Transmissão de calor

3º ano

Aula 2 ▫ 2. Equação diferencial de condução de calor

Tópicos:

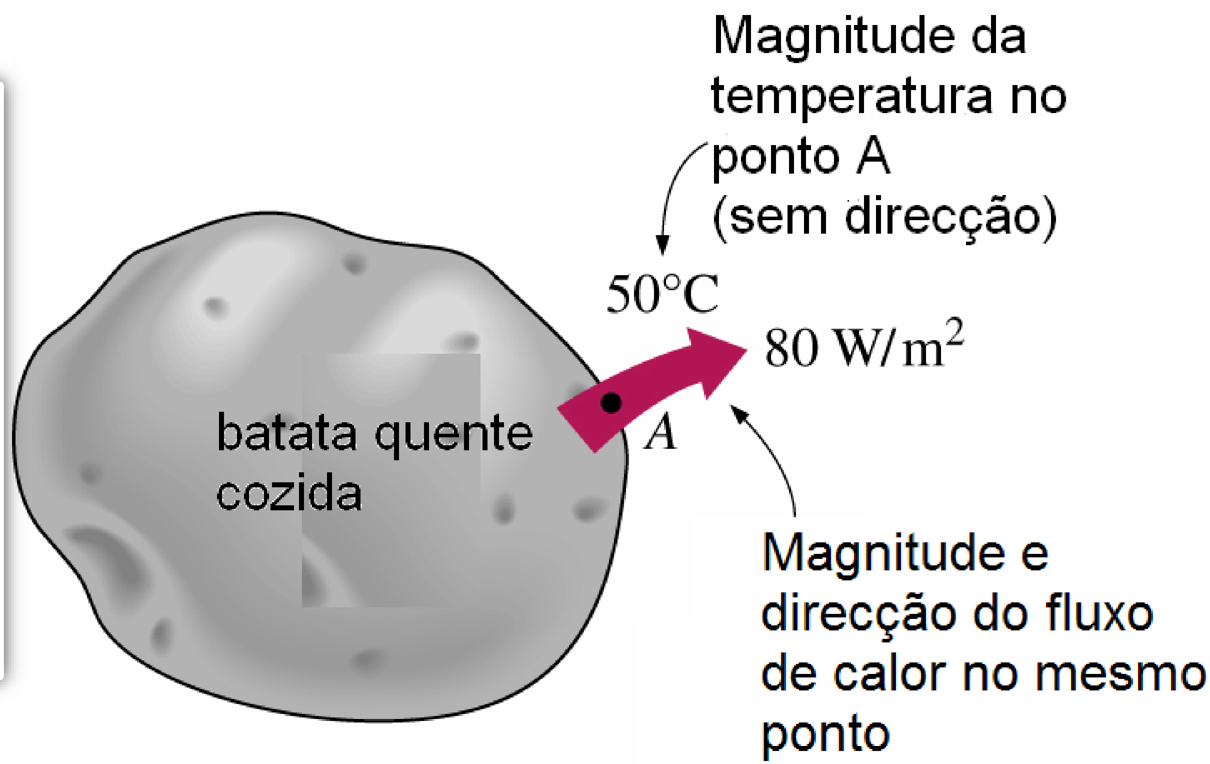
- Equação diferencial de condução de calor;
- Dedução da equação Básica;
- Aspectos Particulares da equação diferencial (leis de Fourier, Poisson e Laplace);
- Solução da Equação unidimensional de transferência de calor em regime permanente.

2.1 Introdução

A transferência de calor e a temperatura estão directamente relacionadas, mas são de natureza diferente. Diferente da temperatura o fluxo de calor tem magnitude e direcção, logicamente é um vector. Dai é necessário para além da magnitude, descrever a direcção para caracterizar por completo a transferência de calor num ponto.

