



---

# Transmissão de calor

---

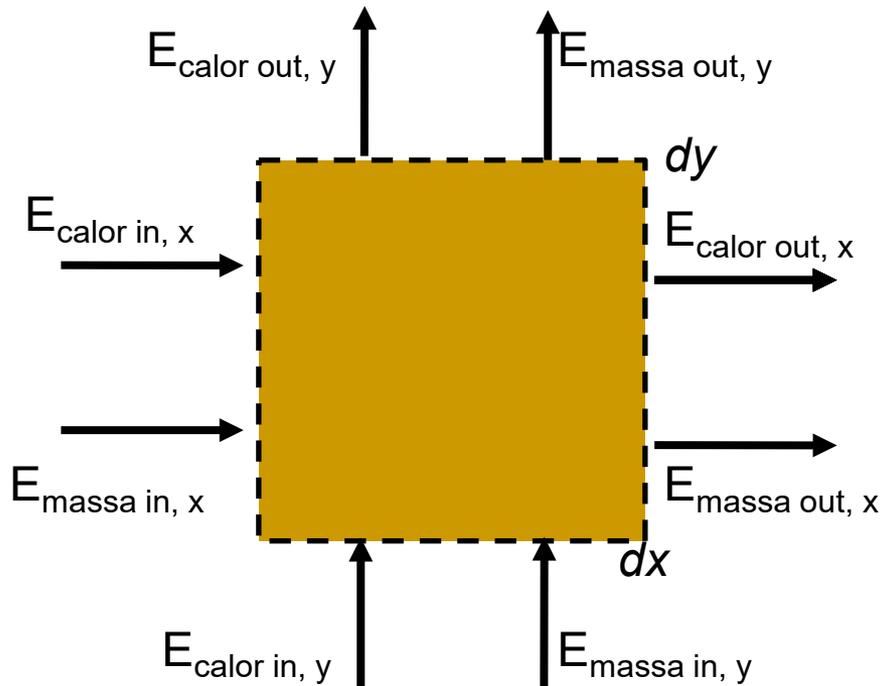
3º ano

# Aula 13 ▫ 6. Convecção

Tópicos:

- Dedução das Equações Diferenciais de Convecção
- Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana
- Equação de Convecção Adimensional e Similaridade
- Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção
- Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

## 6.7.3. Equações de Conservação de Energia



Transferências de energia por calor e pelo fluxo mássico associados a um volume de controle diferencial na camada limite térmica, no escoamento em regime permanente bidimensional.

## 6.7.3. Equações de Conservação de Energia

A energia é uma grandeza escalar, daí as interacções dela nas diversas direcções podem ser combinadas em uma única equação. É de notar que o fluxo de massa do fluído que entra pela parte esquerda do volume de controle é dado por  $\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{y}$ . A taxa de energia transferida pela massa ao volume de controle na direcção  $\mathbf{x}$  é dada por:

$$\begin{aligned} (E_{in} - E_{out})_{por\ massa,x} &= (\dot{m}e_{corrente})_x - \left[ (\dot{m}e_{corrente})_x + \frac{\partial (\dot{m}e_{corrente})_x}{\partial x} dx \right] \quad (6.30) \\ &= - \frac{\partial [\rho u (dy \cdot 1) C_p T]}{\partial x} dx = -\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned}$$

## 6.7.3. Equações de Conservação de Energia

A equação de energia para o escoamento bidimensional em regime permanente, com propriedades constantes, obtém-se substituindo as Equações 6.32, 6.34 na equação 6.30

$$\rho C_P \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (6.35)$$

Quando as forças viscosas não são desprezíveis a equação toma o seguinte aspecto:

$$\rho C_P \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \quad (6.36)$$

Onde  $\Phi$  é a função que é obtida depois da análise do comprimento e expressa-se por:

## 6.7.3. Equações de Conservação de Energia

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (6.37)$$

A dissipação toma lugar dominante nos fluxos a alta velocidade, especialmente quando a viscosidade do fluido é alta.

Para um caso especial em que o fluido é estacionário  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$  a equação de energia reduz-se como o esperado à equação de condução bidimensional

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6.38)$$

## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Num escoamento laminar de um fluido sobre uma placa plana, a coordenada  $x$  é medida ao longo da superfície da placa, desde a borda de ataque da placa no sentido do fluxo, e  $y$  é medido da superfície no sentido normal à placa. O fluido aproxima-se da placa no sentido  $x$  com uma velocidade uniforme equivalente à velocidade do escoamento livre  $u_\infty$ .

## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Quando a dissipação viscosa é insignificante, as equações de continuidade, do momentum, e da energia (Equações 6.21, 6.28, e 6.35) reduzem-se, para o fluxo constante, incompressível e laminar, de um fluido com propriedades constantes sobre uma placa plana a:

$$\text{Continuidade} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.39)$$

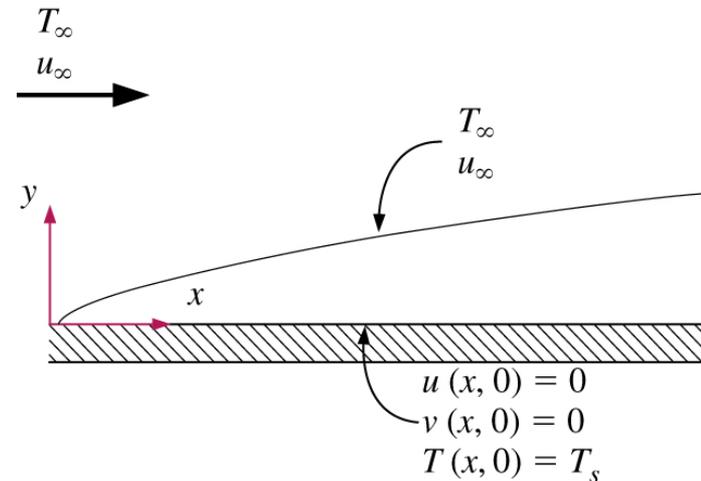
$$\text{Momentum} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (6.40)$$

$$\text{Energia} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.41)$$

## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Condições de contorno para o escoamento sobre uma placa plana.

$$\begin{aligned} \text{Em } x = 0 \quad & u(0, y) = u_\infty, \quad T(0, y) = T_\infty \\ \text{Em } y = 0 \quad & u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_s \\ \text{Quando } y \rightarrow \infty \quad & u(x, \infty) = u_\infty, \quad T(x, \infty) = T_\infty \end{aligned} \quad (6.42)$$



## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

As equações de continuidade e de momentum foram resolvidas primeiramente em 1908 pelo Engenheiro alemão H. Blasius, e pelo estudante L. Prandtl. Eles conseguiram este feito transformando as duas equações diferenciais parciais em uma única equação diferencial ordinária, introduzindo uma nova variável independente, chamada variável da similaridade.

Blasius estava também ciente do trabalho de Stokes que afirma que  $\delta$  é proporcional a  $(\nu x / u^\infty)^{1/2}$  assim, definiu uma variável adimensional de similaridade como:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (6.43)$$

## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Ficando,  $u/u_\infty = \text{função}(\eta)$ . Então pode-se introduzir a função da corrente  $\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (6.44)$$

de modo que a equação de continuidade (Equação 6.39) é automaticamente satisfeita e eliminada. Definindo-se então uma função  $f(\eta)$  como variável dependente:

$$f(\eta) = \frac{\Psi}{u_\infty \sqrt{\nu x / u_\infty}} \qquad (6.45)$$

## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

$\eta$	$f$	$\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_\infty}$	$\frac{d^2f}{d\eta^2}$
0	0	0	0.332
0.5	0.042	0.166	0.331
1.0	0.166	0.330	0.323
1.5	0.370	0.487	0.303
2.0	0.650	0.630	0.267
2.5	0.996	0.751	0.217
3.0	1.397	0.846	0.161
3.5	1.838	0.913	0.108
4.0	2.306	0.956	0.064
4.5	2.790	0.980	0.034
5.0	3.283	0.992	0.016
5.5	3.781	0.997	0.007
6.0	4.280	0.999	0.002
$\infty$	$\infty$	1	0

Recorde-se que foi definida a espessura da camada limite como a distância da superfície para a qual  $u/u_\infty = 0,99$ . Olhando-se para a tabela, o valor de  $\eta$  correspondente a  $u/u_\infty = 0,992$  é  $\eta = 5,0$ . Substituindo  $\eta = 5,0$  e  $y = \delta$  na definição da variável de similaridade obtém-se:

$$5,0 = \delta \sqrt{u_\infty / \nu x}$$

## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Então a espessura da camada limite da velocidade torna-se

$$\delta = \frac{5,0}{\sqrt{u_\infty/\nu x}} = \frac{5,0x}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.51)$$

