Investigação Operacional

Aula 2

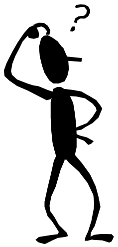
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Aula 2

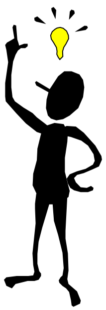
- **Definição de Problemas de Investigação Operacional**
  - Construção de um modelo matemático de PL.
  - Programação Matemática(PM) e Programação Linear(PL).
  - Exemplos clássicos de PL.

Problemas de Investigação Operacional

Problemas de Investigação Operacional



O que são problemas de Investigação Operacional ?



Os problemas de Investigação Operacional são problemas de *maximização ou minimização* de funções de variáveis, designadas por *objecto*, que dependem de um número finito de *variáveis*. Estas variáveis podem ser independentes umas das outras, ou podem estar relacionadas através de uma ou mais *restrições*.

Problemas de Programação Matemática

O que são *problemas de Programação Matemática* ?

Os problemas de *Programação Matemática* são uma classe particular de *problemas de Investigação Operacional*, que surgem na década de quarenta, aplicados nos campos da *organização* e da *gestão económica*, em que o *objectivo* e as *restrições* são dados como *funções matemáticas* e *relações funcionais*.

Programação Matemática

Programação → Planeamento de actividades

Matemática → O problema pode ser representado por um *modelo matemático*

Modelo matemático do problema de Programação Matemática

maximizar $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$
(minimizar)

satisfazendo

$$g_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)\ \{\le, =, \ge\}\ b_1$$
$$\ldots$$
$$g_M\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)\ \{\le, =, \ge\}\ b_M$$

onde:

$x_1, x_2, \ldots, x_N$ - *N variáveis de decisão,*

$f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ - *função objectivo e*

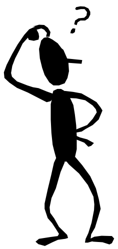
$g_1, g_2, \ldots, g_M$ - *M restrições do modelo*

Classificação dos problemas de Programação Matemática

Os problemas de Programação Matemática podem ser classificados em:

- lineares: se $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $gi\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $i=1 \ldots M$, são funções *lineares* – *PROGRAMAÇÃO LINEAR*
- não lineares: se alguma das relações $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $g_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $i=1 \ldots M$, for uma função *não linear* – *PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR*

Programação Linear



O que são *problemas de Programação Linear*?

Os problemas de *Programação Linear* são uma classe particular de Problemas de Programação Matemática (PM), onde *a* função objectivo e *as restrições* podem ser representadas por *funções lineares*.

A Programação Linear determina o *planeamento óptimo de actividades*, ou seja, um *plano óptimo* que represente a *melhor solução* entre todas as *alternativas possíveis*.

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear

Programação

Planeamento de actividades

Linear

O problema é representado matematicamente pelo modelo de PM onde todas as funções

$f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$,

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $i=1\ldots M$

são *lineares*.

Modelo matemático do problema de Programação Linear

maximizar $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$

(minimizar)

satisfazendo

$$\left.\begin{array}{l} g_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)\ \{\leq, =, \geq\}\ b_1 \\ \ldots \\ g_M\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)\ \{\leq, =, \geq\}\ b_M \end{array}\right\}\ \textbf{Restrições funcionais}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \geq 0 \rightarrow \textbf{Restrições de sinal}$$

onde:

$x_1, x_2, \ldots, x_N$ - *variáveis de decisão,*

$f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ - *função objectivo LINEAR ,*

$g_1, g_2, \ldots, g_M$ - *restrições do modelo LINEARES*

Resolução Gráfica

Os problemas de Programação Linear com duas variáveis podem ser resolvidos pelo método gráfico.

Começa-se por representar em R^2 a Região de Admissibilidade (RA) como sendo o resultado da intersecção dos semiplanos ou planos definidos por todas as restrições (de sinal e funcionais) do problema. Se RA=∅, o problema é impossível. Se RA≠∅ identifica-se, caso existam, os pontos óptimos.

i) Representa-se uma recta de nível da Função Objectivo (FO) atribuindo um valor arbitrário a Z e identifica-se o sentido de optimização;

ii) Identifica-se o ou os pontos da RA a que corresponde o melhor valor de Z (ou seja) identifica-se a ou as Soluções Óptimas (SO) ou conclui-se que o problema tem valor óptimo ilimitado (não tem SO).

