Data: 26/04/2024 **Duração:** 120 minutos

Problema 1 (5 valores)

Considere uma barra metálica alumínio, a condutividade térmica pode ser em torno de k=237 W/m·K, de 1 metro de comprimento. Uma extremidade da barra em x=L está em contacto com um fluido que está à temperatura T_∞=25 °C e a transferência de calor entre a barra e o fluido ocorre por convecção, com o coeficiente de transferência de calor por convecção h=25 W/m²·K. A outra extremidade da barra em (x = 0) é mantida a uma temperatura constante T_0=100 °C. Não há geração de calor dentro da barra. Determine a distribuição da temperatura ao longo da barra e a temperatura a meio desta.

Condições de Contorno:

1. $\left(T(0) = T_0\right)$ (Temperatura na extremidade esquerda fixa)
2. $-k\dfrac{dT}{dx}(L) = h(T(L) - T_\infty$ (Condição de contorno de convecção na extremidade direita)

Equação Diferencial:

A equação de condução de calor unidimensional no regime estacionário, sem geração de calor, é dada por:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Integração da Equação Diferencial:

Integrando a equação diferencial duas vezes, obtém-se:

1. $\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$ implica $\dfrac{dT}{dx} = C_1$ *onde* C_1 é uma constante
2. Integrando $\dfrac{dT}{dx} = C_1$, obtêm-se $T(x) = C_1 x + C_2$

Aplicando a Condição de Contorno em x = 0:

3. Substituindo $x = 0$ e $T(0) = T_0$, tem-se $T_0 = C_2$

Aplicando a Condição de Contorno em x = L :

4. $-k\dfrac{dT}{dx}(L) = h(T(L) - T_\infty)$ substituindo $T(L)$ e $\dfrac{dT}{dx}(L)$:

$$-kC_1 = h(C_1 L + T_0 - T_\infty)$$

Resolvendo para C_1:

$$C_1 = \frac{h(T_\infty - T_0)}{k + hL}$$

Portanto, a solução final para a distribuição de temperatura ao longo da barra é:

$$T(x) = T_0 + \left(\frac{h(T_\infty - T_0)}{k + hL}\right)x$$

Para C_1:

$$C_1 = \frac{h(T_0 - T_\infty)}{k + hL} = \frac{25\times(100-25)}{237+25\times1} = \frac{1875}{262} = 7{,}15°\text{C/m}$$

Portanto, a distribuição da temperatura é:

$$\mathbf{T(x) = 7{,}15x + 100°C}$$

A temperatura no meio da barra $x = 0{,}5m$ será:

$$T(0{,}5) = 7{,}15\times0{,}5 + 100 = 3{,}575 + 100 = \mathbf{103{,}58°C}$$

Problema 2 (5 valores)

Considere uma alheta recta de secção transversal constante feita de alumínio com as seguintes propriedades: Comprimento da alheta, L = 0,5 m; Perímetro, P = 0,12 m; Área da secção transversal, 0,004 m²; Coeficiente de transferência de calor por convecção, h = 25 W/m²K; e a condutividade térmica do alumínio, k = 180 W/mºC.

A base da alheta é mantida a temperatura constante de T_b=100 ºC e a extremidade da alheta está exposta ao ar ambiente a. T_∞=25ºC

1. Calcule a taxa de transferência de calor na alheta.
2. Determine a eficiência da alheta.

Solução

Passo 1: Cálculo do Parâmetro m

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{25\cdot0{,}12}{180\cdot0{,}004}} = \mathbf{2{,}041[1/m]}$$

Passo 2: Cálculo da Taxa de Transferência de Calor na alheta, Q para uma alheta com convecção na extremidade, usa-se:

$$\dot{Q} = \sqrt{hPAk}(T_b - T_\infty)\left(\frac{\sinh(mL) + \frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{mk}\sinh(mL)}\right)$$

$$\dot{Q} = \sqrt{25\cdot0{,}12\cdot0{,}004\cdot180}(100-25)\left(\frac{\sinh(2{,}041\cdot0{,}5) + \frac{25}{2{,}041\cdot180}\cosh(2{,}041\cdot0{,}5)}{\cosh(2{,}041\cdot0{,}5) + \frac{25}{2{,}041\cdot180}\sinh(2{,}041\cdot0{,}5)}\right) = \mathbf{87{,}79[W]}$$