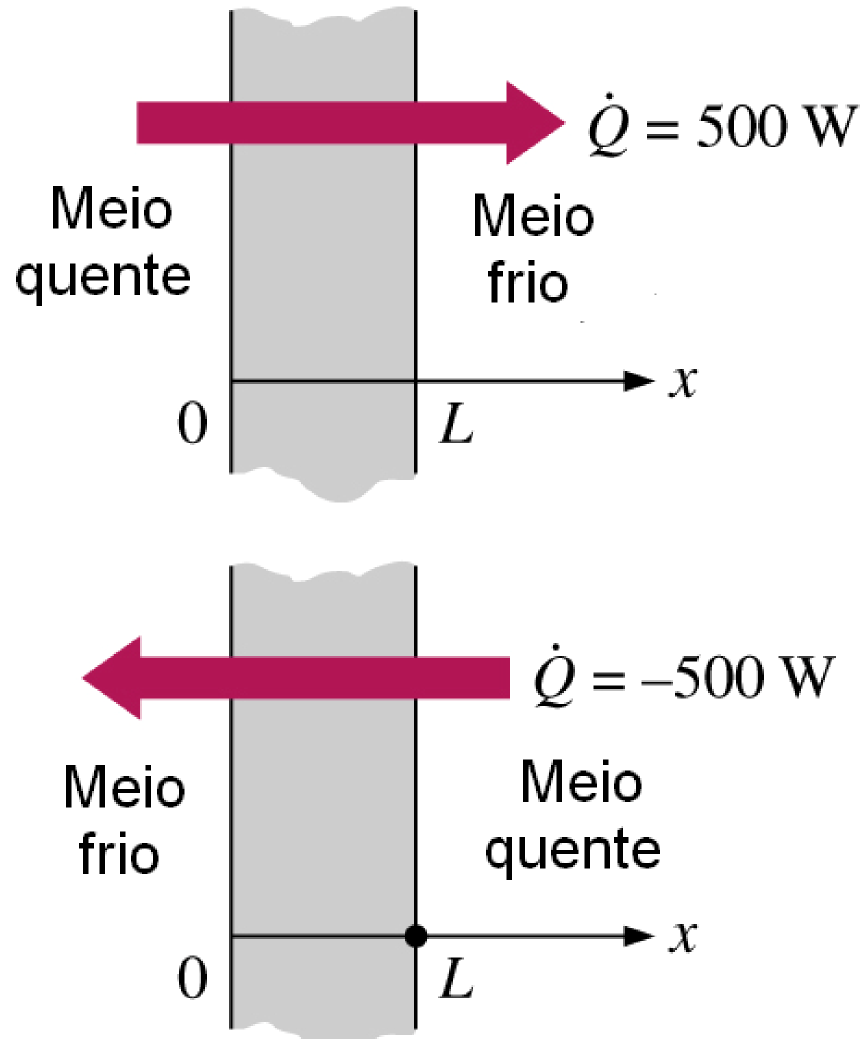
2.1 Introdução

O fluxo de calor tem direcção e magnitude, daí ser uma grandeza vectorial



2.1 Introdução

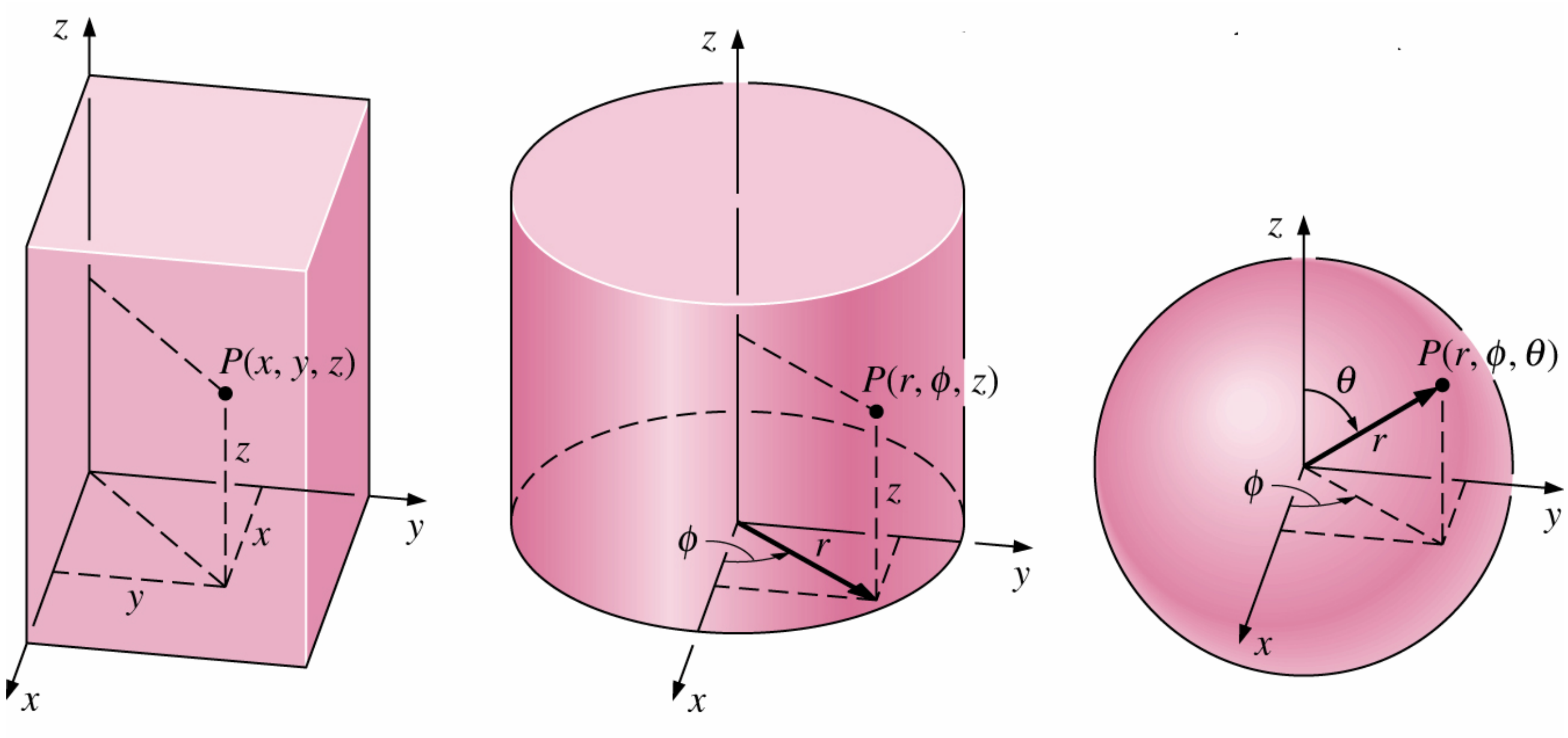
Direcção do fluxo de transferência de calor (positivo na direcção positiva e negativo na direcção negativa)



2.1 Introdução

A especificação da temperatura num ponto, primeiro requer a descrição da localização do tal ponto. Isso pode ser feito através da escolha de um sistema de coordenadas que pode ser: rectangular, cilíndrico ou esférico, o que depende da forma do corpo e da posição conveniente do ponto de referência a utilizar.

2.1 Introdução



(a) Coordenadas rectangulares (b) Cooredenadas cilindricas (c) Coordenadas esféricas

