



Transmissão de calor

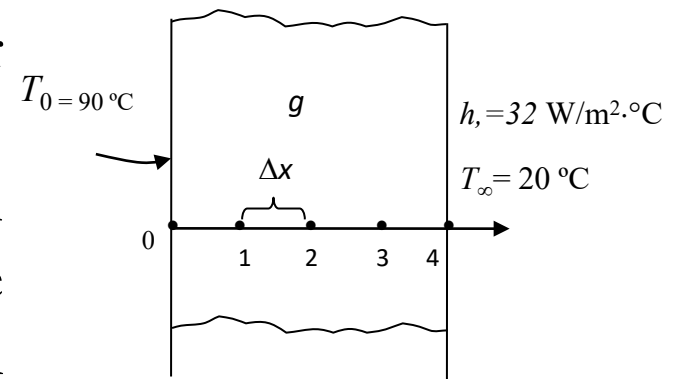
3º Ano

Aula 12 ▫ Aula Prática-5

- Método de diferenças finitas

Problema -12.1 (I)

Uma chapa de comprimento 0,8 m é submetida a uma temperatura especificada num lado e à convecção do outro lado. Formule o método de resolução por diferenças finitas para este problema. Determine as temperaturas nodais em condições de equilíbrio e a taxa de transferência de calor através da chapa. A condutibilidade térmica da chapa é $k = 4,2$ W/m·°C, o espaçamento entre os nós de $\Delta x = 0,2$ m, a área de convecção de 25 m² e a sua temperatura 90°C.



Problema -12.1 (Resolução I)

Assume-se:

1. Transferência de calor através da parede constante e unidimensional;
2. Condutividade térmica constante;
3. Que não há geração de calor;
4. Transferência de calor de radiação desprezível.

O número de nós determina-se de:

$$M = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{0,8 \text{ m}}{0,2 \text{ m}} + 1 = 5$$

Problema -12.1 (Resolução II)

A temperatura da superfície é $T_0 = 90 \text{ }^\circ\text{C}$. Esse problema envolve 4 temperaturas nodais desconhecidos e, portanto, precisa-se de 4 equações para determiná-las individualmente. Os nós 1, 2 e 3 nós são do interior e assim, para eles, pode-se usar a relação geral de diferenças finitas expressa como:

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0$$

para $m = 0, 1, 2, \text{ e } 3$

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} = \frac{\dot{g}_m}{k}$$

Problema -12.1 (Resolução II)

Não havendo geração de calor ($g = 0$), resulta que:

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} = 0$$

A equação de diferenças finitas para o nó 4 na superfície direita submetida à convecção é obtida através da aplicação de um balanço de energia no elemento de volume, cerca de metade do nó 4 e tomando a direção de todas as transferências de calor a ser para o nó em consideração:

$$\text{Nó 1 (interior):} \quad T_0 - 2T_1 + T_2 = 0$$

$$\text{Nó 2 (interior):} \quad T_1 - 2T_2 + T_3 = 0$$

$$\text{Nó 3 (interior):} \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = 0$$

$$\text{Nó 4 (superfície à direita com convecção):} \quad h(T_\infty - T_4) + k \frac{T_3 - T_4}{\Delta x} = 0$$

Problema -12.1 (Resolução III)

O sistema de 4 equações com 4 temperaturas desconhecidas constitui a formulação de diferenças finitas do problema. As temperaturas nodais em condições de equilíbrio são determinadas pela resolução das 4 equações simultaneamente.

$$T_1 = 74,97^\circ\text{C}, \quad T_2 = 59,93^\circ\text{C}, \quad T_3 = 44,9^\circ\text{C}, \quad \text{e} \quad T_4 = 29,87^\circ\text{C}$$

A taxa de transferência de calor através da parede é simplesmente a transferência de calor por convecção na face direita e determina-se de:

$$\dot{Q}_{\text{parede}} = \dot{Q}_{\text{conv}} = hA(T_4 - T_\infty) = (32 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(25 \text{ m}^2)(29,97 - 20)^\circ\text{C} = 7896 \text{ W}$$

Problema -12.2 (Resolução I)

Assume-se:

1. Transferência de calor através do corpo estável e bidimensional;
2. Calor é gerado uniformemente no organismo;
3. Transferência de calor por radiação desprezível.