Passo 3: Cálculo da Eficiência da Alheta

- Eficiência da alheta, η:

$$\eta = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

$$\eta = \frac{\tanh(2,041 \cdot 0,5)}{2,041 \cdot 0,5} = \mathbf{75,46\%}$$

Problema 3 (5 valores)

Um cilindro curto de latão (ϱ=8530 kg/m³, Cp=0,389 kJ/kg·°C, k=110 W/m·°C, e $\alpha=3,39 \times 10^{-5}$ m²/s) de diâmetro D=8 cm e altura H=15 cm está inicialmente a temperatura uniforme de T_i=250°C. O cilindro é colocado no ar atmosférico a 25°C, onde a transferência de calor ocorre por convecção com o coeficiente de transferência de calor de h=40 W/m²·°C. Calcule (a) a temperatura no centro do cilindro, (b) a temperatura no centro da superfície superior do cilindro e (c) a transferência total de calor do cilindro 15 minutos após o início do arrefecimento.

Resolução

Um cilindro curto é deixado arrefecer ao ar atmosférico. Devem ser determinadas as temperaturas nos centros do cilindro e na superfície superior, bem como a transferência total de calor do cilindro durante 15 minutos arrefecimento. Suposições: **1** A condução de calor no cilindro curto é bidimensional, e assim a temperatura varia nas direcções axial x e radial r. **2** As propriedades térmicas do cilindro são constantes. 3 O coeficiente de transferência de calor é constante e uniforme em toda a superfície. 4 O número de Fourier é $\tau > 0,2$, de modo que as soluções aproximadas de um termo (ou os gráficos de temperatura transiente) são aplicáveis (essa suposição será verificada).

Propriedades: As propriedades térmicas do latão são dadas para ser $\rho = 8530\ \text{kg/m}^3$, $C_p = 0,389\ \text{kJ/kg}\cdot°\text{C}$, $k = 110\ \text{W/m}\cdot°\text{C}$, e $\alpha = 3.39\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$.

Análise: Este cilindro curto pode fisicamente ser formado pela intersecção de um cilindro longo de raio D/2 = 4 cm e uma parede plana de espessura 2L = 15 cm. Mede-se x a partir do plano médio.
(a) O número de Biot para a parede plana é:

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{(40\ \text{W/m}^2.°\text{C})(0,075\ \text{m})}{(110\ \text{W/m}\cdot°\text{C})} = 0,02727$$

As constantes λ_1 e A_1 correspondentes a este número de Biot, da Tabela 4.1,

$$\lambda_1 = 0,1619 \quad \text{e} \quad A_1 = 1,005$$

O número de Fourier é:

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{(3,39\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})(15\ \text{min}\times 60\ \text{s/min})}{(0,075\ \text{m})^2} = 5,424 > 0,2$$

Portanto, a solução aproximada de um termo (ou os gráficos de temperatura transiente) é aplicável. Então, a temperatura adimensional no centro da parede plana é determinada a partir de.

$$\theta_{o,parede} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} = (1,0050) e^{-(0,162)^2 (5,424)} = 0,8714$$

Repete-se a mesma solução para um cilindro longo,

$$Bi=\frac{hr_0}{k}=\frac{(40\ \text{W/m}^2.°\text{C})(0,04\ \text{m})}{(110\ \text{W/m.°C})}=0{,}01455$$

$$\lambda_1=0{,}1174\quad \text{e}\quad A_1=1{,}0038$$

$$\tau=\frac{\alpha t}{r_o^{\,2}}=\frac{(3{,}39\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})(15\times60\ \text{s})}{(0{,}04\ \text{m})^2}=19{,}069>0{,}2$$

$$\theta_{o,cil}=\frac{T_0-T_\infty}{T_i-T_\infty}=A_1e^{-\lambda_1^2\tau}=(1{,}0038)e^{-(0{,}1174)^2(19{,}069)}=0{,}587$$

Então a temperatura central do cilindro curto torna-se.

