



# Optimização

## Aula 5



# Programação Linear (PL)

- **Aula 5:**
- O Método Simplex.
- Algoritmo Primal Simplex.



# Algoritmo.



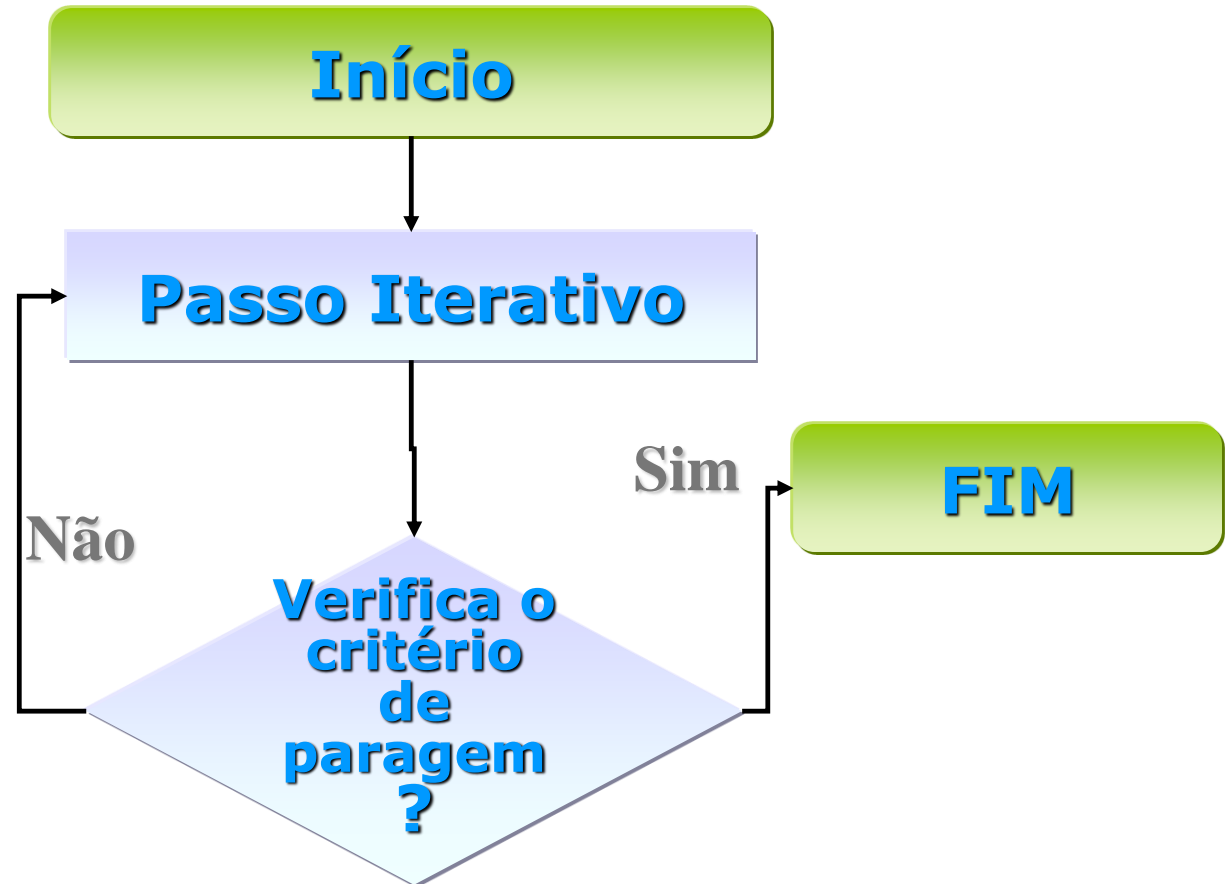
O que é um *algoritmo*?

Qualquer procedimento iterativo e finito de solução é um *algoritmo*.

Um *algoritmo* é um processo que *repete* (*itera*) sucessivas vezes um procedimento sistemático até obter um resultado. Além disso, também inclui um *procedimento para iniciar* e um *critério para terminar*.



## Estrutura de um algoritmo.





## Método Simplex.



O que é o método *Simplex*?



O método *Simplex* é um *algoritmo* que permite resolver problemas de Programação Linear.



A ideia básica do método *Simplex* consiste em resolver repetidas vezes um sistema de equações lineares para obter uma sucessão de SBA, cada uma "melhor" do que a anterior, até se chegar a uma SBA óptima.



a *variável não básica* que entra é substituída pela *variável básica* que sai.