Exemplo Protótipo

A empresa Nova Linha produz artigos de vidro de alta qualidade: janelas e portas, em três secções de produção:

Secção de Serralharia: *para produzir as estruturas de alumínio;*

Secção de Carpintaria: *para produzir as estruturas de madeira;*

Secção de Vidro e Montagem: *para produzir vidro e montar as portas e janelas.*

Devido à diminuição dos lucros, o gerente geral decidiu reorganizar a produção, e propõe produzir só 2 produtos que têm uma melhor aceitação entre os clientes.

Estes produtos são:

Produto 1: *uma porta de vidro com estrutura de alumínio;*

Produto 2: *uma janela grande com estrutura de madeira.*

Exemplo Protótipo

O Departamento de Marketing concluiu que a empresa pode vender tanto de qualquer dos dois produtos, tendo em conta a capacidade de produção disponível. Como ambos os produtos partilham a capacidade de produção da secção Nº3, o gerente solicitou ao Departamento de Investigação Operacional da empresa a resolução deste problema.

O Departamento de IO para realizar a formulação do problema, procurou os seguintes dados:

- *A capacidade de produção por minuto de cada secção a ser utilizada na produção de ambos os produtos;*
- *A capacidade de produção por minuto de cada secção, a ser utilizada para produzir uma unidade de cada produto;*
- *Os lucros unitários para cada produto.*

Exemplo Protótipo

• **Estes dados estão resumidos na seguinte tabela:**

	Capacidade utilizada por unidade de produção		
Secção Nº	Produto 1	Produto 2	Capacidade disponível
1	**1**	**0**	4
2	**0**	**2**	12
3	**3**	**2**	18
Lucro unitário (em milhares de Mt)	3	5	

Exemplo Protótipo: Formulação

	Capacidade utilizada por unidade de produção		
Secção Nº	Produto 1	Produto 2	Capacidade disponível
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro unitário	3	5	

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2,$

sujeito a

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 - *o número de unidades do produto 1 e 2 produzidas por minuto.*

Z – *o lucro total por minuto.*

Exemplo Protótipo: Solução gráfica (I)

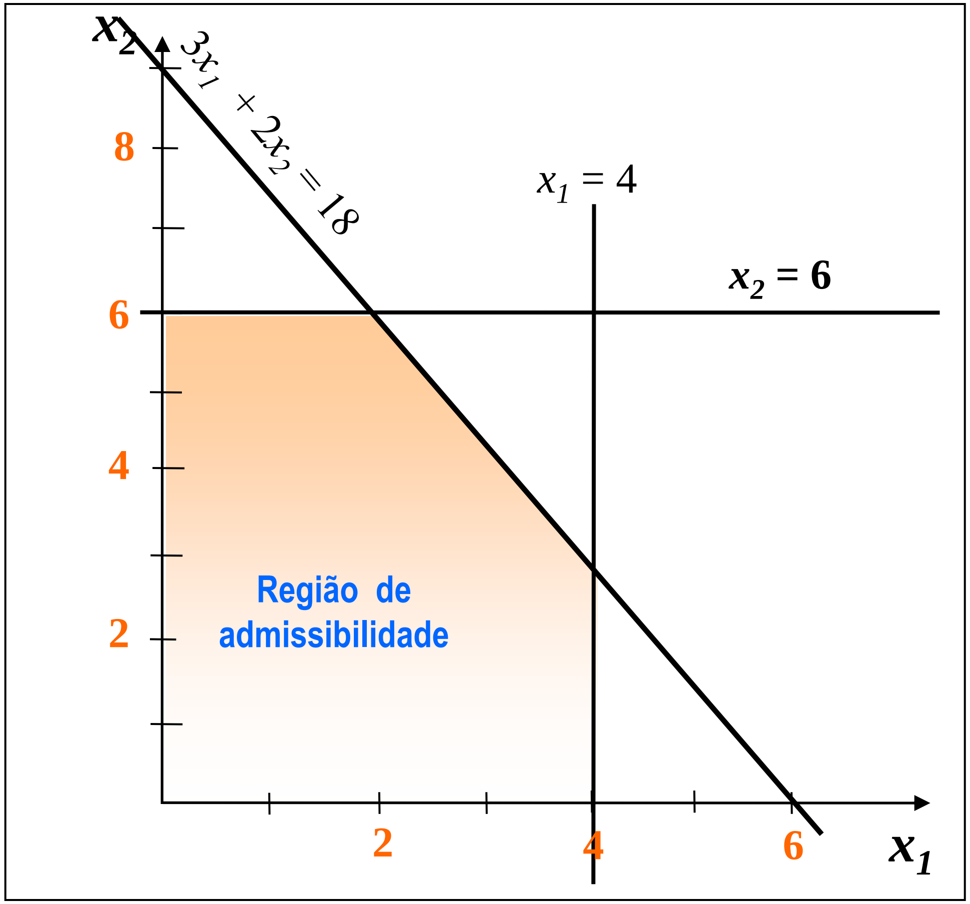
I. Identificar os valores de (x_1, x_2) que satisfaçam todas as restrições (região de admissibilidade)