$$\left[\frac{T(0,0,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right]_{\substack{cilindro\\curto}}=\theta_{o,parede}\times\theta_{o,cil}=0{,}8714\times0{,}587=0{,}5115$$

$$\frac{T(0,0,t)-25}{250-25}=0{,}5115\longrightarrow T(0,0,t)=\mathbf{140{,}1°C}$$

(*b*) O centro da superfície superior do cilindro ainda está no centro do cilindro longo (r = 0), mas na superfície externa da parede plana (x = L). Portanto, primeiro precisa-se de determinar a temperatura adimensional na superfície da parede.

$$\theta(L,t)_{parede}=\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=A_1e^{-\lambda_1^2\tau}\cos(\lambda_1L/L)=(1{,}0050)e^{-(0{,}1619)^2(5{,}424)}\cos(0{,}1619)=0{,}8714$$

Então, a temperatura central da superfície superior do cilindro torna-se.

$$\left[\frac{T(L,0,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right]_{\substack{cilindro\\curto}}=\theta(L,t)_{parede}\times\theta_{o,cil}=0{,}8714\times0{,}587=0{,}5115$$

$$\frac{T(L,0,t)-25}{250-25}=0{,}5115\longrightarrow T(L,0,t)=\mathbf{140{,}1°C}$$

(*c*) Primeiro, precisa-se de determinar o máximo de calor que pode ser transferido do cilindro.

$$m=\rho V=\rho\pi r_o^{\,2}L=(8530\ \text{kg/m}^3)\left[\pi(0{,}04\ \text{m})^{2.}(0{,}15\ \text{m})\right]=6{,}43\ \text{kg}$$

$$Q_{\max}=mC_p(T_i-T_\infty)=(6{,}43\ \text{kg})(0{,}389\ \text{kJ/kg.°C})(250-25)°\text{C}=562{,}9\ \text{kJ}$$

Então, determinamos as razões de transferência de calor adimensionais para ambas as geometrias como

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{parede}=1-\theta_{o,parede}\frac{\sin(\lambda_1)}{\lambda_1}=1-(0{,}8714)\frac{\sin(0{,}1619)}{0{,}1619}=0{,}9848$$

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{cil}=1-2\theta_{o,cil}\frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}=1-2(0{,}587)\frac{0{,}07247}{0{,}1677}=0{,}4927$$

A taxa de transferência de calor para um cilindro curto passa a ser:

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\substack{cilindro\\curto}}=\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\substack{parede\\pllana}}+\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\substack{cilindro\\longo}}\left[1-\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\substack{parede\\plana}}\right]=\text{Q\_w}=0{,}9848+0{,}4927(1-0{,}9848)=0{,}9923$$

Então, a transferência total de calor do cilindro curto durante os primeiros 15 minutos de arrefecimento torna-se

$$Q = 0{,}9923 \cdot Q_{max} = (0{,}9923)(562{,}9\ \text{kJ}) = \mathbf{558{,}6\ kJ}$$

Problema 4 (5 valores)

Um recipiente rectangular com 30 cm de altura, 20 cm de comprimento e 20 cm de largura, suspenso numa sala à 30˚C, à pressão atmosférica, é inicialmente preenchido com água fria a 4˚C. Considere-se a temperatura da superfície do recipiente a mesma que a temperatura da água dentro. A emissividade da superfície do recipiente é 0,6, e a temperatura das superfícies ao redor do recipiente é aproximadamente a mesma que a temperatura do ar. Determine a temperatura da água no recipiente após 2 horas e a taxa média de transferência de calor para a água. Assuma que o coeficiente de transferência de calor nas superfícies superiores e inferiores seja o mesmo que nas superfícies laterais.

Resolução

Um recipiente rectangular cheio de água fria está ganhando calor do seu arredor por convecção natural e radiação. A temperatura da água no recipiente após 2 horas e a taxa média de transferência de calor devem ser determinadas.

Suposições:

1. Condições de operação são em regime permanente.
2. O ar é um gás ideal com propriedades constantes.
3. A pressão atmosférica local é de 1 atm.
4. O coeficiente de transferência de calor nas superfícies superior e inferior é o mesmo que nas superfícies laterais.