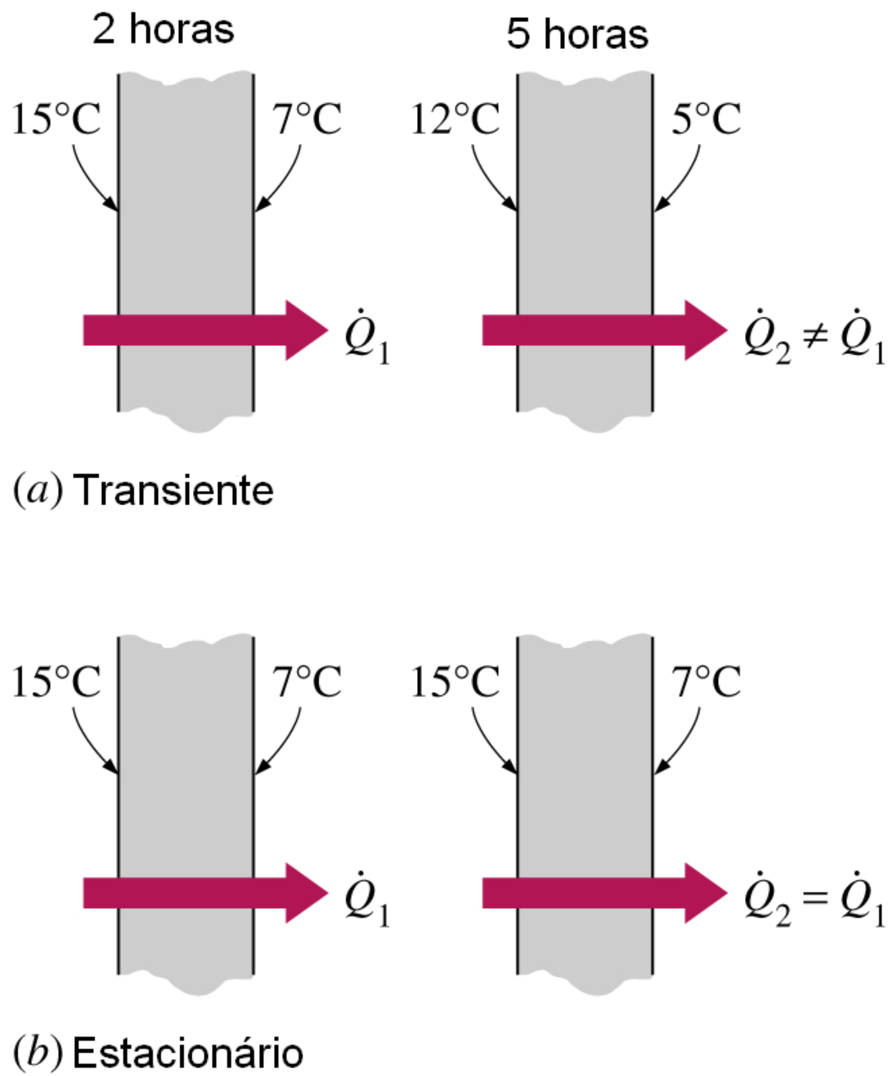
Distâncias e ângulos envolvidos quando se descreve a localização de um ponto

2.1 Introdução

Os problemas de transferência de calor são geralmente classificados em de regime transiente e de estado permanente. O termo permanente implica que não haja variações no tempo de nenhum ponto do meio, enquanto transiente, refere-se à problemas que tenham variação no tempo ou que sejam dependentes do tempo.

2.1 Introdução

Condução transiente e estacionária em uma parede plana



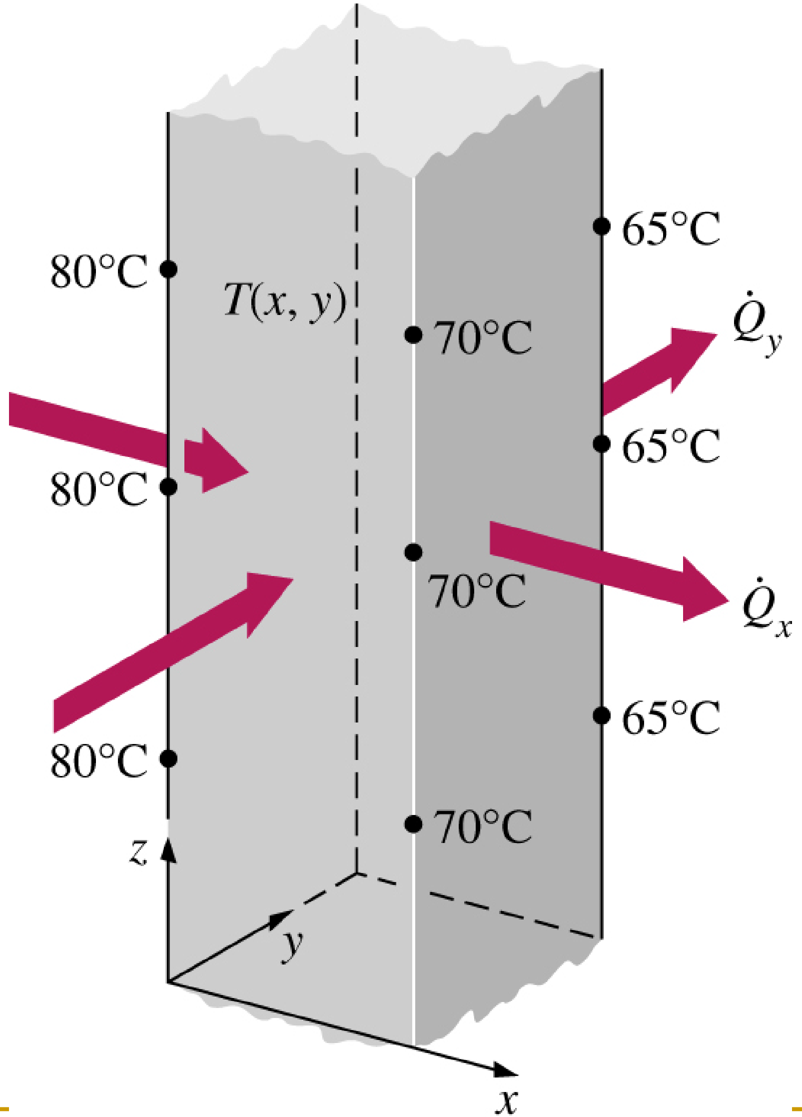
2.1 Introdução

Os problemas de transmissão de calor são geralmente classificados em unidirecionais bidireccionais e tridireccionais dependendo da magnitude da transferência de calor em cada uma das direcções e da precisão desejada na solução do problema.

No caso geral o calor transmite-se de modo tridimensional.

2.2 Transferência de Calor Multidimensional

Transferência de calor bidimensional numa barra rectangular longa



2.2 Transferência de Calor Multidimensional

A Lei de Fourier para a transferência de Calor Unidimensional é dada por:

$$\dot{Q}_{cond} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad \text{(W)} \qquad (2.1)$$

*Se **n** for a normal à superfície isotérmica no ponto **P,** a taxa de transferência de calor nesse ponto pode ser expressa pela Lei de Fourier do seguinte modo:*

$$\dot{Q}_{cond} = -kA\frac{\partial T}{\partial n} \qquad \text{(W)} \qquad (2.2)$$

2.2 Transferência de Calor Multidimensional

Em coordenadas rectangulares o vector da condução de calor pode ser expresso em função dos seus componentes.

$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k} \qquad (2.3)$$

Onde ***i, j*** *e* ***k*** *são vectores unitários e Q_x, Q_y e Q_z são as magnitudes de transferência de calor nas direcções x, y e z.*

$$\dot{Q}_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x'} \qquad \dot{Q}_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y'} \qquad \text{e} \qquad \dot{Q}_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z'} \qquad (2.4)$$

2.2.1 Geração de calor

O meio pelo qual o calor é conduzido pode envolver a conversão de energia eléctrica, nuclear ou química em calor (energia térmica) . Quando se faz análise da condução de calor, esta conversão de calor denomina-se **geração de calor**.