A tensão de cisalhamento na parede pode ser determinada da sua definição e da relação de  $\partial u / \partial y$  da Equação 6.48:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \left. \frac{d^2 f}{dn^2} \right|_{\eta=0} \quad (6.52)$$

## 6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Substituindo o valor da segunda derivada de  $f$  em  $\eta = 0$ , da tabela obtém-se:

$$\tau_w = 0,332u_\infty \sqrt{\frac{\rho\mu u_\infty}{x}} = \frac{0,332\rho u_\infty^2}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (6.53)$$

O coeficiente de fricção entre o fluido e a placa é dado pela expressão:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2/2} = 0,664 \text{Re}_x^{-1/2} \quad (6.54)$$

## 6.8.1 Equação da Energia

Conhecendo o perfil da velocidade, pode-se então resolver a equação da energia para o caso da temperatura constante da parede  $T_s$ . Primeiramente introduz-se a temperatura adimensional na forma:

$$\theta(x, y) = \frac{T(x, y) - T_s}{T_\infty - T_s} \quad (6.55)$$

É de notar que  $T_s$  e  $T_\infty$  são constantes, sendo assim a sua substituição na equação de energia resulta em:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6.56)$$

O perfil de temperaturas para um fluxo sobre uma placa isotérmica é similar.

## 6.8.1 Equação da Energia

As componentes da velocidade passam a ser:

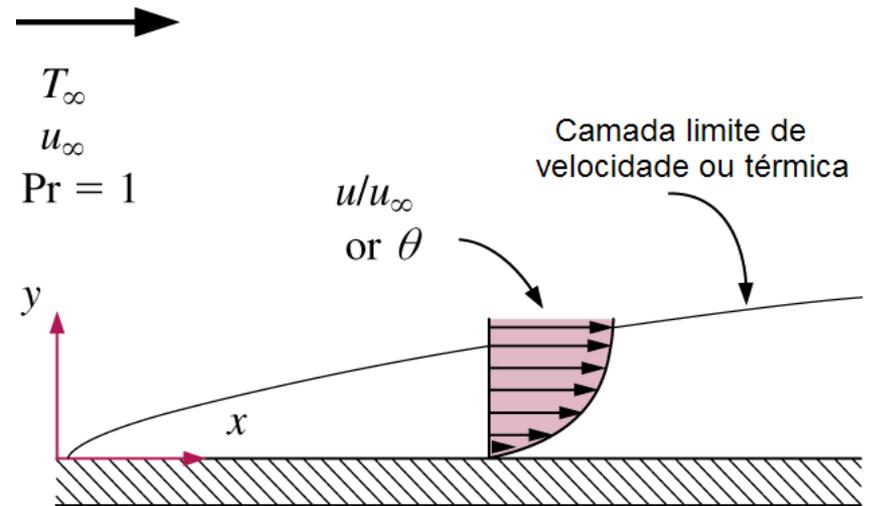
$$u_{\infty} \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_{\infty} \nu}{x}} \left( \eta \frac{df}{d\eta} - f \right) \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = \alpha \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \left( \frac{d\eta}{dy} \right)^2 \quad (6.57)$$

As componentes da velocidade passam a ser:

$$2 \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \text{Pr} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (6.58)$$

## 6.8.1 Equação da Energia

Quando  $\mathbf{Pr} = 1$ , as camadas limites fluidodinâmica e térmica coincidem, e os perfis da velocidade e de temperatura adimensionais são idênticos para o escoamento permanente, incompressível, laminar sobre uma placa plana.