## Soluções Básicas Adjacentes.



*Duas soluções básicas que apenas diferem numa variável básica designam-se por **soluções básicas adjacentes**.*

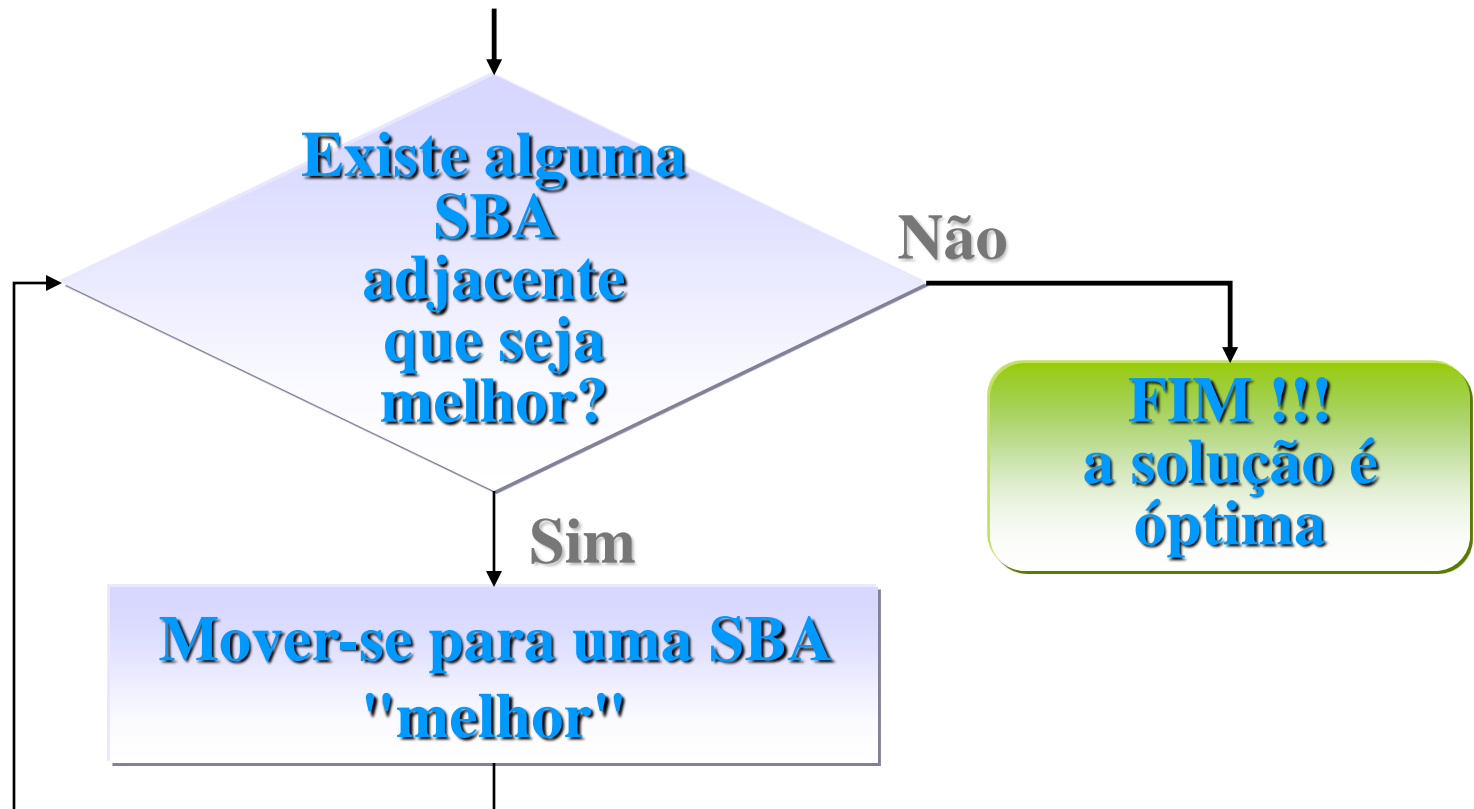


*Uma SBA é **óptima** quando nenhuma das SBA adjacentes é “melhor”, i.e., nenhuma melhora o valor da função objectivo.*