A geração de calor é um fenómeno volumétrico. Ele ocorre ao longo de todo o corpo, dai a a taxa de geração de calor ser dada em unidades por volume as suas unidades são W/m^3

$$\dot{G} = \int_v \dot{g}\,dV \qquad (W) \qquad (2.5)$$

No caso de geração uniforme de energia, caso da resistência eléctrica, a geração de energia transforma-se em:

$$\dot{G} = \dot{g}V \qquad (W)$$

Exemplo 2.1

Uma resistência de 1200 W de um secador de cabelo, tem 80 cm de comprimento e diâmetro de 0,3 cm. Determine a taxa de geração de calor na resistência, por unidade de volume, em W/cm^3 e o fluxo de calor na superfície externa da resistência, como resultado da geração de calor.

Resolução do Exemplo 2.1

A taxa de geração de calor determina-se dividindo o total do calor gerado, pelo volume da resistência.

$$g = \frac{\dot{G}}{V_{res}} = \frac{\dot{G}}{\left(\pi D^2/4\right)L} = \frac{1200W}{\left[\pi\,(0,3cm)^2/4\right](80cm)} = 212\ \text{W/cm}^3$$

Similarmente o fluxo na superfície externa da resistência, como resultado da geração de calor, é determinado pela divisão do total do calor gerado pela área superficial da resistência.

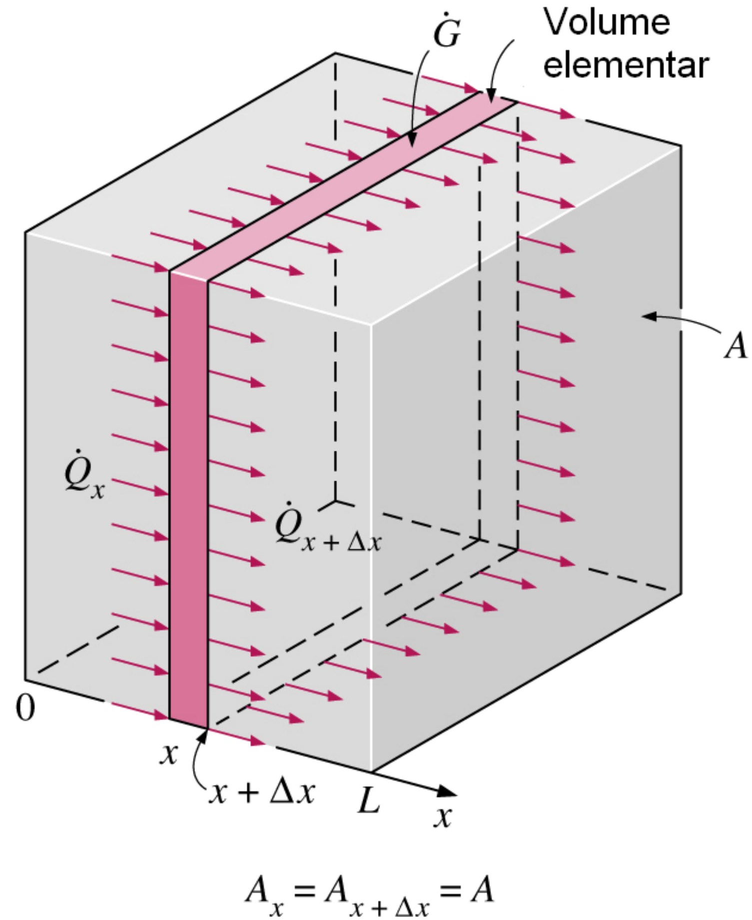
$$\dot{q} = \frac{\dot{G}}{A_{res}} = \frac{\dot{G}}{\pi DL} = \frac{1200\ \text{W}}{\pi\,(0{,}3\text{cm})(80cm)} = 15{,}9\ \text{W/cm}^2$$

2.3 Equação diferencial de condução de calor unidimensional

Os problemas de transmissão de calor unidimensionais são os problemas em que o calor é transmitido por difusão em uma única direcção. O termo unidimensional refere-se ao facto de somente uma coordenada ser necessária para descrever a variação espacial das variáveis independentes.

2.3.1 Parede Plana

Condução de calor unidimensional através de um volume elementar numa grande parede plana.



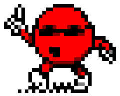
2.3.1 Parede Plana

Taxa de Calor conduzido em x **-** **Taxa de Calor conduzido em x + Δx** **+** **Taxa de calor gerado no elemento** **=** **Taxa de variação da energia contida no elemento**

Ou seja:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element\,t}}{\Delta t} \qquad (2.6)$$

2.3.1 Parede Plana



A variação de energia no elemento e a taxa de geração de energia no elemento, podem ser dadas pela expressão:

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC\left(T_{t+\Delta t} - T_t\right) = \rho C A \Delta x \left(T_{t+\Delta t} - T_t\right) \qquad (2.7)$$

$$\dot{G}_{element} = \dot{g} V_{element} = \dot{g} A \Delta x \qquad (2.8)$$

Substituindo na Equação 2.6 obtém-se:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{g} A \Delta x = \rho C A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \qquad (2.9)$$

Dividindo por AΔx:

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \qquad (2.10)$$

2.3.1 Parede Plana

Calculado o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad (2.11)$$

Da definição de derivada e da Lei de Fourier para a condução obtém-se:

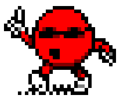
$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.12)$$

Note-se que A é constante para a parede plana. Então a equação transiente unidimensional de transferência de calor num plano resulta em:

Condutibilidade térmica variável

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.13)$$

2.3.1 Parede Plana



A condutibilidade térmica em muitos problemas é considerada constante então a Equação 2.13 transforma-se em:

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.14)$$

Onde α=k/ρC é a difusibilidade térmica do material e denota a velocidade de propagação do calor pelo material