Propriedades:

As propriedades do ar a 1 atm e a temperatura da película antecipada de $(T_s+T_\infty)/2 = (10+30)/2 = 20°C$ são tabelados:

$$k = 0{,}02428\ \text{W/m}\cdot°\text{C}$$

$$\upsilon = 1{,}413\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{Pr} = 0{,}734$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{(20+273)\text{K}} = 0{,}003552\ \text{K}^{-1}$$

As propriedades da água a 4°C estão tabelados como:

$\rho = 1000\text{kg/m}^3$ and $C_p = 4214\text{J/kg.°C}$

Análise:

Primeiro, avalia-se o coeficiente de transferência de calor nas superfícies laterais. O comprimento característico neste caso é a altura do recipiente. $L_c = L = 0{,}30\ \text{m}$

Então,

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta(T_\infty - T_s)L^3}{\upsilon^2}\mathrm{Pr} = \frac{(9{,}81\ \mathrm{m/s^2})(0{,}003552\ \mathrm{K^{-1}})(30-10\ \mathrm{K})(0{,}30\ \mathrm{m})^3}{(1{,}413\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s})^2}(0{,}734) = 7{,}955\times10^7$$

$$Nu = \left\{0{,}825 + \frac{0{,}387\mathrm{Ra}^{1/6}}{\left[1+\left(\frac{0{,}492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = \left\{0{,}825 + \frac{0{,}387(7{,}955\times10^7)^{1/6}}{\left[1+\left(\frac{0{,}492}{0{,}734}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = 55.72$$

$$h = \frac{k}{L}Nu = \frac{0{,}02428\ \mathrm{W/m.°C}}{0{,}30\ \mathrm{m}}(55{,}72) = 4{,}509\ \mathrm{W/m^2.°C}$$

$$A_s = 2(0{,}30\times0{,}20 + 0{,}30\times0{,}20 + 0{,}20\times0{,}20) = 0{,}32\ \mathrm{m^2}$$

A taxa de transferência de calor pode ser expressa como

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\mathrm{conv}} + \dot{Q}_{\mathrm{rad}} = hA_s\left(T_\infty - \frac{T_1+T_2}{2}\right) + \varepsilon\sigma A_s\left[T_{\mathrm{surr}}{}^4 - \left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)^4\right]$$

$$= (4{,}509\ \mathrm{W/m^2\cdot°C})(0{,}32\ \mathrm{m^2})\left[303\text{-}\left(\frac{277+T_2}{2}\right)\right] \qquad \text{(Equação 1)}$$

$$+(0{,}6)(0{,}32\ \mathrm{m^2})(5{,}67\times10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\cdot K^4})\left[303^4\text{-}\left(\frac{277+T_2}{2}\right)^4\right]$$

onde $(T_1 + T_2)/2$ é a temperatura média da água (ou da superfície do recipiente). A massa de água no recipiente é

$$m = \rho V = (1000\ \mathrm{kg/m^3})(0{,}30\times0{,}20\times0{,}20)\mathrm{m^3} = 12\ \mathrm{kg}$$

Então, a quantidade de transferência de calor para a água é

$$Q = mC_p(T_2 - T_1) = (12\ \mathrm{kg})(4214\ \ \mathrm{J/kg.°C})(T_2\text{-}277)\mathrm{°C} = 50568\cdot(T_2\text{-}277)$$

A taxa média de transferência de calor pode ser expressa como

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{50568(T_2\text{-}275)}{3\times3600\ \mathrm{s}} = 4{,}6822\cdot(T_2\text{-}277) \quad \text{(Equação 2)}$$

Igualando a Eq. 1 e Eq. 2, obtemos a temperatura final da água.

$$T_2 = 285{,}3\ \mathrm{K} = \mathbf{12{,}3°C}$$

Poder-se-ia repetir a solução usando as propriedades do ar na nova temperatura da película usando esse valor para aumentar a precisão. No entanto, isso só afectaria um pouco o valor da transferência de calor, o que não teria um efeito significativo na temperatura final da água. A taxa média de transferência de calor pode ser determinada a partir da Equação. 2.

$$\dot{Q} = 394634\cdot(11{,}85\text{-}4) = \mathbf{54.81\ W}$$

Bom trabalho!
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu
(Professor Associado)