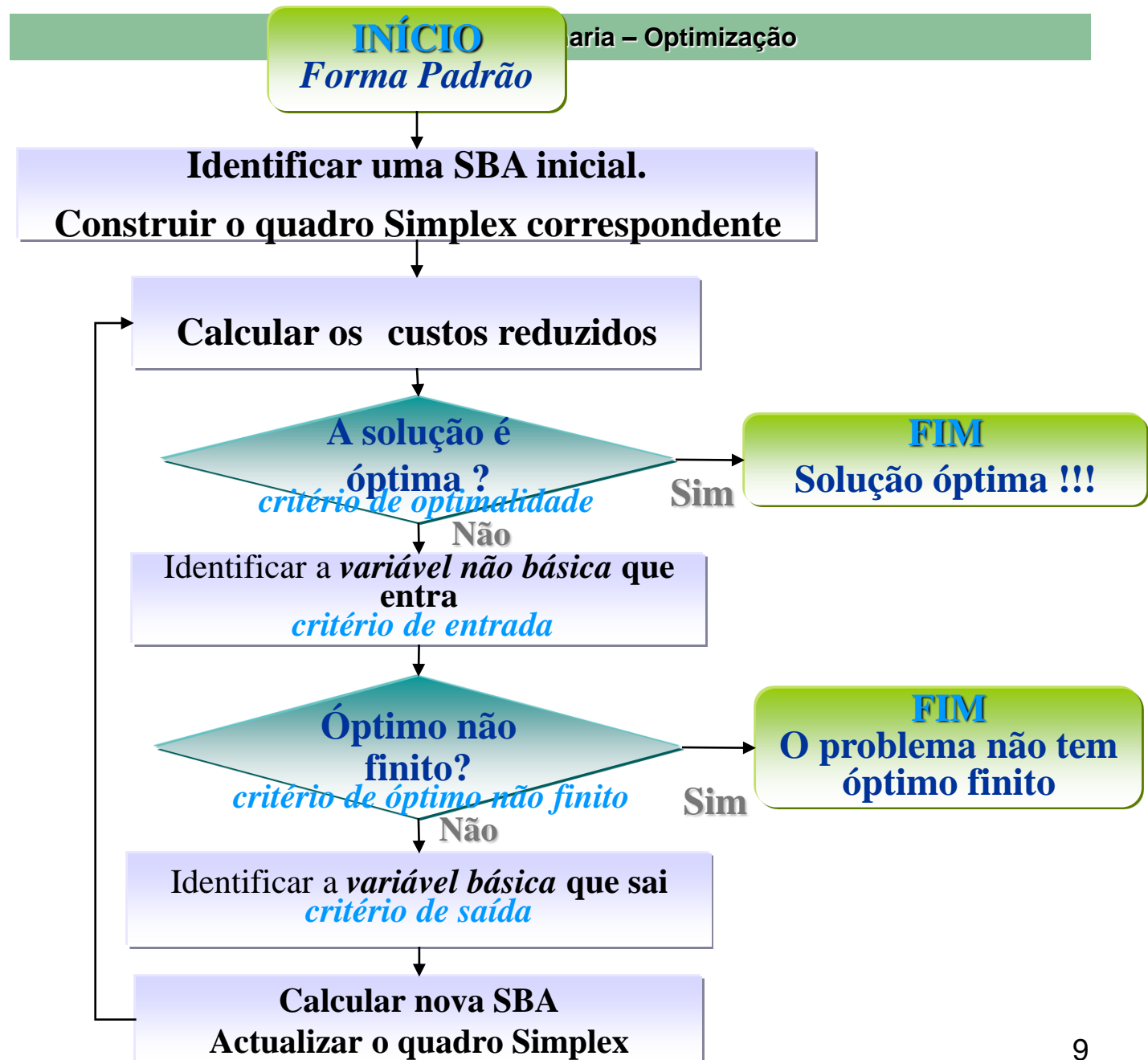


# Algoritmo Primal Simplex: Fluxograma

**Identificar uma SBA inicial**









## Inicialização: Redução à Forma Padrão. Exemplo Protótipo.

**Restrição de  
desigualdade**

**Variável de  
folga**

**Restrição de  
igualdade**

**1<sup>a</sup>**

$$x_1 \leq 4$$

$$x_3$$

$$x_1 + x_3 = 4$$

**2<sup>a</sup>**

$$2x_2 \leq 12$$

$$x_4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

**3<sup>a</sup>**

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_5$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$



# Inicialização: Redução à Forma Padrão.

## Forma Canónica

*Maximizar*  $Z = 3x_1 + 5x_2$

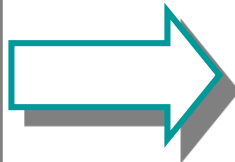
*sujeito a*

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



## Forma Padrão

*Maximizar*  $Z = 3x_1 + 5x_2$

*sujeito a*

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: Passo 1

- Passo 1: Determinar uma SBA inicial  $X^0$ .  
Construir o quadro Simplex correspondente.

$$\begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \left( \begin{array}{cc|ccc|c} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_0 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 12 \\ 3 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 18 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow{\substack{\text{resolvendo} \\ BX_B=b}} \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 & \mathbf{X} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & x_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & x_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & x_5 \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \mathbf{P}_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{array} \right) \end{array}$$

*variáveis básicas*

*variáveis não básicas*

$x_3, x_4, x_5$

$x_1, x_2$

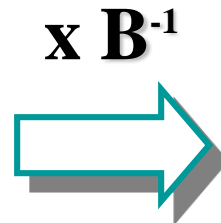
***O ponto extremo  $A=(0,0)$  corresponde à SBA inicial  $X^0=(0,0,4,12,18)$***



## Matriz A & Quadro Simplex.

### Matriz A do problema de PL

$$A = \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} \\ \hline P_1 \dots P_m & P_{m+1} \dots P_n \\ \hline a_{11} \dots a_{1m} & a_{1m+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2m} & a_{2m+1} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mm} & a_{mm+1} \dots a_{mn} \end{array}$$



### Quadro Simplex

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \hline x_1 \dots x_m & x_{m+1} \dots x_n \\ \hline x_{11} \dots x_{1m} & x_{1m+1} \dots x_{1n} \\ x_{21} \dots x_{2m} & x_{2m+1} \dots \\ \vdots & \vdots \\ x_{m1} \dots x_{mn} & x_{mm+1} \dots x_{mn} \end{array}$$

*As colunas do quadro do simplex correspondentes às variáveis de decisão  $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$  correspondem aos vectores  $P_j$  da matriz original multiplicados pela inversa da base  $B$*



# Algoritmo Primal Simplex. Custos reduzidos



Como calcular os custos reduzidos  $c_j - z_j$ ?

$c_j$   
coeficientes da f.o.

$c_j - z_j, \forall j=1,2,n$

$c_i$   
coeficientes das  
variáveis básicas  
na f.o .