A expressão geral para o cálculo da temperatura num nó interior pelo método de diferença finita considerando o escoamento bidimensional com geração de calor é expressa como:

$$T_{\text{esq}} + T_{\text{topo}} + T_{\text{direita}} + T_{\text{baixo}} - 4T_{\text{nó}} + \frac{\dot{g}_{\text{nó}} l^2}{k} = 0$$

Problema -12.2 (Resolução II)

Onde:

$$\frac{\dot{g}_{\text{nó}} l^2}{k} = \frac{\dot{g}_0 l^2}{k} = \frac{(8 \times 10^6 \text{ W/m}^3)(0,05 \text{ m})^2}{214 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 93,5^\circ\text{C}$$

As equações de diferenças finitas para os nós na fronteira são obtidas através da aplicação do balanço de energia sobre os volumes elementares e assumindo que a direção de todas as transferências de calor a é para o nó em consideração:

$$\text{Nó 1 (convecção): } k \frac{l}{2} \frac{240 - T_1}{l} + kl \frac{290 - T_1}{l} + k \frac{l}{2} \frac{325 - T_1}{l} + hl(T_\infty - T_1) + \frac{\dot{g}_0 l^2}{2k} = 0$$

$$\text{Nó 2 (interior): } 350 + 290 + 325 + 290 - 4 T_2 + \frac{\dot{g}_0 l^2}{k} = 0$$

$$\text{Nó 3 (interior): } 260 + 290 + 240 + 200 - 4 T_3 + \frac{\dot{g}_0 l^2}{k} = 0$$

Problema -12.2 (Resolução III)

Calculando, resulta:

$$T_1 = 280,9^\circ\text{C}, \quad T_2 = 397,1^\circ\text{C}, \quad T_3 = 330,8^\circ\text{C},$$

A taxa de perda de calor da superfície inferior através de uma secção de 1 m de comprimento será:

$$\dot{Q} = \sum_m \dot{Q}_{\text{elemento}, m} = \sum_m hA_{\text{superfície}, m} (T_m - T_\infty)$$

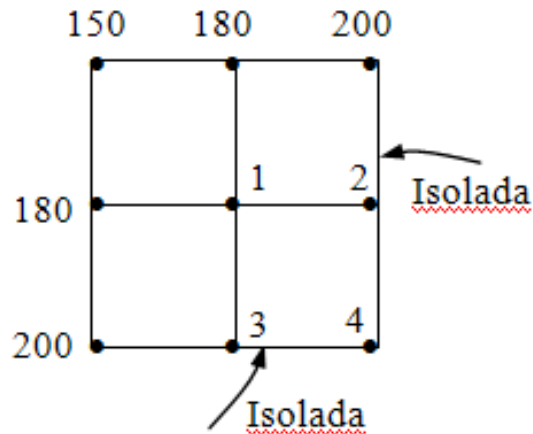
$$\dot{Q} = h(l/2)(200 - T_\infty) + hl(240 - T_\infty) + hl(T_1 - T_\infty) + h(l/2)(325 - T_\infty)$$

$$\dot{Q} = (50 \text{ W/m}^2\text{°C})(0,05 \text{ m} \cdot 1 \text{ m})[(200-20)/2 + (240-20) + (280,9-20) + (325-20)/2]^\circ\text{C}$$

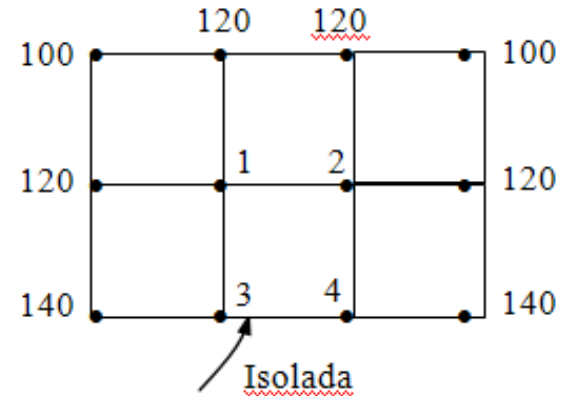
$$\dot{Q} = \mathbf{1808 \text{ W}}$$

Problema -12.3 (I)

Um longo corpo sólido é submetido a uma transferência de calor constante bidimensional. Determine as temperaturas nodais sabendo que a condutibilidade térmica do sólido é $k=20\text{W}/\text{m}\cdot^\circ\text{C}$ e o espaçamento entre os nós $\Delta x=\Delta y=0,02\text{ m}$.



