Optimização

Aula 10

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear (PL)

Aula 10: Método Simplex

Técnica das variáveis artificias

– Método das penalidades (“Big M”).

– Método das duas fases.

Modificando o Exemplo Protótipo.

Suponha-se que é modificado o exemplo protótipo requerendo agora que a capacidade de produção da Secção 3 seja utilizada no máximo da sua disponibilidade (18 unidades).

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad\quad\quad & \leq 4 \\
2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 & = 18 \\
x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Em vez de desigualdade, tem-se uma igualdade

Modificando o Exemplo Protótipo...

Como a ***Restrição 3*** do problema é uma restrição de igualdade, para reduzir o problema à ***forma padrão*** apenas é preciso adicionar **duas** variáveis de folgas $\boldsymbol{x_3}$ **,** $\boldsymbol{x_4}$.

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad & \leq 4 \\ 2x_2 & \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & = 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 \quad\quad & = 4 \\ 2x_2 + x_4 & = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad & = 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Agora surgiu um problema: a matriz A não contém uma submatriz identidade.

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad + x_3 \quad\quad &= 4 \\ 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

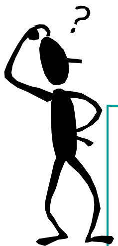
Uma variável pode ser tomada como **básica** desde que tenha coeficiente **1** na equação em presença e coeficientes **nulos** nas restantes

não existe uma ***variável de folga*** *que possa ser utilizada como* ***variável básica inicial para a Equação 3.***

a matriz ***A*** *que corresponde ao sistema de equações* ***não contém*** *uma* ***submatriz identidade B.***

resulta ***difícil*** *identificar* ***uma SBA inicial.***

Técnica das Variáveis Artificiais.

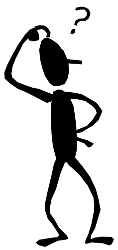


O que fazer se na forma padrão de um problema de PL ***não é possível identificar uma SBA inicial***, i.e., a matriz A das restrições não contém uma submatriz identidade?

O procedimento usual que é utilizado nestes casos é *a técnica das variáveis artificiais.*

A *técnica das variáveis artificias* é um procedimento integrado no *método simplex* que permite ultrapassar
o desconhecimento de qualquer SBA inicial num problema de PL na forma padrão.

Técnica das Variáveis Artificiais.



Em que consiste *a técnica das variáveis artificiais*?

A ***técnica das variáveis artificiais*** consiste em construir um ***problema auxiliar*** introduzindo ***uma nova variável***, chamada ***variável artificial***, em cada uma das restrições onde não foi possível ***adicionar uma variável de folga***, sendo esta tomada ***como variável básica para essa equação.*** *Desta forma fica garantida* ***a existência de uma variável básica em cada equação*** e ***a possibilidade de identificar uma SBA inicial***.

Técnica das Variáveis Artificiais. Objectivo.

- O objectivo desta técnica consiste em:
  - conseguir que, no problema auxiliar, as iterações do método simplex automaticamente forcem a anulação das *variáveis artificias*, uma por uma, até que sejam todas eliminadas. Este facto significa que pode ser obtida uma SBA para o problema original de PL.

As variáveis artificias não podem ser confundidas com as variáveis de folga, não têm qualquer significado económico, são um mero artifício matemático.

Métodos que Implementam a Técnica das Variáveis Artificiais.

Existem dois métodos alternativos que implementam esta técnica, determinando duas variantes do método Simplex:

1. **O método das Penalidades ("big-M").**
(Charnes, Cooper, Henderson-1953)

2. **O método das Duas Fases.**
(Dantzing, Order, Wolfe - 1954)

Método das Penalidades ("big-M").

Neste método, as variáveis artificias são ***"fortemente" penalizadas*** na função objectivo do problema de PL de modo a provocar **"*rapidamente*"** o seu anulamento.

Assim como coeficientes das variáveis artificias na f.o. é introduzido **um parâmetro M** (*uma constante positiva arbitrariamente grande*)

Método do do "big-M".

Considere o problema de PL na forma padrão:

– os termos independentes $b_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,m$

– não existe qualquer variável que possa ser tomada como básica.