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}, j = 1,2,\dots,n$$

$x_{ij}$   
componente  $i$   
da coluna  $j$  do  
quadro simplex



# Algoritmo Primal Simplex.

## Exemplo: 1º quadro, passo 1.

- Início: Construção do 1º QUADRO.

coeficientes das variáveis na f.o.

coeficientes das variáveis básicas na f.o.

valores das variáveis básicas

valor da f.o.

		$c_j$						
			3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
	$x_3$	1	0	1	0	0	4	
	$x_4$	0	2	0	1	0	12	
	$x_5$	3	2	0	0	1	18	
		$z_j$	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5	0	0	0	

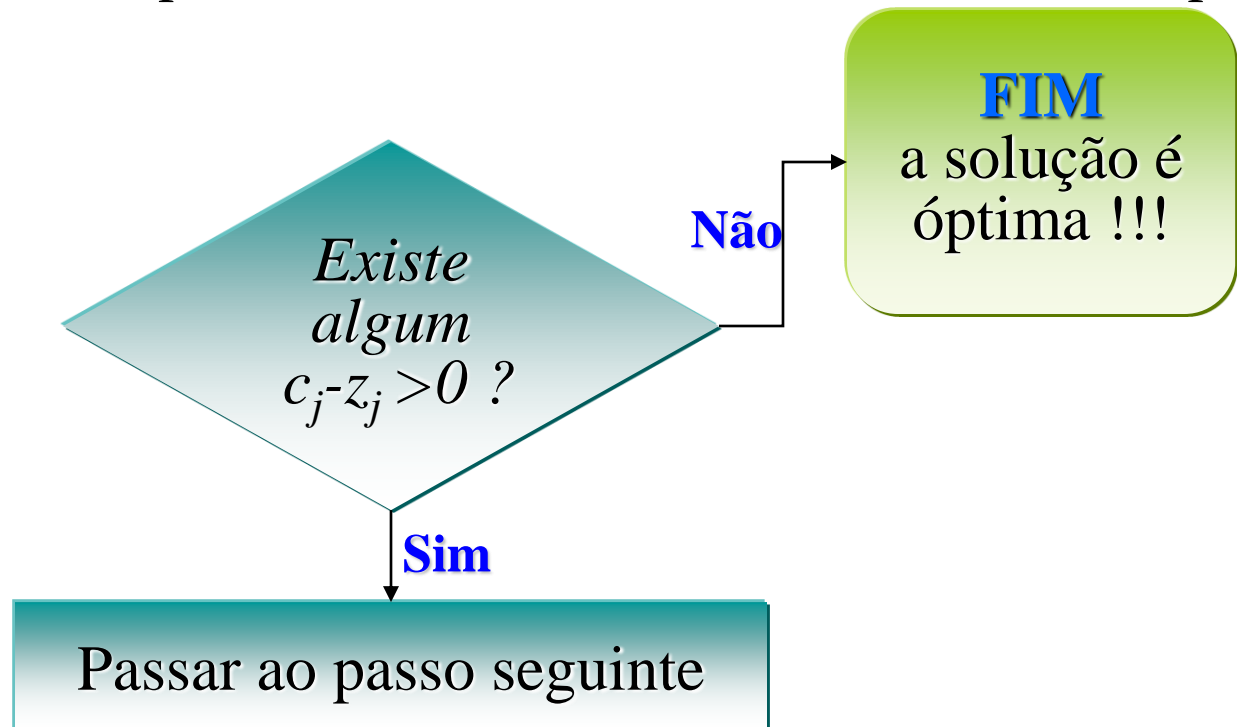
$z_1 = 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 3$   
 $z_2 = 0 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 2$

os custos reduzidos das variáveis básicas são sempre nulos



## Algoritmo Primal Simplex.

- Passo 2: Critério de optimalidade:  
Existe algum custo reduzido positivo?
  - Se *sim*, o processo continua;
  - Se *não*, o processo termina, a SBA é uma solução óptima