Regime permanente

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \qquad (2.15)$$

Regime transiente sem geração de calor

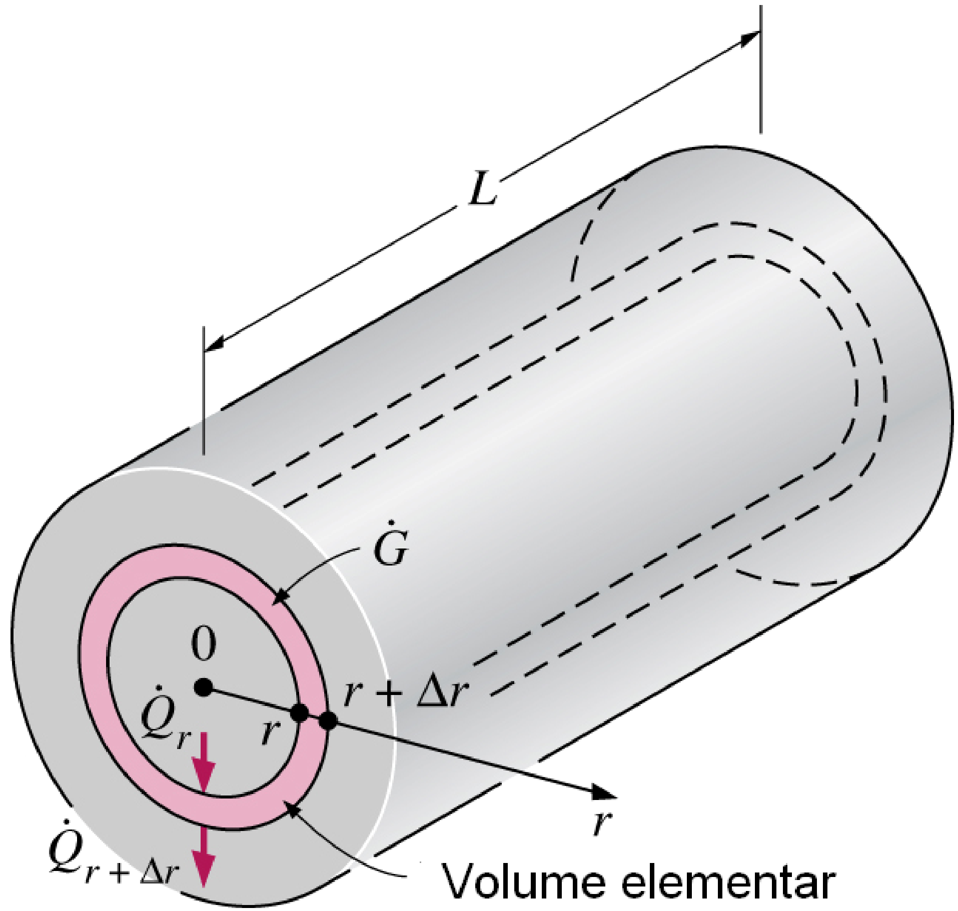
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.16)$$

Regime estacionário sem geração de calor

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \qquad (2.17)$$

2.3.2 Cilindro Longo

Condução de calor unidimensional através de um volume elementar num cilindro longo



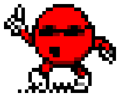
2.3.2 Cilindro Longo

Taxa de Calor conduzida em r	-	Taxa de Calor conduzida em r + Δr	+	Taxa de calor gerada no Interior do elemento	=	Taxa de variação da energia contida no elemento

Ou por outra

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \qquad (2.18)$$

2.3.2 Cilindro Longo



A variação de energia no elemento e a taxa de geração de energia no elemento podem ser dadas pela expressão:

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC\left(T_{t+\Delta t} - T_t\right) = \rho C A \Delta r\left(T_{t+\Delta t} - T_t\right) \quad (2.19)$$

$$\dot{G}_{element} = \dot{g} V_{element} = \dot{g} A \Delta r \quad (2.20)$$

Substituindo na Equação 2.18 obtém-se:

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{g} A \Delta r = \rho C A \Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2.21)$$

Dividindo por A·Δr obtém-se:

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2.22)$$

2.3.2 Cilindro Longo

Calculado o limite quando $\Delta r \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial r} \right) \qquad (2.23)$$

Da definição de derivada e da Lei de Fourier para a condução obtém-se:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}\left(kA\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.24)$$

Note-se que $A=2\pi rl$ para este caso. Então a equação transiente unidimensional de transferência de calor num plano resulta em:

Condutibilidade térmica variável

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.25)$$

2.3.2 Cilindro Longo

Para o caso da condutibilidade térmica constante então a Equação 2.25 transforma-se em:

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.26)$$

Onde mais uma vez $\alpha=k/\rho C$ é a difusibilidade térmica do material

Regime estacionário com geração de calor

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=0 \quad (2.27)$$

Regime transiente sem geração de calor

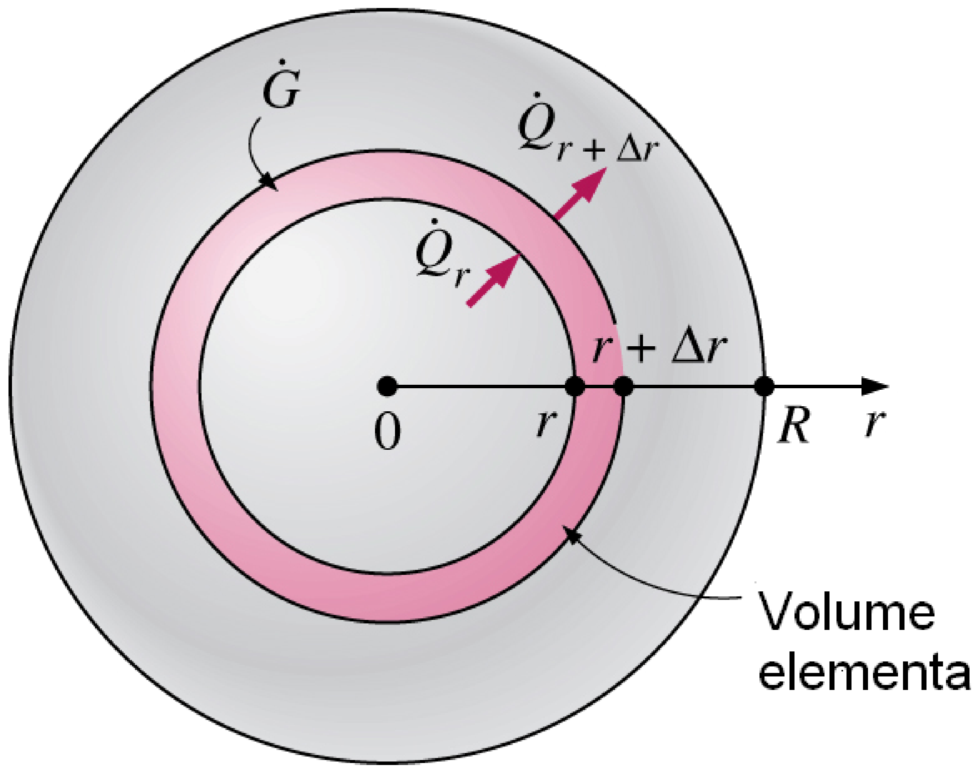
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.28)$$

