Optimização

Aula 12

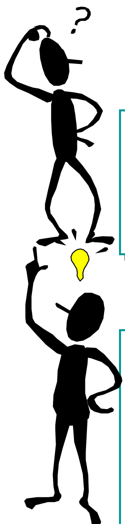
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear (PL)

Aula 12: Dualidade.

Definição do Problema Dual.

Definição do problema dual.



O que é *dualidade em Programação Linear*?

Dualidade significa a *existência de um* ***outro problema de PL****,* *associado* ***a cada problema de PL****.*

Esse outro problema *designa-se por*

***problema dual* (D).**

Nesta relação com *o problema dual o problema original designa-se por*

***problema primal* (P).**

O par de problemas duais (P) – (D).

Os problemas *primal* (P) e *dual* (D) são conhecidos por *par de problemas duais* (P)-(D)

- (P)-(D) são suportados pelo mesmo sistema de parâmetros;
- a resolução de um deles constitui a resolução simultânea do outro;
- a solução de um, está completamente determinada pela solução do outro.

O par de problemas duais (P)- (D) não é mais do que um par de representações matemáticas do mesmo problema real.

Relações entre o par de problemas duais.

	um problema		o outro problema
1ª	*uma restrição*	→	*uma variável*
2ª	*uma variável*	→	*uma restrição*
3ª	*matriz A*	→	*matriz A transposta*
4ª	*um coeficiente da f.o*	→	*um termo independente*
5ª	*um termo independente*	→	*um coeficiente da f.o.*

Relações entre o par de problemas duais.

um problema	o outro problema
6ª *um problema de maximização com restrições de desigualdade do tipo* ($\leq$)	*um problema de minimização com restrições de desigualdade do tipo* ($\geq$)
7ª *um problema de minimização com restrições de desigualdade do tipo* ($\geq$)	*um problema de maximização com restrições de desigualdade do tipo* ($\leq$)

Par de Problemas Duais na forma canónica.

Problema Primal

Maximizar $z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

i=1,…,M, j=1,…,N

Problema Dual

Minimizar $w = \sum_{i=1}^{M} b_i y_i$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{M} a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$y_i \geq 0$$

i=1,…,M, j=1,…,N

Definição do Problema Dual.

O dual do problema dual é

o problema primal.

A relação entre os dois problemas

é ***recíproca****.*

Se um dos problemas

indistintamente foi designado

primal,

então o outro é designado

dual.

Diagrama de Tucker para os problemas (P)-(D).

(D): $w = b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m$

(D): $a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\ldots a_{mj}y_m \geq c_j$

Problema primal

	$x_1\geq0$	$x_2\geq0$	….	$x_n\geq0$	*Min w*
$y_1\geq0$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\leq b_1$
$y_2\geq0$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\leq b_2$
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
$y_m\geq0$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$
	$\geq$	$\geq$		$\geq$	
Max z	c_1	c_2	…	c_n	

Problema dual

b_i - termos independentes do **(P)**

b_i - coeficientes da f.o. do **(D)**

(P): $z = c_1x_1+c_2x_2+\ldots c_nx_n$

(P): $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots a_{in}x_n \leq b_i$

c_j - termos independentes do **(D)**

c_j - coeficientes da f.o do **(P)**

Diagrama de Tucker para o Exemplo Protótipo.

(P)- 2 *variáveis*: x_1, x_2

(D)- $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

(D)- 3 *variáveis*: y_1, y_2, y_3

(P)- *1ª rest.*: $x_1 \leq 4$

(P)- *2ª rest.*: $2x_2 \leq 12$

(P)- *3ª rest.*: $3x_1 + 2x_1 \leq 18$

(D)- *1ª rest.*: $y_1 \quad + 3y_3 \geq 3$

(D) *-2ª rest.*: $2y_2 + 2y_3 \geq 5$

(P): $z = 3x_1 + 5x_2$

	Problema primal		
	$x_1\geq0$	$x_2\geq0$	*Min w*
$y_1\geq0$	1	0	≤ 4
$y_2\geq0$	0	2	≤ 12
$y_3\geq0$	3	2	≤ 18
	$\geq$	$\geq$	
Max z	3	5	
	Problema dual		