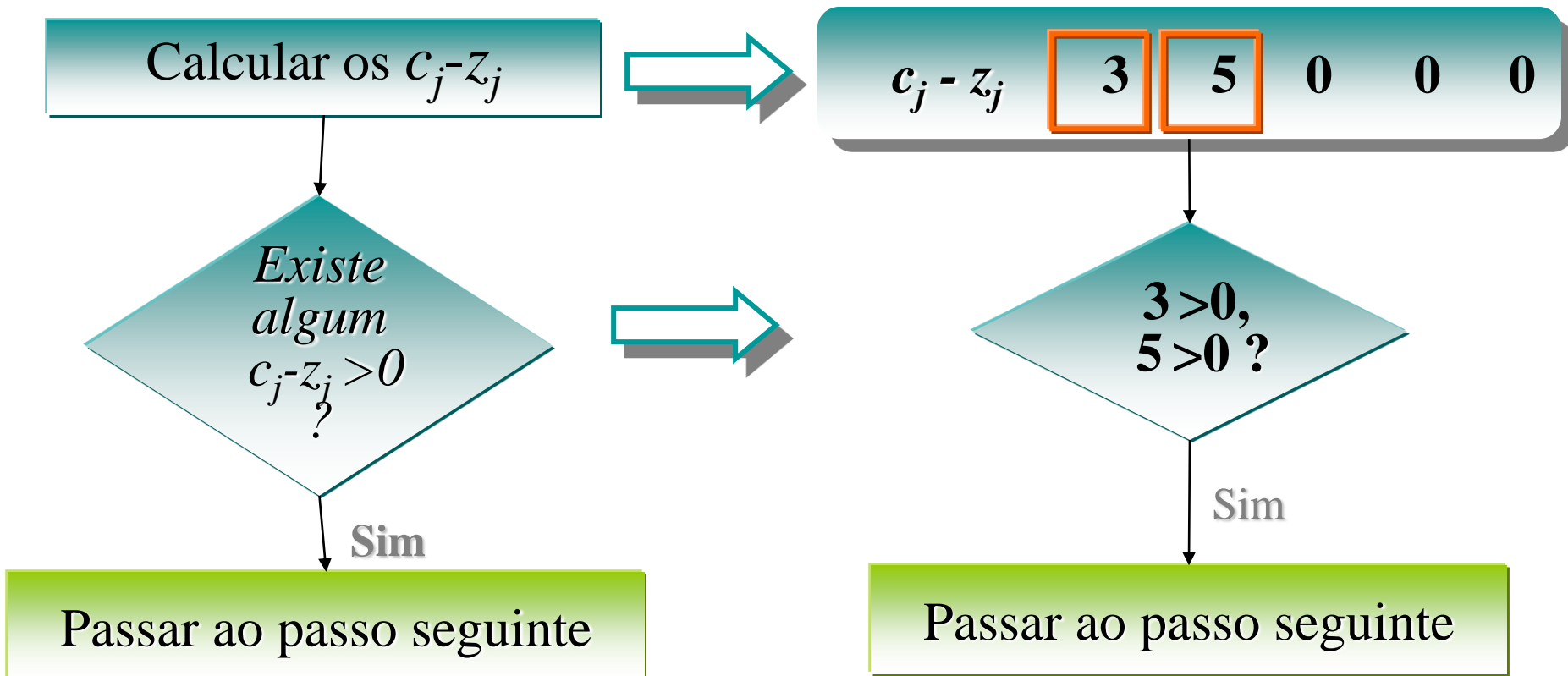






## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 1º quadro, passo 2

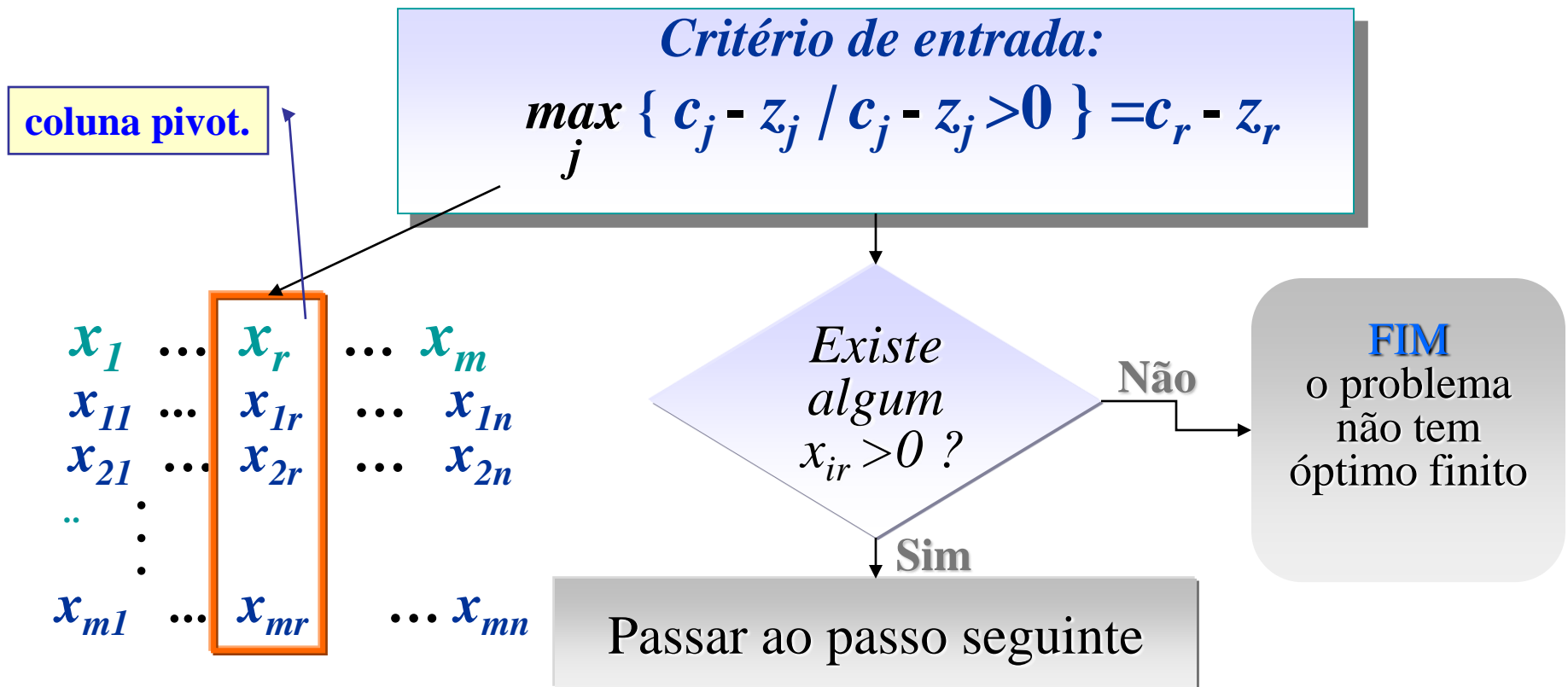
- **Passo 2:** Critério de optimalidade:  
Existe algum custo reduzido positivo?