Caso-1



Caso-2

Problema -12.3 (II)

Assume-se

1. Transferência de calor através do corpo estável e bidimensional;
2. Não há geração de calor no corpo;
3. A transferência de calor por radiação é desprezível.

A expressão geral para o cálculo da temperatura num nó interior pelo método de diferença finita considerando o escoamento bidimensional e sem geração de calor é:

$$T_{\text{esq}} + T_{\text{topo}} + T_{\text{direto}} + T_{\text{baixo}} - 4T_{\text{nó}} + \frac{\dot{g}_{\text{nó}} l^2}{k} = 0$$

$$T_{\text{nó}} = (T_{\text{esq}} + T_{\text{topo}} + T_{\text{direto}} + T_{\text{baixo}}) / 4$$

Problema -12.3 (Resolução I)

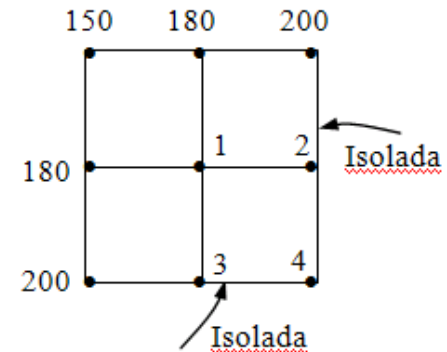
Caso-1

Existe simetria sobre o isolamento superficial, bem como sobre a linha diagonal. Por isso $T_3 = T_2$ e T_1, T_2, T_4 são as únicas temperaturas nodais desconhecidas. Assim, precisamos apenas 3 equações para determiná-las individualmente. Além disso, podemos substituir as linhas de simetria por isolamento e utilizar o conceito de imagem de espelho, ao escrever as equações de diferenças finitas para os nós interiores.

$$\text{Nó 1 (interior):} \quad T_1 = (180 + 180 + T_2 + T_3) / 4$$

$$\text{Nó 2 (interior):} \quad T_2 = (200 + T_4 + 2T_1) / 4$$

$$\text{Nó 4 (interior):} \quad T_4 = (2T_2 + 2T_3) / 4$$



Problema -12.3 (Resolução II)

Sendo, $T_3 = T_2$ resulta:

$$T_2 = T_3 = T_4 = 190^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 185^\circ\text{C}$$

Caso -2

Neste caso existe também simetria relativamente à superfície com isolamento, bem como a linha diagonal. Trocando as linhas de simetria de isolamento, e utilizando o conceito de imagem-espelho, as equações de diferenças finitas para os nós do interior pode ser escrito como:

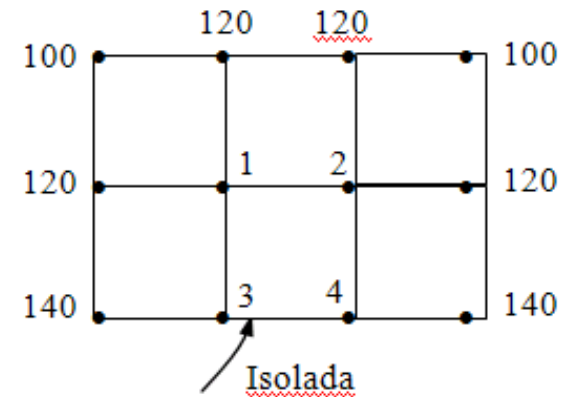
Problema -12.3 (Resolução III)

Nó 1 (interior): $T_1 = (120 + 120 + T_2 + T_3) / 4$

Nó 2 (interior): $T_2 = (120 + 120 + T_4 + T_1) / 4$

Nó 3 (interior): $T_3 = (140 + 2T_1 + T_4) / 4$

Nó 4 (interior): $T_4 = (2T_2 + 140 + T_3) / 4$



Resolvendo as equações resulta:

$$T_1 = T_2 = \mathbf{122,9^\circ C}$$

$$T_3 = T_4 = \mathbf{128,6^\circ C}$$

Nota que tirar partido da simetria simplifica o problema.

Trabalho Para Casa 05



Formular e resolver e resolver o problema de elementos finitos apresentado na lista.

Enviar até a 0 hora de sexta-feira dia 12 de Abril de 2024 com “subject”: TPC05.