1º $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão no 1º Quadrante

2º $x_1 \leq 4 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão situados à esquerda ou sobre a recta $x_1 = 4$

3º $2x_2 \leq 12 \Rightarrow x_2 \leq 6 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão situados abaixo ou sobre a recta $x_2 = 6$

4º $3x_1 + 2x_2 \leq 18 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão situados abaixo ou sobre a recta $3x_1 + 2x_2 = 18$

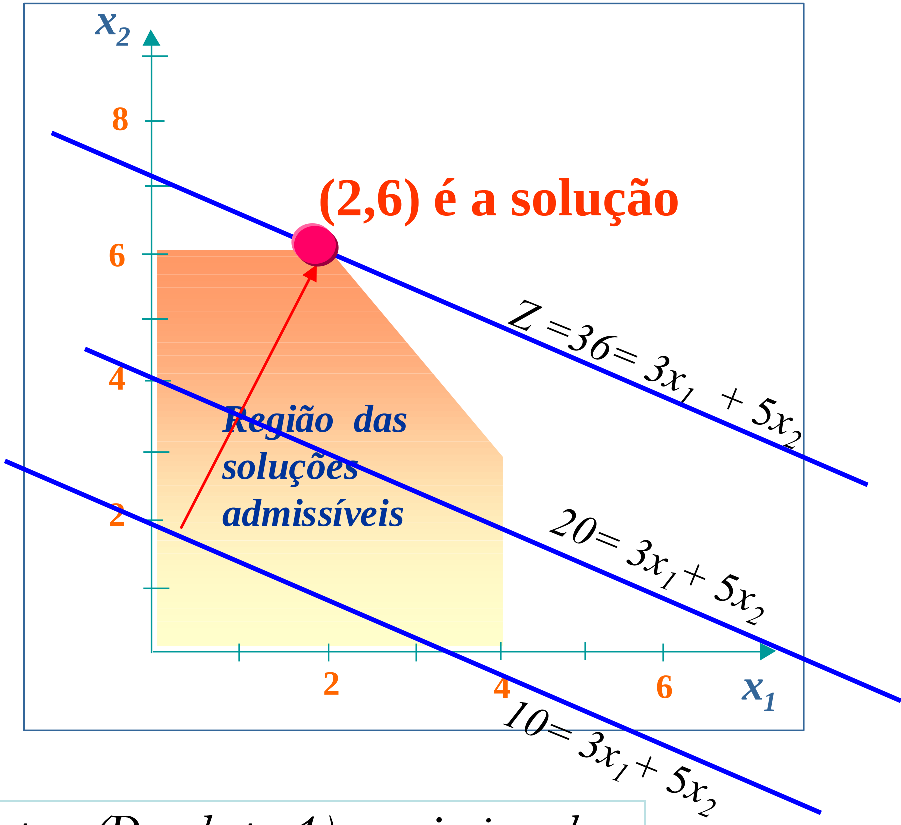


Exemplo Protótipo: Solução gráfica (II)

II. Determinar a solução

A função objectivo $Z = 3x_1 + 5x_2$ define uma recta que pode ser deslocada paralelamente no sentido do seu gradiente (garantindo o crescimento de Z), até se tornar tangente à região admissível.

Neste caso o ponto de tangência (2,6) **optimiza a função objectivo, pelo que a solução pretendida é** $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. **O valor óptimo é 36.**



Nova Linha deve fabricar duas portas (Produto 1) e seis janelas (Produto 2) por minuto obtendo um lucro de 36 Mil Mts por minuto.

