é uma solução básica admissível (SBA) correspondente a esta base.
 $x_3=4, x_4=12, x_5=18$ são variáveis básicas e $x_1=0, x_2=0$ são variáveis não básicas.



Quantas soluções básicas tem um problema de PL?

Matriz das restrições do exemplo Protótipo

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O número de *soluções básicas* é igual ao número de matrizes 3x3 que podem ser extraídas da matriz A com determinante não nulo

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = 10$$

Existem 10 submatrizes candidatas a bases:

$$B_1 = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$

$$B_2 = \{ P_1, P_3, P_4 \}$$

$$B_3 = \{ P_1, P_4, P_5 \}$$

$$B_4 = \{ P_1, P_2, P_4 \}$$

$$B_5 = \{ P_1, P_2, P_5 \}$$

$$B_6 = \{ P_1, P_3, P_5 \} \rightarrow \text{determinante nulo}$$

$$B_7 = \{ P_2, P_3, P_4 \}$$

$$B_8 = \{ P_2, P_3, P_5 \}$$

$$B_9 = \{ P_2, P_4, P_5 \} \rightarrow \text{determinante nulo}$$

$$B_{10} = \{ P_3, P_4, P_5 \}$$



Exemplo Protótipo: Matrizes com determinante nulo.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_4=0]{x_2=0} \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \mathbf{B}_6 | = 0$$

○ *determinante de \mathbf{B}_6 é nulo \Rightarrow B não é base \Rightarrow o sistema é indeterminado*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_3=0]{x_1=0} \mathbf{B}_9 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \mathbf{B}_9 | = 0$$

○ *determinante de \mathbf{B}_9 é nulo \Rightarrow B não é base \Rightarrow o sistema é indeterminado*



Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_2=0]{x_1=0} B_{10} = \begin{pmatrix} P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_{10}) \text{ não nulo} \Rightarrow SBA \ X = (0, 0, 4, 12, 18)$

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_4=0} B_1 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_1) \text{ não nulo} \Rightarrow SBA \ X = (2, 6, 2, 0, 0)$



Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_3=0} B_4 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_4) \text{ não nulo} \Rightarrow SBA \ X = (4, 3, 0, 6, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_3=0]{x_2=0} B_3 = \begin{pmatrix} P_1 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_3) \text{ não nulo} \Rightarrow SBA \ X = (4, 0, 0, 12, 6)$



Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_4=0]{x_1=0} B_8 = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$X_B = B^{-1} P_0$

$$Det(B_8) \text{ não nulo} \Rightarrow SBA \ X = (0, 6, 4, 0, 6)$$



Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA).

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ 3 & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_1=0} B_7 = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_7)$ não nulo, $x_4 < 0 \Rightarrow SBNA$ $X = (0, 9, 4, \mathbf{-6}, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{3} & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_2=0} B_2 = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_2)$ não nulo, $x_3 < 0 \Rightarrow SBNA$ $X = (6, 0, \mathbf{-2}, 12, 0)$



Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA).

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_4=0]{x_3=0} B_5 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

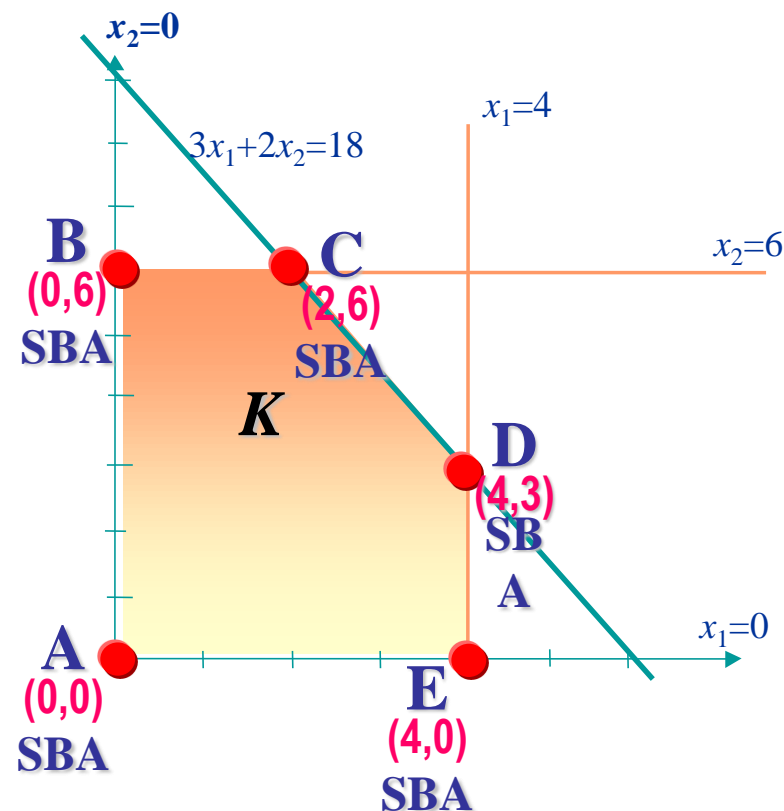
$Det(B_5)$ não nulo, $x_5 < 0 \Rightarrow SBNA$ $X = (4, 6, 0, 0, -6)$



Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis (SBA).