Regime estacionário sem geração de calor

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \quad (2.29)$$

2.3.3 Esfera

Condução de calor unidimensional através de um volume elementar de uma esfera



2.3.3 Esfera

Condutibilidade variável

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{g}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.30)$$

No caso da condutibilidade térmica constante reduz-se a:

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.31)$$

2.3.3 Esfera

Onde mais uma vez $\alpha = k/\rho C$ é a difusibilidade térmica do material

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=0 \qquad (2.32)$$

Regime transiente, sem geração de calor

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.33)$$

Regime estacionário sem geração de calor

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$$

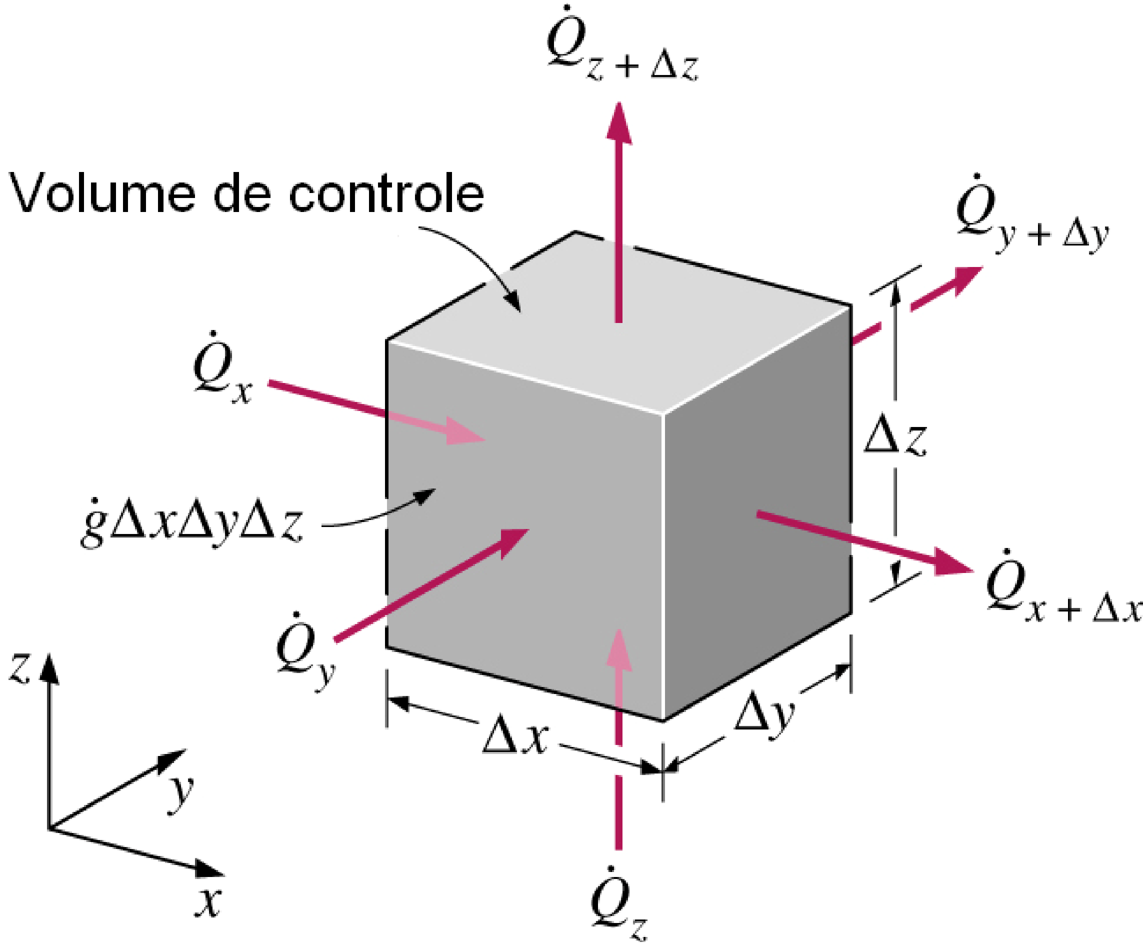
ou

$$r\frac{d^2T}{dr^2}+2\frac{dT}{dr}=0 \qquad (2.34)$$

2.4 Equação geral de condução de calor

2.4.1 Coordenadas rectangulares

Condução de calor tridimensional através de um volume elementar rectangular



2.4 Equação geral de condução de calor

A maioria dos problemas de transferência de calor encontrados na prática podem ser aproximados à problemas unidimensionais.
Porém, este nem sempre é o caso, e às vezes é preciso considerar que o calor se transfere também em outras direcções. Nesse caso a condução de calor é multidimensional, e a equação diferencial desses sistemas pode ser apresentada em coordenadas rectangulares, cilíndricas ou esféricas.