## Algoritmo Primal Simplex.

- Passo 3: Determinar a variável não básica que *entra*.





# Algoritmo Primal Simplex.

## Exemplo: 1º quadro, passo 3

**Passo 3:** Determinar a variável não básica que *entra*.

a variável que entra:  $x_2$

coluna pivotal

Procura-se melhorar (ou pelo menos não piorar) o valor da f.o. na próxima SBA

$\max \{ c_j - z_j / c_j - z_j > 0 \} = 5$

	$c_j$	3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	1	0	1	0	0	4
0	$x_4$	0	2	0	1	0	12
0	$x_5$	3	2	0	0	1	18
	$z_j$	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	3	5	0	0	0	

19



## Algoritmo Primal Simplex

Procura-se  
manter a  
admissibilidade  
na próxima  
solução básica

Passo 4: Determinar a variável básica que *sai*.

- 1º. Seleccionar os coeficientes  $x_{ir} > 0$
- 2º. Dividir cada coeficiente  $x_{i0}$  da coluna dos termos independentes pelo coeficiente  $x_{ir} > 0$  da coluna pivotal  $r$ .
- 3º. Seleccionar a linha  $s$  onde se alcance o menor dos quocientes (regra do menor quociente):

$x_{11} \dots x_{1r} \dots x_{1n}$   
 $x_{21} \dots x_{2r} \dots x_{2n}$   
 $\vdots$   
 $x_{m1} \dots x_{mr} \dots x_{mn}$

$\bar{b}$   
 $x_{10}$   
 $x_{20}$   
 $\vdots$   
 $x_{m0}$

coluna pivotal.

↗

$$\theta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sr}}$$



## Coluna e linha pivotal. Elemento Pivot.



A *coluna*  $r$  onde se verifica o maior custo reduzido

$$\max_j \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = c_r - z_r > 0$$

designa-se por ***coluna pivotal***



A *linha*  $s$  onde se verifica o mínimo dos quocientes

$$g_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sr}}$$

designa-se por ***linha pivotal***.



O elemento  $x_{sr}$  onde se intersectam a *linha pivot*  $s$  e a *coluna pivot*  $r$   
designa-se por ***pivot***.



# Algoritmo Primal Simplex: Exemplo: 1º quadro, passo 4

- Passo 4: Determinar a variável básica que sai.

linha pivotal: $i = 2$		$c_j$	3	5	0	0	0		coluna pivotal: $j = 2$
$C_B$	$X_B$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
									<i>mínimo</i>
a variável que sai: $x_4$	$x_3$		1	0	1	0	0	4	$12/2 = 6$
	$x_4$		0	2	0	1	0	12	
	$x_5$		3	2	0	0	1	18	$18/2 = 9$
pivot		$z_j$	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5	0	0	0		<i>máximo</i>



## Algoritmo Primal Simplex.

- Passo 5: 1º. Calcular nova SBA.

1ª

*A variável não básica que entra*



$x_r$

2ª

*A variável básica que sai*

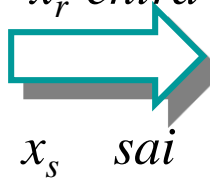


$x_s$

**SBA:**

$(x_1, x_2, x_s, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$

$x_r$  entra



$x_s$  sai

**nova SBA:**

$(x_1, x_2, x_r, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$



## Algoritmo Primal Simplex.

- **Passo 5:**

2º. Construir um novo quadro simplex aplicando o Método de redução Gauss-Jordan.

- Reduzir a 1 o número pivot.  
para isto é preciso dividir toda a linha pivotal pelo pivot.

$$\text{Nova linha pivotal} = \frac{\text{linha pivotal}}{\text{pivot}}$$

- ▶ Reduzir a 0 as outras componentes da coluna pivotal.  
para isto, é preciso calcular todas as linhas (excepto a linha pivotal),  
pela seguinte fórmula:

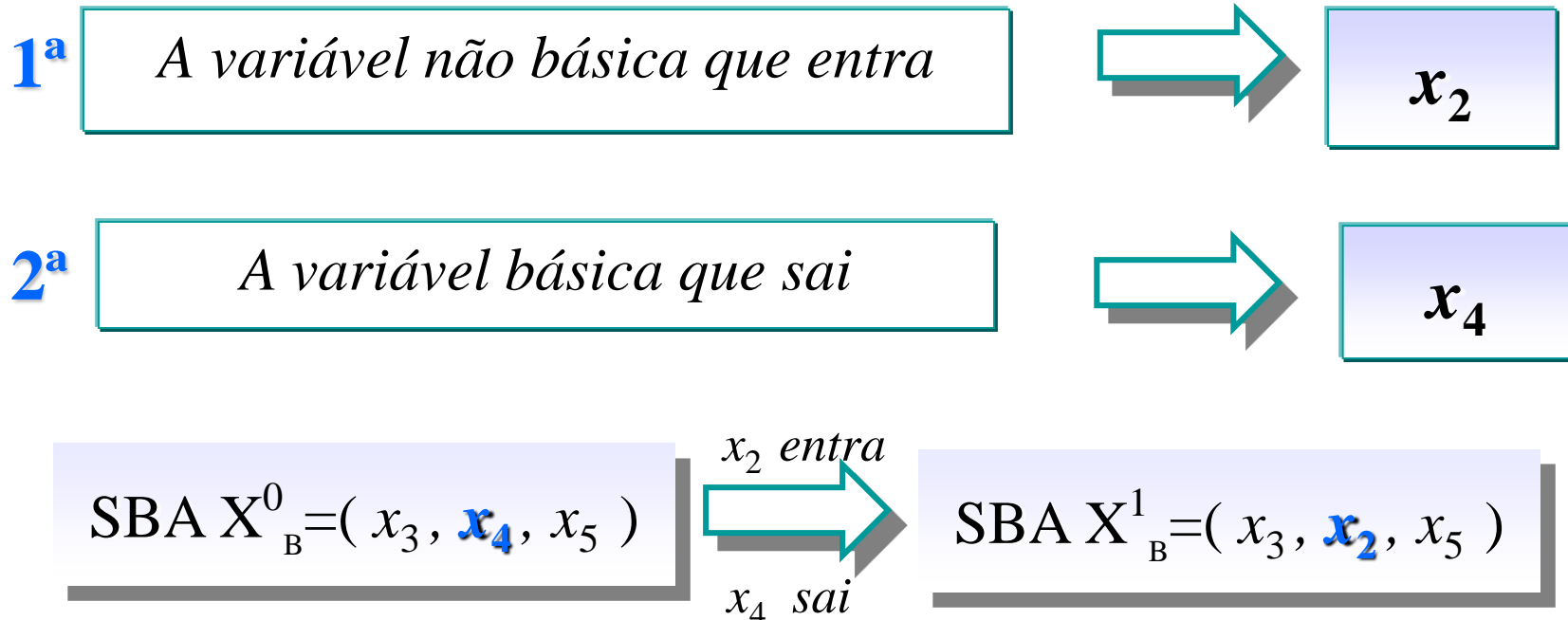
$$\text{nova linha} = \text{linha} - (\text{componente da coluna pivotal} \times \text{nova linha pivotal})$$





## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 1º quadro, passo 5

- **Passo 5:** Calcular a nova SBA  $X^1$ .





## Algoritmo Primal Simplex.

### Passo 5: construir o 2º quadro.

*Linha 1: NÃO MUDA  
o coeficiente na coluna  
pivot é igual a 0.*

*Linha Pivotal:  
Nova linha 2 = Linha 2 /  
pivot*

*Nova linha 3 = linha 3 -  
(2 x nova linha pivotal)*

$$\begin{array}{ccccc|c}
 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \\
 -(2) & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 6 \\
 \hline
 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 6
 \end{array}$$

	$C_j$	3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	$x_3$	1	0	1	0	0	4
0	$x_4$	0	2	0	1	0	12
0	$x_5$	3	2	0	0	1	18
	$Z_j$	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	3	5	0	0	0	
0	$x_3$	1	0	1	0	0	4
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	$x_5$	3	0	0	-1	1	6

A SBA  $X^1 = (0, 6, 4, 0, 6)$



# Algoritmo Primal Simplex.

## Exemplo: 2º quadro.

	$C_j$	3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	1	0	1	0	0	4
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	$x_5$	3	0	0	-1	1	6
$z_j$		0	5	0	$-\frac{5}{2}$	0	30
$C_j - z_j$		3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	

$$z_1 = 0 \times 1 + 5 \times 0 + 0 \times 3$$

$$z_2 = 0 \times 0 + 5 \times 1 + 0 \times 0$$



## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro, passo 2.

- **Passo 2:** Critério de optimalidade:  
Existe algum custo reduzido positivo?

Calcular os  $c_j - z_j$

3    0    0     $-\frac{5}{2}$     0

Existe  
algum  
 $c_j - z_j > 0$   
?

$3 > 0$

Sim

Passar ao passo seguinte



## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro, passo 3.

- Passo 3:** Determinar a variável não básica que entra.

*a variável que entra:  $x_1$*

*coluna pivotal*

$C_j$		3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	1	0	1	0	0	4
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	$x_5$	3	0	0	-1	1	6
	$Z_j$	0	5	0	$-\frac{5}{2}$	0	30
	$C_j - Z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	

$\max \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = 3$



# Algoritmo Primal Simplex.

## Exemplo: 2º quadro, passo 4.

- Passo 4:** Determinar a variável básica que sai.