Existem 5 SBA que correspondem a 5 pontos extremos de K .

Pontos Extr.	SBA	Base
A=(0,0)	X=(0,0,4,12,18)	B={P₃, P₄, P₅}
B=(0,6)	X=(0,6,4,0,6)	B={P₂, P₃, P₅}
C=(2,6)	X=(2,6,2,0,0)	B={P₁, P₂, P₃}
D=(4,3)	X=(4,3,0,6,0)	B={P₁, P₂, P₄}
E=(4,0)	X=(4,0,0,12,6)	B={P₁, P₄, P₅}

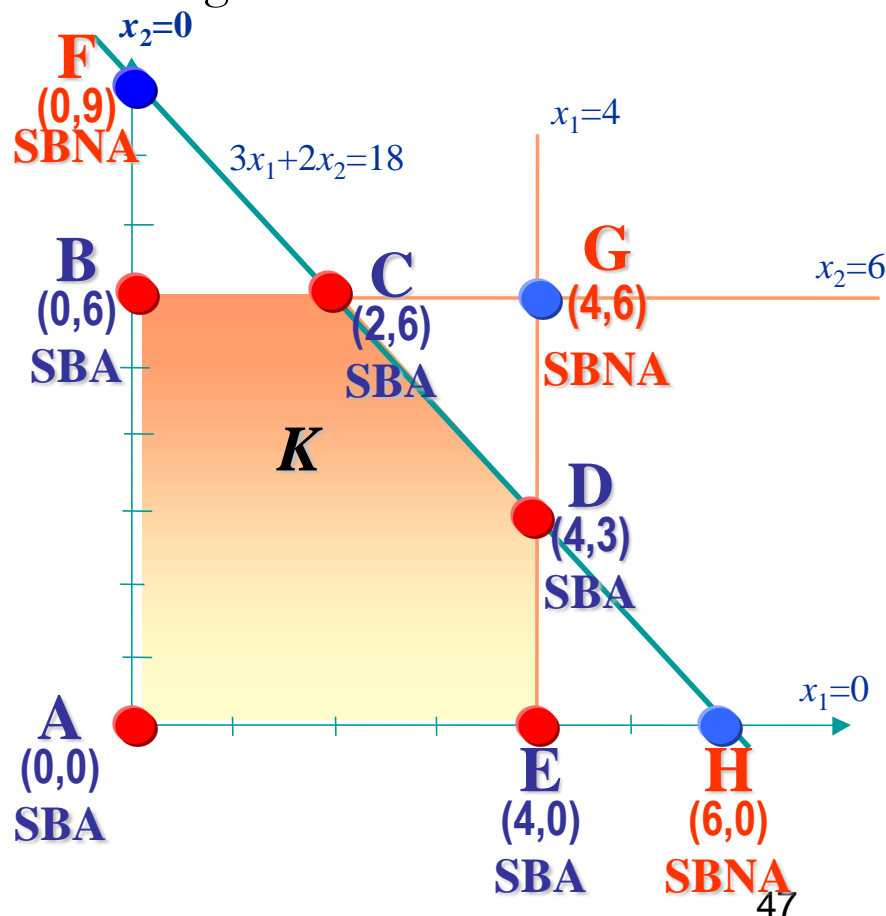




Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA)

Existem 3 SBNA que correspondem àqueles pontos onde se intersectam pelo menos duas restrições e que ficam fora da região de admissibilidade.

	SBNA	Base
F=(0,9)	X=(0,9,4,-6,0)	B={P₂, P₃, P₄}
G=(4,6)	X=(4,6,0,0,-6)	B={ P₁, P₂, P₅ }
H=(6,0)	X=(6,0,-2,12,0)	B={ P₁, P₃, P₄ }





Teorema Fundamental da PL.

Se existe uma solução admissível do problema de PL definido pelas expressões (4.1), (4.2) e (4.3), então existe uma solução básica admissível, e se existe uma solução óptima admissível então existe uma solução óptima básica admissível.



Número de Soluções Básicas.

- Do *teorema fundamental da PL* conclui-se que não é necessário *procurar a solução ótima* entre todas as soluções admissíveis, mas apenas entre as *soluções básicas admissíveis*.
- O *número máximo* destas *soluções básicas* para um problema com m restrições e n variáveis, é dado pelo número de possíveis combinações de m números que podem ser obtidas usando n números:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

A solução ótima poderia ser encontrada pela experimentação de todas as soluções básicas admissíveis, porém este método é tremendamente ineficaz.



Conclusões



A Programação Linear procura :

1. Desenvolver um método que permita passar de *uma solução básica admissível* para uma *outra solução básica admissível* que corresponda a um **melhor** valor da *função objectivo*;
2. Dispor de um *critério* que permita saber quando se *alcançou a solução óptima* sem necessidade de experimentar todas *as soluções básicas*.