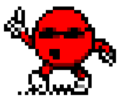
2.4.1 Coordenadas rectangulares

Taxa de Calor conduzido em x, y e z	**-**	**Taxa de Calor conduzido em x+Δx, y+Δy e z+Δz**	**+**	**Taxa de calor gerado no Interior do elemento**	**=**	**Taxa de variação da energia contida no elemento**

Ou seja

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad (2.35)$$

2.4.1 Coordenadas rectangulares



Note-se que o volume elementar é dado por $V_{element} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$. A relação entre a variação de energia do elemento e a taxa de geração pode ser dada por:

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC\left(T_{t+\Delta t} - T_t\right) = \rho C \Delta x \Delta y \Delta z \left(T_{t+\Delta t} - T_t\right) \qquad (2.36)$$

$$\dot{G}_{element} = \dot{g} V_{element} = \dot{g} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Substituindo na Equação 2.35 obtém-se:

$$Q_x + Q_y + Q_z - Q_{x+\Delta x} - Q_{y+\Delta y} - Q_{z+\Delta z} + \dot{g} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho C \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\left(T_{t+\Delta t} - T_t\right)}{\Delta t}$$

Dividindo por $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ recebe-se:

$$-\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \qquad (2.37)$$

2.4.1 Coordenadas rectangulares

As áreas de transferência de calor do elemento nas direcções x, y e z são $Ax = \Delta y\Delta z$, $Ay = \Delta x\Delta z$ e $Az = \Delta x\Delta y$, respectivamente e o limite de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e $\Delta t \rightarrow 0$ dá:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{g}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.38)$$

Da definição de derivada e da Equação de Fourier obtém-se:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta y\Delta z}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x}-\dot{Q}_x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta y\Delta z}\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}=\frac{1}{\Delta y\Delta z}\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\Delta y\Delta z\frac{\partial T}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta z}\frac{\dot{Q}_{y+\Delta y}-\dot{Q}_y}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta x\Delta z}\frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y}=\frac{1}{\Delta x\Delta z}\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\Delta x\Delta z\frac{\partial T}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\dot{Q}_{z+\Delta z}-\dot{Q}_z}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\Delta x\Delta y\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

2.4.1 Coordenadas rectangulares

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.39)$$

Regime permanente (**Equação de Poisson**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{g}}{k}=0 \qquad (2.40)$$

Regime transiente, sem geração de calor (**Equação da Difusão**)

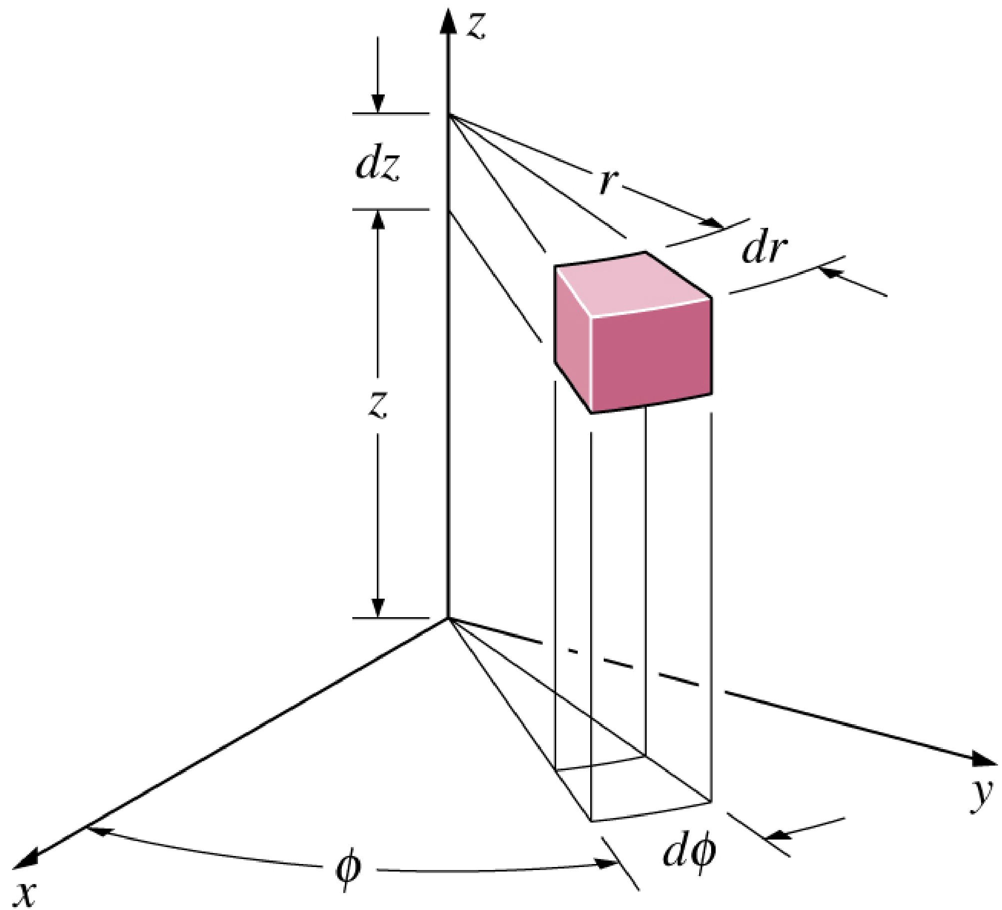
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.41)$$

Regime permanente, sem geração de calor (**Equação de Laplace**)

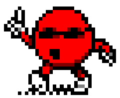
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad (2.42)$$