		$c_j$	3	5	0	0	0		
		$C_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$	
		$x_3$	1	0	1	0	0	4	$4/1 = 4$
		$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	$6/3 = 2$
		$x_5$	3	0	0	-1	1	6	<b>mínimo</b> (menor quociente)
		$z_j$	0	5	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
		$c_j - z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0		

*a variável que sai:  $x_5$*

*linha pivotal:  $i = 3$*

*pivot*

*coluna pivotal:  $j = 1$*

*máximo*



## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro, passo 5.

- Passo 5: Calcular a nova SBA  $X^2$ .

1ª

*A variável não básica que entra*



$x_1$

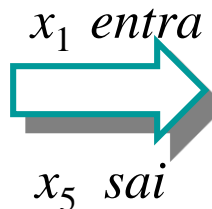
2ª

*A variável básica que sai*



$x_5$

SBA  $X^1_B = (x_3, x_2, x_5)$



SBA  $X^2_B = (x_3, x_2, x_1)$



# Algoritmo Primal Simplex.

## Passo 5: construir o 3º quadro.

*Linha Pivotal:*  
*Nova linha 3 = Linha 3 / pivot*

*linha 2: NÃO MUDA*  
*o coeficiente na coluna pivotal é*  
*igual a 0.*

*Nova linha 1 = linha 1 -*  
*(1 x nova linha pivotal)*

	1	0	1	0	0	4
<b>-(1)</b>	1	0	0	-1/3	1/3	2
	0	0	1	1/3	-1/3	2

	$C_j$	3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	$x_3$	1	0	1	0	0	4
5	$x_2$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
0	$x_5$	3	0	0	-1	1	6
	$Z_j$	0	5	0	$-\frac{5}{2}$	0	30
	$C_j - Z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	
0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2





## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 3º quadro.

		$c_j$	3    5    0    0    0					
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$	
0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
3	$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
	$z_j$	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36	
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1		

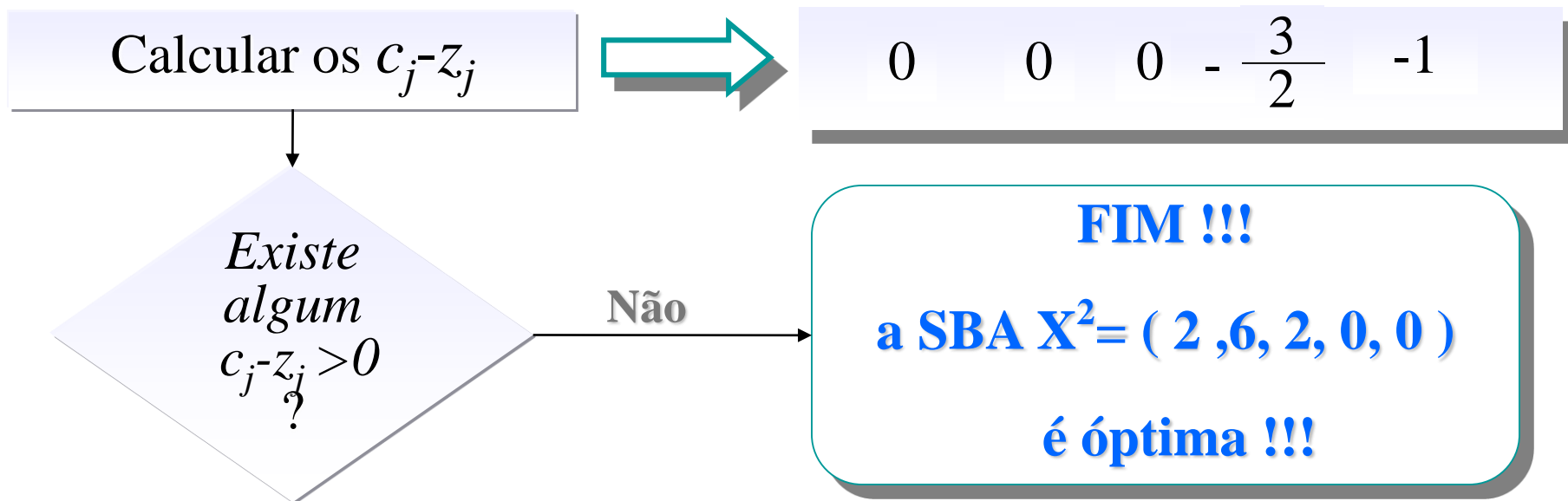
*todos os custos  
reduzidos são não  
positivos, logo  
a solução é óptima*

A SBA  $X^2 = (2, 6, 2, 0, 0)$  é a solução óptima



## Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 3º quadro, passo 2.

- **Passo 2:** Critério de optimalidade:  
Existe algum custo reduzido positivo?





## Algoritmo Primal Simplex. Conclusões



O Algoritmo Primal Simplex envolve os seguintes elementos:

- ✓ uma SBA como ponto de partida ;
- ✓ um mecanismo que determina a passagem para uma nova SBA "melhor" do que a anterior;
- ✓ critérios de paragem que indicam quando se está perante uma *solução óptima* (finita) ou perante a *inexistência de óptimo finito* (o valor da f.o. cresce indefinidamente).