Para a aplicação do método do "Big-M" passa-se ao seguinte problema auxiliar:

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad &= b_2 \\
&\ \vdots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} &= b_m \\
x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,n+m &
\end{aligned}$$

$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ - *variáveis artificias,*

M - *coeficiente de penalização atribuído a estas variáveis*

Método do “big-M”.

– Uma SBA do problema auxiliar é uma SBA do problema original se ***as variáveis artificias da solução são nulas.***

– Se a solução óptima do problema auxiliar é uma SBA do problema original, então esta solução ***também é óptima*** para o problema original.

– O método Simplex, na medida em que procede à melhoria da f.o., tenderá "naturalmente" a ***eliminar da base as variáveis artificias,*** pois estão penalizadas com coeficientes arbitrariamente grandes:

- **- M** - nos problemas de maximização
- **M** - nos problemas de minimização

Método do "big-M".

Obviamente que os vectores candidatos a entrar na base devem ser escolhidos apenas entre
os vectores não artificias
(a penalidade M para as variáveis artificias impede a re-entrada destas)

Como habitualmente no método Simplex, para determinar a variável ***que entra*** selecciona-se aquela com *maior custo reduzido* entre as que tenham o custo reduzido positivo.

Como habitualmente no método Simplex, para determinar a variável ***que sai*** selecciona-se aquela que atinge ***o mínimo dos quocientes***.

O algoritmo Simplex para o problema auxiliar culmina numa das seguintes situações:

1ª. Todos os vectores artificiais foram eliminados da base.

Obteve-se uma SBA do problema original. A partir deste momento retoma-se o critério habitual do método simplex até se atingir uma solução óptima.

2ª. Ainda subsistem vectores artificiais na base e todos os custos reduzidos são não positivos (quadro óptimo).

Neste caso existem duas alternativas:

a) *Existe pelo menos uma variável artificial básica com valor estritamente positivo.* → *o conjunto K é vazio, o problema é impossível.*

b) *Todas as variáveis artificias são nulas.* → *encontrou-se uma SBA inicial para o problema inicial (que ou é degenerada ou se obtém eliminando restrições redundantes)*

Método do “big-M”: ainda subsistem vectores artificiais...

2ª. Ainda subsistem vectores artificias na base e todos os custos reduzidos são não positivos (quadro óptimo).

a) existe **pelo menos uma** variável artificial básica com valor estritamente positivo

o sistema de restrições para o problema auxiliar só é satisfeito com variáveis artificiais ***estritamente positivas****.*

as restrições do problema original ***são incompatíveis****.*

o conjunto K é vazio, ***o problema é impossível.***

Método do "big-M": ainda subsistem vectores artificiais...

2ª. Ainda subsistem vectores artificias na base e todos os custos reduzidos são não positivos (quadro óptimo).

b) Todas as variáveis artificias são **nulas**.

Existe *pelo menos um vector não artificial fora da base* que pode substituir um vector artificial

procede-se à sua substituição

obtém-se uma SBA inicial degenerada para o problema original

Não existe *nenhum vector não artificial fora da base* que pode substituir um vector artificial

existem restrições redundantes

eliminam-se do quadro Simplex as linhas correspondentes às *variáveis artificiais básicas* e obtém-se uma SBA inicial para o problema original

Método do big "M".
Exemplo Protótipo Modificado.

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 & & \le 4 \\ & 2x_2 & \le 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & = 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Este problema não contém uma **submatriz identidade, pelo que** é adicionada **uma variável artificial** $\mathbf{x_5}$.
Passa-se a resolver este problema auxiliar

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2 - M x_5$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad & = 4 \\ 2x_2 \quad + x_4 \quad & = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 & = 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^0 = \begin{pmatrix} P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo Protótipo Modificado: Solução a.

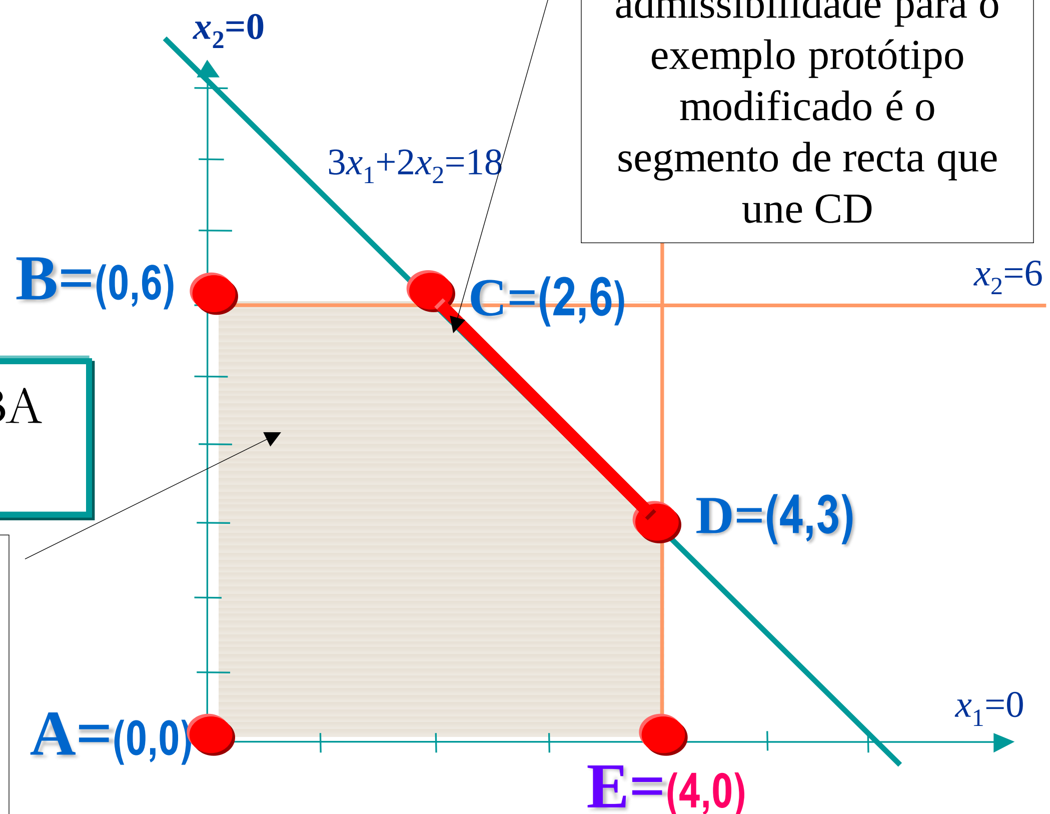
variável artificial

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2 - Mx_5$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + x_3 \quad &= 4 \\
2x_2 \quad + x_4 \quad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 &= 18 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

A região de admissibilidade para o exemplo protótipo modificado é o segmento de recta que une CD



Agora é possível identificar uma SBA inicial $\mathbf{X}^0 = (0,0,4,12,18)$.

A região de admissibilidade do problema auxiliar (com a introdução de uma variável artificial) é aumentada: de um segmento de recta no problema original pasa-se a toda a região sombreada.

Do ponto de vista geométrico o efeito de passar a um problema auxiliar com variáveis artificias é equivalente a **aumentar a região de admissibilidade** .

Exemplo Protótipo Modificado: Método do "big-M".

$z_0 = 0 \times 4 + 0 \times 12 - M \times 18 = -18\,M$

$X^0 = (0,0,4,12,18)$ contêm a variável artificial $x_5 = 18$

Calculando os custos reduzidos:

Para as variáveis básicas $c_j - z_j = 0$

$c_1 - z_1 = 3 - (0 \times 1 + 0 \times 0 - M \times 3) = 3 + 3\,M$

$c_2 - z_2 = 5 - (0 \times 0 + 0 \times 2 - M \times 2) = 5 + 2\,M$

	c_j	3	5	0	0	-M	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	1	0	1	0	0	4 mínimo
0	x_4	0	2	0	1	0	12
-M	x_5	3	2	0	0	1	18
	z_j	-3M	-2M	0	0	-M	-18M
	$c_j - z_j$	3+ 3M máximo	5+2M	0	0	0	
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
-M	x_5	0	2	-3	0	1	6

Calculando o novo quadro:

Linha 1 e 2: NÃO MUDAM

Linha3: *linha anterior* - (*coeficiente coluna* ***pivotal*** *x nova* linha ***pivotal***)

	3	2	0	0	1	18
-(3)	1	0	1	0	0	4
	0	2	-3	0	1	6

Método Big "M"...