## 6.8.1 Equação da Energia

A Equação 6.58 foi resolvida para numerosos valores de Prandtl. Para  $\mathbf{Pr} > 0,6$ , o gradiente adimensional da temperatura na superfície é proporcional a  $\mathbf{Pr}^{1/3}$  e expressa-se por:

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0,332 \text{Pr}^{1/3} \quad (6.59)$$

O gradiente de temperatura na superfície é:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} &= (T_\infty - T_s) \left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=0} = (T_\infty - T_s) \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \left. \frac{d\eta}{dy} \right|_{y=0} \\ &= 0,332 \text{Pr}^{1/3} (T_\infty - T_s) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Dai o coeficiente local de convecção e o número de Nusselt passam a ser:

$$h_s = \frac{q_s}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(\partial T/\partial y)|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = 0,332 \text{Pr}^{1/3} k \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (6.61)$$

## 6.8.1 Equação da Energia

e

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0,332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad Pr > 0,6 \quad (6.62)$$

O número de Nusselt obtido por esta relação coincide com os valores medidos

$$\delta_t = \frac{\delta}{Pr^{1/3}} = \frac{5,0x}{Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}} \quad (6.63)$$

É de notar que estas relações só são válidas para escoamentos laminares sobre uma placa plana isotérmica. O efeito das propriedades variáveis deve ser tomado em conta avaliando as suas propriedades à temperatura do fluido  $T_f = (T_s + T_\infty)/2$

## 6.9 Equação de Convecção Adimensional e Similaridade

Quando a dissipação viscosa é desprezível, a continuidade, o momentum, e as equações da energia para fluxos constantes, incompressíveis, laminares de um fluido com propriedades constantes são dadas pelas Equações 6.21, 6.28, e 6.35. Estas equações e as condições de contorno podem ser adimensionalizadas dividindo todas as variáveis, dependentes e independentes por grandezas constantes, relevantes e significativas:

- Os comprimentos pelo comprimento característico  $L$  (que é o comprimento da placa),
- As velocidades por uma velocidade de referência (que é a velocidade do escoamento livre sobre placa),
- A pressão por  $\rho V^2$  (que é o quadrado da pressão dinâmica do escoamento livre para uma placa), e
- A temperatura por uma diferença apropriada de temperaturas (que é  $T_\infty - T_s$  para uma placa).

## 6.9 Equação de Convecção Adimensional e Similaridade

Os asteriscos são usados para referir as grandezas adimensionais

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V}, \quad P^* = \frac{P}{\rho V^2} \quad \text{e} \quad T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$$

*Continuidade*

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (6.64)$$

*Momentum*

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} - \frac{dP^*}{dx^*} \quad (6.64)$$

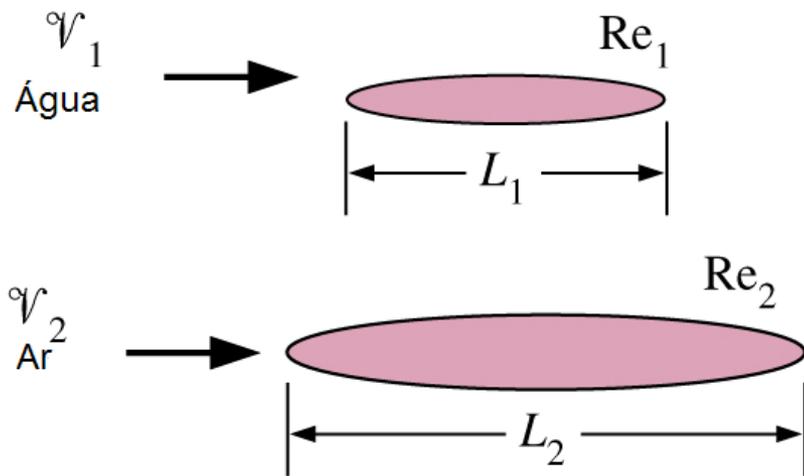
*Energia*

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.66)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u^*(0, y^*) = 1, \quad u^*(x^*, 0) = 0, \quad u^*(x^*, \infty) = 1, \quad v^*(x^*, 0) = 0 \\ T^*(0, y^*) = 1, \quad T^*(x^*, 0) = 0, \quad T^*(x^*, \infty) = 1, \end{aligned} \quad (6.67)$$

## 6.9 Equação de Convecção Adimensional e Similaridade



Se  $Re_1 = Re_2$ , então  $C_{f1} = C_{f2}$

Dois corpos de geometrias similares têm o mesmo valor do coeficiente de fricção para o mesmo número de Reynolds.