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Exemplo Protótipo:

3 recursos limitados a distribuir entre 2 actividades

Exemplo	Problema geralizado
Capacidade de produção das 3 secções	Recursos: M
Produtos a produzir: 2 produtos	Actividades: N
Total de produtos a produzir por minutos: x_1 e x_2	Nível da actividade j : x_j
Lucro por minuto: Z	Medida da vantagem: Z

Exemplo Protótipo (II)

A empresa Filtros de Napipine Ltd, dedica-se a produção de três tipos de filtros para automóveis a saber: filtros de óleo, de gasolina e de ar. A manufactura de cada filtro requer o processamento em cada uma das duas máquinas que a empresa possui, que estão disponíveis 40 horas por mês. O tempo de processamento (em horas) e o lucro unitário de cada Filtro sobressalente (em Mt) apresenta-se na tabela seguinte:

Exemplo Protótipo (II)

	Capacidade utilizada por unidade de produção		
Máquina	Filtros de óleo	Filtros de ar	Filtros de gasolina
1	0,02	0,03	0,05
2	0,05	0,02	0,04
Lucro unitário (em Mt)	250	200	150

O problema consiste em determinar as quantidades de cada tipo de filtros a produzir por mês de modo a obter um lucro máximo.

Exemplo Protótipo (II)

	Capacidade utilizada por unidade de produção			
Máquina	Filtros de óleo	Filtros de ar	Filtros de gasolina	Capacidade disponível
1	0,02	0,03	0,05	40
2	0,05	0,02	0,04	40
Lucro unitário (em milhares de Mt)	250	200	150	

Maximizar $Z = 250x_1 + 200x_2 + 150x_3$

sujeito a:

$$0{,}02\,x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3 \leq 40$$

$$0{,}05\,x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}04x_3 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

x_1, x_2, x_3 - *o número filtros de óleo, ar e gasolina*

Z – *o lucro total mensal.*

Exemplo Protótipo (II):
2 recursos limitados a distribuir entre 3 actividades

Exemplo	Problema geralizado
Capacidade de produção das 2 máquinas	Recursos: M
Produtos a produzir: 3 produtos	Actividades: N
Total de produtos a produzir por mês: x_1, x_2 e x_3	Nível da actividade j : x_j
Lucro por mês: Z	Medida da vantagem: Z

O modelo de PL.

Os parâmetros do modelo de PL para um problema onde estão envolvidas N actividades e M recursos podem ser definidos utilizando a seguinte tabela:

	Utilização do recurso por actividade				
Actividades / Recursos	1	2	...	N	Total de recurso disponível
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1N}	b_1
2	a_{21}	a_{21}	...	a_{2N}	b_2
.					.
.					.,
.					.
M	a_{M1}	a_{M2}	...	a_{MN}	b_M
Lucro unitário	c_1	c_2	...	c_N	
Nível de actividade	x_1	x_2	...	x_N	

onde a_{ij}, b_i e c_j *são constantes*, x_j – *variáveis de decisão* ($i=1,2,\ldots,M,\ j=1,2,\ldots,N$)

Formulação Matemática do Modelo de PL.

Função objectivo

$$\text{Maximizar(minimizar)}\quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$$

sujeito a *coluna j* *restrições*

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1N} x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2N} x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_2$$

$$\ldots$$

linha i $\longrightarrow$ $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{iN} x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_i$

$$\ldots$$

$$a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{Mj} x_j + \ldots + a_{MN} x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_M$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0 \longleftarrow$$ *Condições de não negatividade*

onde a_{ij}, b_i e c_j $(i=1,2,\ldots,M,\ j=1,2,\ldots,N)$ *são constantes* e *em cada restrição apenas se verifica uma e só uma das relações* $\{\leq, =, \geq\}$.

Exemplos clássicos de PL

I- TRANSPORTE:

Suponha que um sistema de distribuição alimenta N armazéns a partir de M grandes unidades produtoras. Conhecendo os custos de transporte, a procura prevista para cada armazém e as capacidades (máximas) de produção de cada unidade, *determinar o programa de distribuição com menor custo*.

II- COMPOSIÇÃO:

Conhecendo os conteúdos calóricos e vitamínicos de diversos alimentos, bem como os seus preços, *optimizar a composição da dieta* a adoptar de modo a minimizar o seu custo e a satisfazer níveis mínimos de calorias e vitaminas.

Exemplos clássicos de PL

III- PRODUÇÃO:

Suponha que uma fábrica é capaz de produzir N produtos distintos utilizando M recursos limitados, os quais podem ser : horas de trabalho, tempos de operação de várias máquinas, matérias primas, serviços, etc. Conhecendo o lucro unitário, as quantidades de recurso utilizada para cada produto, e as quantidades de recursos disponíveis, *determinar o plano óptimo de produção (com maior lucro)*.

O modelo de PL: Conclusões

Os problemas de ***Programação Linear*** podem ser formulados de acordo com um ***modelo matemático geral***, que consiste na determinação de valores não negativos para as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N$, a satisfazer um sistema de M equações (inequações) lineares que ***maximizem ou minimizem*** uma função (real) ***linear*** dessas variáveis.