Exemplo Protótipo: Par de Problemas Duais

Problema Primal

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$
\begin{array}{rcrl}
x_1 & & & \leq 4 \\
& & 2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \leq 18
\end{array}
$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema Dual

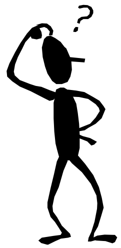
Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

sujeito a

$$
\begin{array}{rrrl}
y_1 & & +3y_3 & \geq 3 \\
& 2y_2 & +2y_3 & \geq 5
\end{array}
$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Solução do problema dual. Exemplo protótipo.



Como determinar *a solução do problema dual* para o *exemplo protótipo*?

A solução para *o problema dual do exemplo protótipo* foi já determinada e pode ser encontrada no quadro óptimo do problema primal na linha dos z_j correspondentes às variáveis de folgas x_3, x_4, x_5, onde inicialmente se encontrava a base inicial.

Solução do problema dual.Exemplo protótipo.

Quadro optimo do problema primal

C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
	c_j	3	5	0	0	0	
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

colunas correspondentes à inversa da base associada à solução óptima

a solução óptima para o problema dual é:

$y_1 = 0$,

$y_2 = 3/2$,

$y_3 = 1$

as variáveis de folga do dual têm valor simétrico ao valor dos custos reduzidos correspondentes às colunas das variáveis de decisão

$y_4 = 0$, $y_5 = 0$

Caso 1: Uma restrição de desigualdade do tipo oposto...

Se uma restrição de desigualdade for ***do tipo oposto*** *ao da respectiva forma canónica*, então ***a correspondente variável dual é não positiva.***

Prova: Considere um problema de *maximização* contendo *restrições de desigualdade do tipo* (**≥**).

maximizar $z=\sum_{j=1}^{N} c_j x_j$

sujeito a:

$$\sum_j a_{i_1 j} x_j \le b_{i_1} \qquad i_1 = 1,2,\ldots,p$$

$$\sum_j a_{i_2 j} x_j \ge b_{i_2} \qquad i_2 = p+1, p+2,\ldots,M$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots\ldots N$$

As restrições de desigualdades do tipo (≥) podem ser sempre convertidas em restrições do tipo (≤) multiplicando por (-1) ambos os membros.

$$-\sum_j a_{i_2 j} x_j \le -b_{i_2} \qquad i_2 = p+1, p+2,\ldots,M$$

Caso 1: Uma restrição de desigualdade do tipo oposto...

Designando por y_{i1} e y'_{i2} *as variáveis duais correspondentes* às restrições de desigualdade tem-se *o problema dual*:

minimizar $w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} - \sum_i b_{i_2} y'_{i_2}$

sujeito a:

$$\sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} - \sum_i a_{i_2 j} y'_{i_2} \geq c_j \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots N$$

$$y_{i_1}, y'_{i_2} \geq 0 \quad i_1 = 1,2,\ldots,p \qquad i_2 = p+1, p+2,\ldots,M$$

$$y_{i_2} = -y'_{i_2} \leq 0$$

minimizar $w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} + \sum_i b_{i_2} y_{i_2}$

sujeito a:

$$\sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} + \sum_i a_{i_2 j} y_{i_2} \geq c_j \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots N$$

$$y_{i_1} \geq 0 \quad i_1 = 1,2,\ldots,p$$

$$\boxed{y_{i_2} \leq 0 \quad i_2 = p+1, p+2,\ldots,M}$$

a cada restrição de desigualdade do tipo oposto corresponde uma variável dual ***não positiva***

Caso 1: Uma restrição de desigualdade do tipo oposto.