$X^1=(4,0,0,12,6)$ contêm a variável artificial $x_5 = 6$

$z_0 = 3 \times 4 + 0 \times 12 - M \times 6 = 12 - 6M$

Calculando os custos reduzidos:

Para as variáveis básicas $c_j - z_j = 0$

$c_2 - z_2 = 5 - (3 \times 0 + 0 \times 2 - M \times 2) = 5 + 2M$

$c_3 - z_3 = 0 - (3 \times 1 + 0 \times 0 - M \times -3) = -3 - 3M$

	c_j	3	5	0	0	-M	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
-M	x_5	0	2	-3	0	1	6
	z_j	0	-2M	3+3M	0	-M	12 -6 M
	$c_j - z_j$	0	5+2M *máximo*	-3-3M	0	0	
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
5	x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3

Calculando o novo quadro:

Linha 3: dividir pelo pivot 2

Linha 1: NÃO MUDA

Linha2: linha anterior - (coeficiente coluna pivotal x nova linha pivotal)

	0	2	0	1	0	12
-(2)	0	1	-3/2	0	1/2	3
	0	0	3	1	-1	6

A nova solução $X^2 = (4,3,0,6,0)$ não contém variáveis artificiais.

Exemplo Protótipo Modificado: Método Big "M"...

A SBA $\mathbf{X^2} = \mathbf{(4,3,0,6,0)}$ é a SBA inicial para o problema original.

Linha 2: *linha pivotal*
dividir pelo pivot: 3

Linha1: linha anterior - (coeficiente coluna pivotal **x nova** linha pivotal)

	1	0	1	0	0	4
-(1)	0	0	1	1/3	-1/3	2
	1	0	0	-1/3	1/3	2

Linha3: linha anterior - (coeficiente coluna pivotal x nova linha pivotal)

	0	1	-3/2	0	1/2	3
-(-3/2)	0	0	1	1/3	-1/3	2
	0	1	0	1/2	0	6

C_B	c_j	3	5	0	0	-M	
	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
5	x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3
	z_j	3	5	-9/2	0	5/2	27
	c_j-z_j	0	0	9/2	0	-M-5/2	
3	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
5	x_2	0	1	0	1/2	0	6

A nova SBA é $\mathbf{X^3} = \mathbf{(2,6,2,0,0)}$

Exemplo Protótipo Modificado: Método Big "M"...

$X^3 = (2,6,2,0,0)$

Calculando os custos reduzidos:

Para as variáveis básicas $c_j - z_j = 0$

$c_4 - z_4 = 0 - (3x(-1/3) + 0 + 5x(1/2))$
$= 1 - 5/2 = -3/2$

$c_5 - z_5 = -M - (3 \times (1/3) + 0 + 0)$
$= -M - 1$

A SBA **$X^3 = (2,6,2,0,0)$** é óptima.

	c_j	3	5	0	0	-M	B^{-1}
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
3	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
5	x_2	0	1	0	1/2	0	6
	z_j	3	5	0	3/2	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	-3/2	-M-1	

Nas colunas onde no quadro inicial se encontrava a matriz identidade, correspondentes às variáveis de folga x_3 e x_4 e à variável artificial x_5, encontra-se a inversa da base B^{-1} correspondente à solução actual.

Exemplo 2: SBA Inicial Degenerada.

Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_4 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Este problema está na forma padrão e não contém uma submatriz identidade, mas existe ***um vector unitário, o vector*** $\mathbf{P_3}$. *Neste caso é preciso* ***adicionar duas variáveis artificiais*** x_5 ***e*** x_6

Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + x_3 - Mx_5 - Mx_6$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_4 + x_6 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

x_5, x_6 *- variáveis artificiais*

$$A = \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^0 = \begin{array}{ccc} P_5 & P_6 & P_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2: SBA Inicial Degenerada.