## 6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

As três equações da camada limite adimensionalizadas (Eqs. 6.64, 6.65 e 6.66) envolvem três funções desconhecidas  $u^*$ ,  $v^*$  e  $T^*$ , duas variáveis independentes  $x^*$  e  $y^*$ , e dois parâmetros  $Re_L$  e  $Pr$ . A pressão  $P^*(x^*)$  depende da geometria envolvida (é constante para uma placa plana), e tem o mesmo valor dentro e fora da camada limite numa distância  $x^*$  especificada, conseqüentemente, pode-se determinar separadamente nas condições de escoamento livre, e  $dP^*/dx^*$  na Equação 6.65, pode ser tratada como uma função conhecida de  $x^*$ . É de notar que as condições de fronteira não introduzem nenhuns parâmetros novos. Para uma geometria dada, a solução de  $u^*$  pode ser expressa por:

$$u^* = f_1(x^*, y^*, Re_L) \quad (6.68)$$

## 6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

A tensão de cisalhamento à superfície passa a ser

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu V}{L} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \frac{\mu V}{L} f_2(x^*, \text{Re}_L) \quad (6.69)$$

Substituindo pela sua definição encontra-se o coeficiente local de fricção:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_s}{\rho V^2/2} = \frac{\mu V/L}{\rho V^2/2} f_2(x^*, \text{Re}_L) = \frac{2}{\text{Re}_L} f_2(x^*, \text{Re}_L) = f_3(x^*, \text{Re}_L) \quad (6.70)$$

O coeficiente de fricção para uma geometria dada pode ser expresso em função do número de Reynolds  $\text{Re}$  e do espaço adimensional  $x^*$ . Similarmente, a solução da Equação 6.66 para a temperatura adimensional  $T^*$  para uma geometria dada, pode ser expressa como:

$$T^* = g_1(x^*, y^*, \text{Re}_L, \text{Pr}) \quad (6.71)$$

## 6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

Usando a definição de  $T^*$ , o coeficiente de transferência de calor passa a ser

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = \frac{k}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (6.72)$$

Substituindo isto na relação do número de Nusselt obtém-se:

$$Nu_x = \frac{hL}{k} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = g_2(x^*, Re_L, Pr) \quad (6.73)$$

Os coeficientes médios de transferência de calor e de fricção são determinados integrando  $C_{f,x}$  e  $Nu_x$  na superfície do corpo dado em relação a  $x^*$  de 0 a 1. A integração elimina a dependência de  $x^*$ , então os coeficientes médio de fricção e o número de Nusselt podem ser expressos por:

$$C_f = f_4(Re_L) \quad \text{e} \quad Nu = g_3(Re_L, Pr) \quad (6.74)$$

## 6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

As relações anteriores são extremamente úteis porque indicam que para uma geometria dada, o coeficiente de fricção pode ser expresso só em função do número de Reynolds, e o número de Nusselt somente em função dos números de Reynolds e de Prandtl.

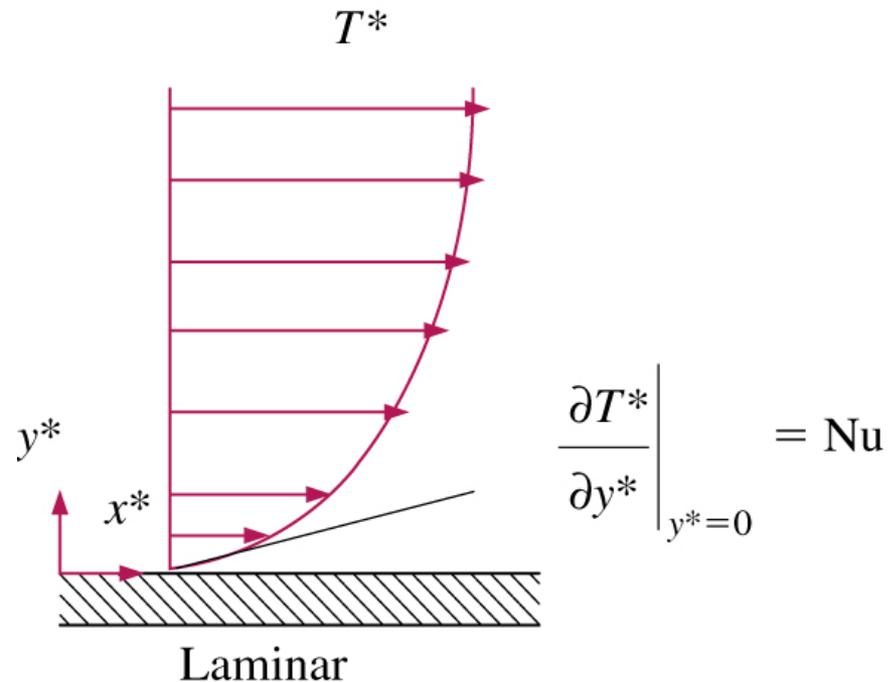
Dados experimentais de transferência de calor podem ser representados com certa precisão por uma expressão exponencial com o seguinte aspecto:

$$Nu = C Re_L^m Pr^n \quad (6.75)$$

onde  $m$  e  $n$  são expoentes constantes (que geralmente variam entre 0 e 1) e  $C$  depende da geometria

## 6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

O número de Nusselt é equivalente ao gradiente adimensional da temperatura na superfície.



## 6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

Em análise da convecção forçada, está-se primeiramente interessado na determinação dos valores de  $C_f$  (para calcular a Tensão de Cisalhamento na parede) e de  $Nu$  (para calcular taxas de transferência de calor). Consequentemente, é desejável ter uma relação entre  $C_f$  e  $Nu$  de modo que se possa calcular um, quando o outro for conhecido. Tais relações são desenvolvidas na base da similaridade entre o momentum e a transferência de calor na camada limite, conhecidas como a analogia de Reynolds e a analogia de Chilton-Colburn.

Reconsidere-se as equações do momentum e de energia adimensionais para um escoamento constante, incompressível, laminar de um fluido com  $Pr = 1$  (que é aproximadamente o caso dos gases) e  $\partial P^*/\partial x^* = 0$  (que é o caso quando,  $u = u_\infty = V = \text{constante}$  no escoamento livre, como no fluxo sobre uma placa plana), estas equações simplificam-se em:

## 6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

*Momentum*

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.76)$$

*Energia*

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.77)$$

que são exactamente da mesma forma para a velocidade  $u^*$  e a temperatura  $T^*$  adimensionais. As condições de fronteira de  $u^*$  e  $T^*$  são também idênticas. Consequentemente, as funções que  $u^*$  e  $T^*$  devem ser idênticas, e assim as primeiras derivadas de  $u^*$  e de  $T^*$  na superfície devem ser iguais,

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.78)$$

## 6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

$$C_{f,x} \frac{\text{Re}_L}{2} = \text{Nu}_x \quad (\text{Pr} = 1) \quad (6.79)$$

que é conhecido como analogia de Reynolds. Esta é uma analogia importante que permite a determinação do coeficiente de transferência de calor para fluidos com  $\text{Pr} \approx 1$ , conhecido o coeficiente da fricção que é mais fácil de medir. A analogia de Reynolds é expressa também alternativamente por:

$$\frac{C_{f,x}}{2} = \text{St}_x \quad (\text{Pr} = 1) \quad (6.80)$$

Onde:

$$\text{St} = \frac{h}{\rho C_p V} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re}_L \text{Pr}} \quad (6.81)$$

é o **número de Stanton**, que é também o **coeficiente adimensional de transferência de calor**.

## 6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

A analogia de Reynolds é de uso restrito por causa das limitações  $Pr = 1$  e  $\partial P^*/\partial x^* = 0$ , é importante ter uma analogia aplicável para um grande espectro de  $Pr$ . Isto consegue-se adicionando um factor de correcção do número de Prandtl. O coeficiente de fricção e o número de Nusselt para uma placa plana foram determinados no Capítulo 6.8 como:

$$C_{f,x} = 0,664 Re_x^{-1/2} \quad \text{e} \quad Nu_x = 0,332 Pr^{1/3} Re_x^{-1/2} \quad (6.82)$$

Fazendo a sua relação e rearranjando os termos chega-se a relação desejada, conhecida como a analogia modificada de Reynolds ou a analogia de Chilton-Colburn,

$$C_{f,x} \frac{Re_L}{2} = Nu_x Pr^{-1/3} \quad \text{ou} \quad \frac{C_{f,x}}{2} \frac{hx}{\rho C_p V} Pr^{-2/3} \equiv j_H \quad (6.83)$$

Para  $0,6 < Pr < 60$ . Onde  $j_H$  é chamado **factor-j de Colburn**