2.4.2 Coordenadas cilíndricas

Volume elementar diferencial em coordenadas cilíndricas



2.4.2 Coordenadas cilíndricas



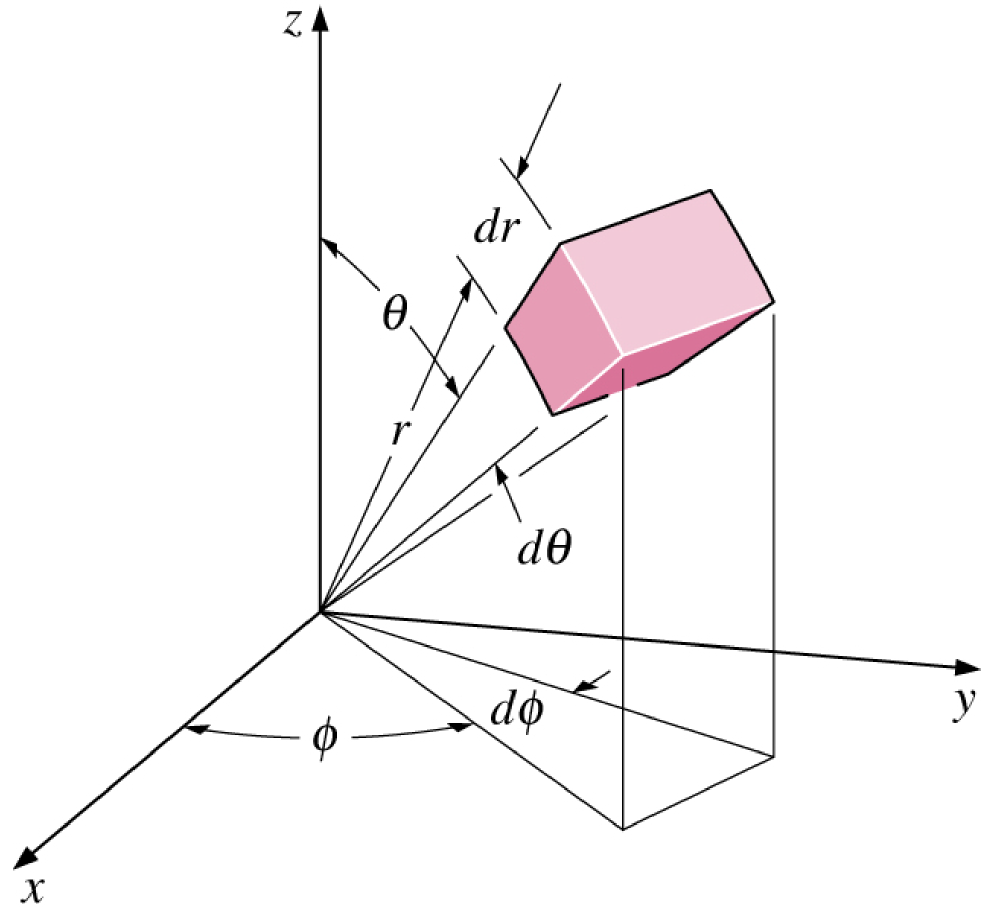
A equação de calor em coordenadas cilíndricas pode ser obtida do balanço de energia de um elemento volumétrico da equação diferencial usando as seguintes transformações:

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi \quad \text{e} \quad z = z$$

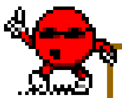
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(kr\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{g}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.43)$$

2.4.3 Coordenadas esféricas

Volume elementar diferencial em coordenadas esféricas



2.4.3 Coordenadas esféricas

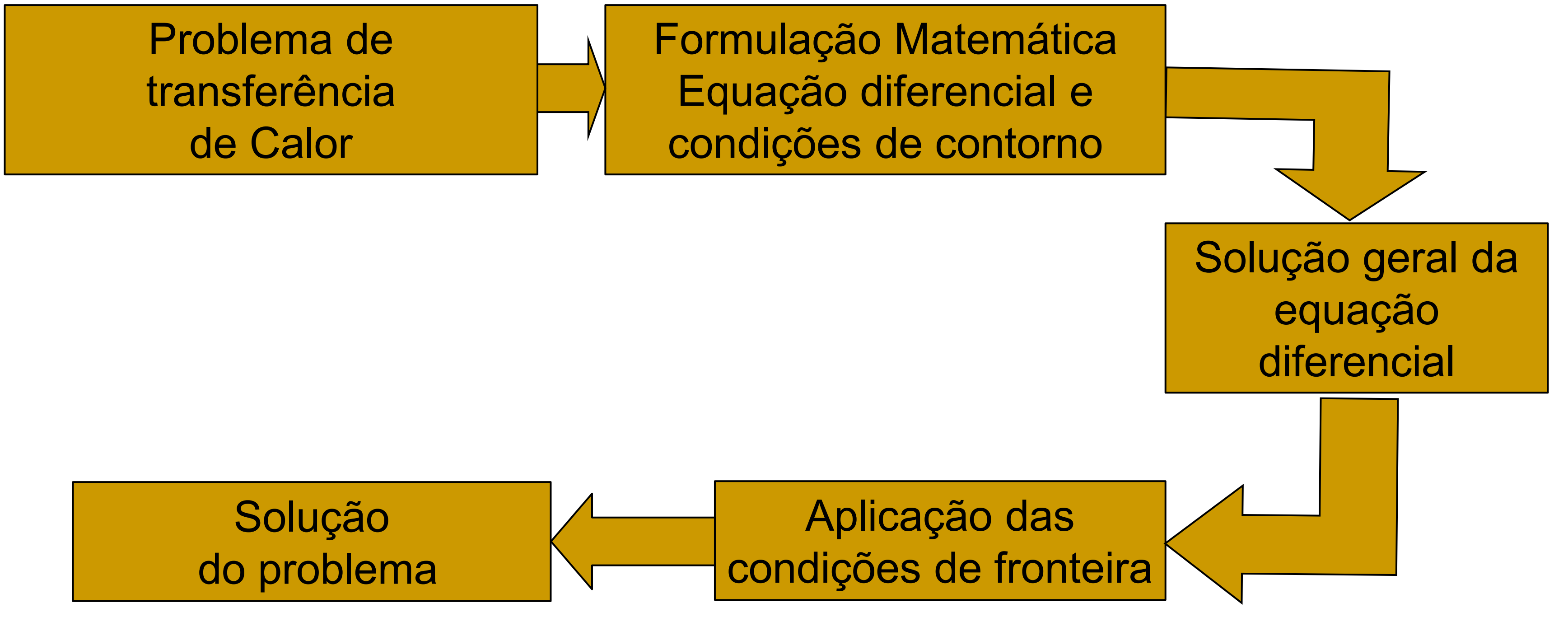


A equação de calor em coordenadas esféricas pode ser obtida do balanço de energia de um elemento volumétrico da equação diferencial usando as seguintes transformações:

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta \quad \text{e} \quad z = \cos\phi$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.44)$$

2.5 Solução da Equação unidimensional de transferência de calor em regime permanente



2.5 Solução da Equação unidimensional de transferência de calor em regime permanente

Obtendo a solução geral de uma simples equação de segunda ordem por meio de integração.

Equação Diferencial

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Integrando:

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

Integrando outra vez:

$$T(x) = C_1x + C_2$$

Solução Geral   *Constantes arbitrárias*

2.5 Solução da Equação unidimensional de transferência de calor em regime permanente

Quando se aplica as condições de fronteira à solução geral num ponto específico as variáveis dependentes e independentes devem ser substituídas pelos seus valores específicos.

Condições de fronteira

$$T(0) = T_1$$

Solução geral

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Aplicando as condições de fronteira

$$\underbrace{T(\underset{0}{x})}_{T_1} = C_1 \underset{0}{x} + C_2$$

Substituindo:

$$T_1 = C_1 \times 0 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_1$$

Não involve x ou T(x) após as condições de fronteira serem aplicadas