*Considere-se o seguinte quadro correspondente ao problema do Exemplo 2. A solução é óptima (todos os custos reduzidos são não positivos), mas existe ainda uma variável artificial básica x_5 **nula**. Deve proceder-se à sua substituição por um vector não artificial.*

C_B	c_j / X_B	1 x_1	2 x_2	1 x_3	0 x_4	-M x_5	-M x_6	$\bar{b}$
-M	x_5	0	-1/2	0	-3/2	1	-1/2	0
1	x_1	1	3/2	0	3/2	0	1/2	6
1	x_3	0	-2	1	-2	0	-1	6
	z_j	1	–1/2-1/2M	1	–1/2+3/2M	–M	1/2+1/2M	12
	$c_j - z_j$	0	5/2-1/2M	0	1/2-3/2M	0	1/2-3/2M	
2	x_2	0	1	0	3	-2	1	0
1	x_1	1	0	0	-3	3	-1	6
1	x_3	0	0	1	4	-4	1	6
	z_j	1	2	1	7	-5	2	12
	$c_j - z_j$	0	0	0	-7	5-M	-2-M	

Um vector artificial está em condições de ser substituído na base desde que na intersecção da respectiva linha com as colunas associadas aos vectores não artificiais exista pelo menos um elemento diferente de zero, tomando como pivot qualquer deles.

Toma-se por exemplo x_2 para substituir x_5 (isto é possível porque na intersecção da coluna correspondente a x_2 com a linha correspondente a x_5 está um elemento não nulo)

A SBA $X^*=(6, 0, 6, 0)$ é degenerada e óptima

Método das Duas Fases.

O problema de PL é resolvido em duas fases:

1ª Fase: Constrói um novo problema auxiliar com o objectivo de obter uma SBA inicial para o problema original (se isto é possível).

2ª Fase: Tomando como SBA inicial a solução obtida na 1ª Fase, aplica-se o algoritmo Simplex, para determinar a solução óptima.

Método das Duas Fases.

Considere o problema de PL na forma padrão:

- os termos independentes $b_j \geq 0, j=1,2,\ldots,m$
- não existe qualquer variável que possa ser tomada como básica.

Para a aplicação do método das duas fases é preciso construir o seguinte problema auxiliar:

o objectivo consiste em minimizar a soma das variáveis artificias

$$\text{Minimizar } z' = x_{n+1} + x_{n+2} \ldots + x_{n+m}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \quad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} \quad &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,n+m$$

$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ - *variáveis artificias.*

Método das Duas Fases.

– Qualquer SBA do problema auxiliar é uma SBA do problema original se as ***variáveis artificiais*** da solução são *nulas*.

– Obtém-se uma SBA com as variáveis artificiais iguais a zero se e só se o valor da f.o. artificial for igual a zero (z'=0).

– A aplicação do algoritmo Simplex ***eliminará da base os vectores artificiais*** (caso o problema não seja impossível), pois as variáveis iniciais (não artificiais) têm coeficientes nulos na f.o. que se pretende minimizar.

Método das Duas Fases...

No fim da 1ª fase, em que se atingiu a solução óptima do problema auxiliar, está-se perante uma das seguintes situações:

1º. Todos os vectores artificiais foram eliminados da base($z'=0$).

Obteve-se uma SBA do problema original, pelo que a SBA obtida constitui uma SBA inicial para o problema original. Passa-se directamente à 2ª fase do método Simplex.

2º. Ainda subsistem vectores artificias na base.

Existem duas alternativas:

$z'>0$: existe pelo menos uma variável artificial básica com valor estritamente positivo → O conjunto K é *vazio*, o problema é *impossível.*

$z'=0$: todas as variáveis artificias são nulas. → Obtém-se ou uma SBA inicial degenerada ou uma restrição redundante.

Método das Duas Fases.

2º. Ainda subsistem vectores artificias na base e $z'=0$

Existe *pelo menos um vector não artificial fora da base* que pode substituir um vector artificial

procede-se à sua *substituição*

obtém-se uma
SBA inicial degenerada
para o problema original

Não existe *nenhum vector não artificial fora da base* que pode substituir um vector artificial

existem *restrições redundantes*

eliminam-se do quadro simplex as linhas correspondentes às *variáveis artificiais básicas* e obtém-se uma SBA inicial para o problema original

Método das duas fases. Exemplo.

***Redução à forma padrão**: introduzem-se duas variáveis de folga* x_4, x_5

Minimizar $z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad & + 3x_3 \geq 3 \\ 2x_2 & + 2x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

Minimizar $z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad & + 3x_3 - x_4 \quad\quad = 3 \\ 2x_2 & + 2x_3 \quad\quad - x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{aligned}$$

Como não é possível identificar uma matriz identidade introduz-se uma variável artificial x_6 na restrição nº 2 (para a equação nº1 a variável x_1 pode ser tomada como variável básica inicial).

Minimizar $z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad & + 3x_3 - x_4 \quad\quad\quad\quad = 3 \\ 2x_2 & + 2x_3 \quad\quad - x_5 + x_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 \end{aligned}$$

x_6**- variável artificial**

$$A = \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^0 = \begin{array}{cc} P_1 & P_6 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método das Duas Fases. Exemplo: 1ª Fase.

Na 1ª fase aplica-se o método Simplex ao problema auxiliar para determinar uma SBA inicial para a 2ª Fase:

Minimizar $z' = x_6$

sujeito a

$$x_1 + 3x_3 - x_4 = 3$$
$$2x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

x_6 - *variável artificial*

	c_j	0	0	0	0	0	1	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
0	x_1	1	0	3	-1	0	0	3
1	x_6	0	2	2	0	-1	1	5
	z_j	0	2	2	0	-1	1	5
	$z_j - c_j$	0	2	2	0	-1	0	
0	x_1	1	0	3	-1	0	0	3
0	x_2	0	1	1	0	-1/2	1/2	5/2
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	-1	

A SBA inicial para a 2ª fase é $X^0=(3,5/2,0,0,0)$

Método das Duas Fases. Exemplo: 2ª Fase.

Na 2ª fase aplica-se o método Simplex ao problema original para determinar a solução óptima (se existe).

Minimizar $z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$

sujeito a

$$x_1 + 3x_3 - x_4 = 3$$
$$2x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

x_6 - variável artificial

C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
	c_j	4	12	18	0	0	0	
4	x_1	1	0	3	-1	0	0	3
12	x_2	0	1	1	0	-1/2	1/2	5/2
	z_j	4	12	24	-4	-6	6	42
	$z_j - c_j$	0	0	6	-4	-6	6	
18	x_3	1/3	0	1	-1/3	0	0	1
12	x_2	-1/3	1	0	1/3	-1/2	1/2	3/2
	z_j	2	12	18	-2	-6	6	36
	$z_j - c_j$	-2	0	0	-2	-6	6	

A solução óptima é $X^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

Método das duas fases. Exemplo ...

$$A = \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^0 = \begin{array}{cc} P_1 & P_6 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_B	c_j / x_B	4	12	18	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
4	x_1	1	0	3	-1	0	0	3
12	x_2	0	1	1	0	-1/2	1/2	5/2
	z_j	4	12	24	-4	-6	6	42
	$z_j - c_j$	0	0	6	-4	-6	6	
18	x_3	1/3	0	1	-1/3	0	0	1
12	x_2	-1/3	1	0	1/3	-1/2	1/2	3/2
	z_j	2	12	18	-2	-6	6	36
	$z_j - c_j$	-2	0	0	-2	-6	6	

A inversa da base encontra-se na colunas correspondentes à variável x_1 e à variável artificial x_6

A base que corresponde à solução óptima $X^*=(0,3/2,1,0,0)$

$$B = \begin{array}{cc} P_3 & P_2 \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Conclusões.

A técnica de variáveis artificiais, como parte integrante do método Simplex, constitui uma técnica matemática suficientemente geral que permite resolver qualquer tipo de problema de PL, independentemente da natureza das restrições do problema, detectando ainda, se esse for o caso, a existência de restrições redundantes e a inexistência de soluções admissíveis.