Problema Primal

Maximizar $z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$

sujeito a

$\sum_j a_{i_1 j} x_j \le b_{i_1}$ $\quad i_1 = 1,2,\ldots,p$

$\boxed{\sum_j a_{i_2 j} x_j \ge b_{i_2}}$ $\quad i_2 = p+1, p+2,\ldots,M$

$x_j \ge 0$ $\quad j = 1,2,\ldots\ldots.N$

Problema Dual

Minimizar $w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} + \sum_i b_{i_2} y_{i_2}$

sujeito a

$\sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} + \sum_i a_{i_2 j} y_{i_2} \ge c_j$

$y_{i_1} \ge 0$ $\quad i_1 = 1,2,\ldots,p$

$\boxed{y_{i_2} \le 0}$ $\quad i_2 = p+1, p+2,\ldots,M$

$j = 1,2,\ldots\ldots.N$

Caso 1: Exemplo.

Problema Primal

Minimizar $z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & \geq & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 18 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & \geq & 12 \\ \boxed{4x_1} & \boxed{+} & \boxed{x_2} & \boxed{+} & \boxed{x_3} & \boxed{\leq} & \boxed{22} \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema Dual

Maximizar $w = 5y_1 + 18y_2 + 12y_3 + 22y_4$

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} y_1 & & & + & 2y_3 & + & 4y_4 & \leq & 5 \\ & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & \leq & 1 \\ y_1 & + & 2y_2 & & & + & y_4 & \leq & 3 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, \boxed{y_4 \leq 0}$$

Como esta restrição é de ***tipo oposto*** *corresponde-lhe uma variável dual* ***não positiva***

Caso 2: Uma restrição de igualdade.

Se uma restrição *for de igualdade,*
então **a correspondente variável dual *é livre***.

Pode ser demonstrado a partir do facto de que ***qualquer restrição de igualdade*** *pode ser convertida* ***em duas restrições de desigualdade*** *de um mesmo tipo.*

Provar!!!

Caso 2: Uma restrição de igualdade.

Problema Primal

Maximizar $z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$

sujeito a

$\sum_j a_{i_1 j} x_j \leq b_{i_1}$ $\quad i_1 = 1,2,\ldots, p$

$\boxed{\sum_j a_{i_2 j} x_j = b_{i_2}}$ $\quad i_2 = p+1, p+2,\ldots, M$

$x_j \geq 0$ $\quad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots N$

Problema Dual

Minimizar $w = \sum_i b_{i_1} y_{i_1} + \sum_i b_{i_2} y_{i_2}$

sujeito a

$\sum_i a_{i_1 j} y_{i_1} + \sum_i a_{i_2 j} y_{i_2} \geq c_j$

$y_{i_1} \geq 0$ $\quad i_1 = 1,2,\ldots, p$

$\boxed{y_{i_2} \ \text{livres}}$ $\quad i_2 = p+1, p+2,\ldots, M$

$j = 1,2,\ldots\ldots\ldots N$

Relações primal-dual.

Problema Primal Maximização	Problema dual Minimização
uma restrição i	***uma variável*** i
$\leq$	≥ 0
$\geq$	≤ 0
$=$	livre
uma variável j	***uma restrição*** j
≥ 0	$\geq$
≤ 0	$\leq$
livre	$=$

Restrição de tipo oposto

Restrição de tipo oposto

Relações primal-dual.

Problema Primal. Minimização	Problema dual. Maximização
uma restrição i	***uma variável i***
$\geq$	≥ 0
$\leq$	≤ 0
$=$	*livre*
uma variável j	***uma restrição j***
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
livre	$=$

Restrição de tipo oposto

Restrição de tipo oposto

Formulação do Problema Dual. Exemplo 1.

Primal : 2 restrições, 3 variáveis

⇔ Dual : 2 variáveis, 3 restrições

restrições duais:

Primal : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

⇔ Dual : 3 restrições de tipo ≥

variáveis duais:

Primal : restrição nº 1 tipo ≤

⇔ Dual : $y_1 \geq 0$

Primal : restrição nº 2 tipo =

⇔ Dual : y_2 *livre*

Primal

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dual

Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$

sujeito a:

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$
$$2y_1 - y_2 \geq 12$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \text{ livre}$$

Formulação do problema dual. Exemplo 2.

Primal : 3 restrições,
5 variáveis

⇔ Dual : 3 variáveis,
5 restrições

restrições duais:

(P) : $x_1, x_2, x_4 \geq 0$
⇔ (D) :rest. 1, 2, 4 tipo $\leq$

(P) : x_3 *livre*
⇔ (D) :rest. 3 tipo =

(P) : $x_5 \leq 0$
⇔ (D) :rest. 5 tipo $\geq$

variáveis duais:

(P) : :rest. 1 tipo =
⇔ (D) : y_1 *livre*

(P) : :rest. 2 tipo $\geq$
⇔ (D) : $y_2 \geq 0$

(P) : :rest. 3 tipo $\leq$
⇔ (D) : $y_3 \leq 0$

Primal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 5x_5 \\ \text{sujeito a:} & -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -20 \\ & x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 8 \\ & 2x_1 - x_3 + x_4 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_3\ \text{livre},\ x_4 \geq 0,\ x_5 \leq 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & w = -20y_1 + 8y_2 + 100y_3 \\ \text{sujeito a:} & -5y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ & 4y_1 - y_2 \leq 6 \\ & -13y_1 + 5y_2 - y_3 = -7 \\ & 2y_1 + y_3 \leq 1 \\ & -5y_1 + y_2 \geq -5 \\ & y_1\ \text{livre},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 \end{array}$$

Formulação do problema dual. Exemplo 3.

Primal : 3 restrições, 2 variáveis

⇔ **Dual** : 3 variáveis, 2 restrições

restrições duais:

(P) : $x_2 \geq 0$
⇔ (D) :rest. 2 tipo ≥

(P) : x_1 *livre*
⇔ (D) :rest 1 tipo =

variáveis duais:

(P) : :rest. 1 tipo =
⇔ (D) : y_1 *livre*

(P) : :rest. 2 tipo ≥
⇔ (D) : $y_2 \leq 0$

(P) : :rest. 3 tipo ≤
⇔ (D) : $y_3 \geq 0$

Primal

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ livre}, \quad x_2 \geq 0$$

Dual

Minimizar $w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$

sujeito a:

$$y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$$
$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$
$$y_1 \text{ livre}, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \geq 0$$

Pares de Problemas Duais. Notação Matricial.
Forma Canónica.

Problema Primal

$$Maximizar\ \ z = c^t X$$

$$sujeito\ a$$

$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

Problema Dual

$$Minimizar\ \ w = b^t Y$$

$$sujeito\ a$$

$$A^t Y \geq c$$
$$Y \geq 0$$

Problema Primal

$$Minimizar\ \ z = c^t X$$

$$sujeito\ a$$

$$AX \geq b$$
$$X \geq 0$$

Problema Dual

$$Maximizar\ \ w = b^t Y$$

$$sujeito\ a$$

$$A^t Y \leq c$$
$$Y \geq 0$$

Pares de Problemas Duais. Notação Matricial. Forma Padrão.

Problema Primal

$$Maximizar\ \ z = c^t X$$

$$sujeito\ a$$

$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

Problema Dual

$$Minimizar\ \ w = b^t Y$$

$$sujeito\ a$$

$$A^t Y \geq c$$
$$Y\ livre$$

Problema Primal

$$Minimizar\ \ z = c^t X$$

$$sujeito\ a$$

$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

Problema Dual

$$Maximizar\ \ w = b^t Y$$

$$sujeito\ a$$

$$A^t Y \leq c$$
$$Y\ livre$$

Definição do Problema Dual. Conclusões.

O estudo da d*ualidade* em Programação Linear considera um problema *(o qual é geralmente designado por problema dual)* distinto daquele que se pretende resolver *(problema primal)*, mas cuja abordagem permite obter algumas conclusões directamente relacionadas com o *problema original (problema primal)*, nomeadamente referente às *condições de optimalidade*.

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu