# Optimização

## Aula 3

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

# Problema 3.1

Uma empresa necessita de produzir os produtos P1 e P2 que vende com margem de lucro unitário médio, de 1000Mt e 600Mt respectivamente.

Para o produto P1 estão agendadas 35 horas de trabalho sabendo-se que, tecnicamente, a produção de uma unidade de P1 requer em média 5 horas.

As encomendas em carteira, para o produto P2, aconselham a não produzir mais do que 7 unidades .

No que respeita à matéria prima a utilizar, o stock existente é de 40 kg, sendo o consumo de 5kg por unidade produzida de P1 ou P2.

A empresa pretende Optimizar  a produção de P1 e P2 visando a maximização do lucro. Formule e resolva o problema graficamente.

# Problema 3.1 (Resolução I)

O problema pode ser apresentado na forma de tabela como se segue:

| | ***Capacidade utilizada por unidade de produção*** | | ***Disponibilidade*** |
|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | |
| Horas de trabalho | 5 | 0 | 35 |
| Horas de trabalho | 0 | 1 | 7 |
| Matéria Prima (kg) | 5 | 5 | 40 |
| Lucro unitário (em Mt) | 1000 | 600 | |

# Problema 3.1 (Resolução II)

Sabendo que o lucro unitário médio do Produto P1 é de 1000 Mt e o lucro unitário médio do Produto P2 é de 600 Mt.

Devem ser maximizados

O lucro obtido com a venda de Produtos 1

MAIS

O lucro obtido com a venda de Produtos 2

Que se traduz algebricamente na igualdade linear:

$$Max\,Z = 1000P_1 + 600P_2$$

# Problema 3.1 (Resolução III)

Para o produto P1 estão agendadas 35 horas de trabalho sabendo-se que, tecnicamente, a produção de uma unidade de P1 requer em média 5 horas.

Tempo para produzir o Produto 1

NÃO PODE EXCEDER

Disponibilidade agendada

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$5P_1 \leq 35$$

# Problema 3.1 (Resolução IV)

No que respeita à matéria prima a utilizar o stock existente é de 40 kg sendo o consumo de 5kg por unidade produzida de P1 ou P2.

Matéria prima utilizada no Produto 1

MAIS

Matéria prima utilizada no Produto 2

NÃO PODE EXCEDER

O Stock existente

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$5P_1 + 5P_2 \leq 40$$

# Problema 3.1 (Resolução V)

As encomendas em carteira, para o produto P2, aconselham a não produzir mais do que 7 unidades.

A produção do Produto 2

NÃO PODE EXCEDER

A produção aconselhada

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

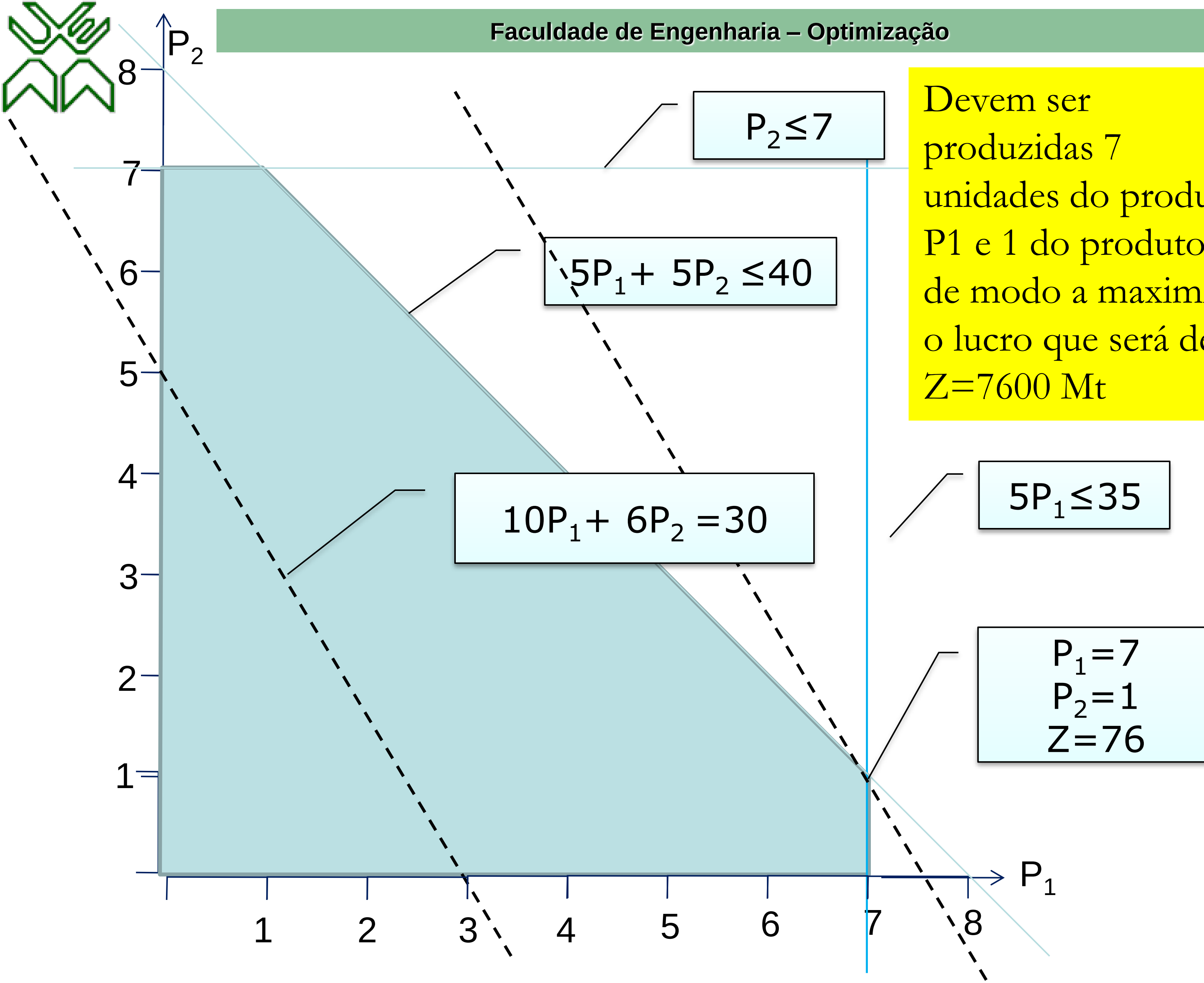
$$P_2 \leq 7$$

# Problema 3.1 (Resolução VI)

O modelo matemático apresenta-se da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } Z = 1000P_1 + 600P_2$$
$$5P_1 \leq 35$$
$$5P_1 + 5P_2 \leq 40$$
$$P_2 \leq 7$$
$$P1, P2 \geq 0$$

Devem ser produzidas 7 unidades do produto P1 e 1 do produto P2 de modo a maximizar o lucro que será de Z=7600 Mt



# Problema 3.2

Numa pequena empresa Metalomecânica produzem-se dois tipos de produtos, nomeadamente tampas de ferro fundido para fossas e grelhas para escoamento de águas pluviais.

As tampas de ferro são produzidas na secção de fundição e depois remetidas à secção de acabamentos, enquanto as grelhas para escoamento de águas pluviais são produzidas na secção de soldadura e depois passam para a de acabamentos.

A disponibilidade e as necessidades de tempo para a execução de cada um dos produtos encontram-se apresentadas na tabela em anexo.

# Problema 3.2

| Secção | Peça | | Tempo Disponível (Horas-Homem) |
|---|---|---|---|
| | Tampas | Grelhas | |
| Fundição | 3 | | 150 |
| Soldadura | | 2 | 150 |
| Acabamento | 2 | 2 | 200 |

Sabendo que a empresa vende ao preço de 2000 Mt cada tampa e 1750 Mt cada grelha. Determinar o plano óptimo de produção de forma a maximizar o lucro total.

- Formule o modelo de programação linear para este problema.
- Diga quais são os recursos, as actividades, o nível de actividades, e a medida de vantagem para o problema dado.

# Problema 3.2

Sejam $x_1$ – Tampas a produzir e $x_2$ – Grelhas a produzir.

Sabendo que o lucro unitário 2000 Mt cada tampa e 1750 Mt cada grelha.

Devem ser maximizados

O lucro obtido com a venda de Tampas

MAIS

O lucro obtido com a venda de Grelhas

Que se traduz algebricamente na igualdade linear:

$$Max\, Z = 2000x_1 + 1750x_2$$

# Problema 3.2

Para as tampas estão agendadas 150 horas-homem de trabalho na fundição, sabendo-se que tecnicamente, a produção de uma tampa requer em média 3 horas-homem.

| Tempo para produzir as tampas | NÃO PODE EXCEDER | Disponibilidade agendada na fundição |
|---|---|---|

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$3x_1 \leq 150$$

# Problema 3.2

Para as grelhas estão agendadas 150 horas-homem de trabalho na soldadura, sabendo-se que tecnicamente, a produção de uma grelha requer em média 5 horas-homem.

Tempo para produzir as grelhas

NÃO PODE EXCEDER

Disponibilidade agendada na soldadura

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$2x_2 \leq 150$$

# Problema 3.2

No que respeita à secção de acabamento o tempo disponível é de 200 horas-homem sendo necessárias 2 horas-homem tanto para cada tampa como para cada grelha.

Tempo para produzir as tampas

MAIS

Tempo para produzir as grelhas

NÃO PODE EXCEDER

Disponibilidade agendada na montagem

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 200$$

# Problema 3.2 (Resolução I)

O modelo de programação linear para este problema torna-se

$x_1$ – Tampas a produzir.

$x_2$ – Grelhas a produzir.

$$Maximizar\ z = 2000x_1 + 1750x_2$$

$$s.a:$$

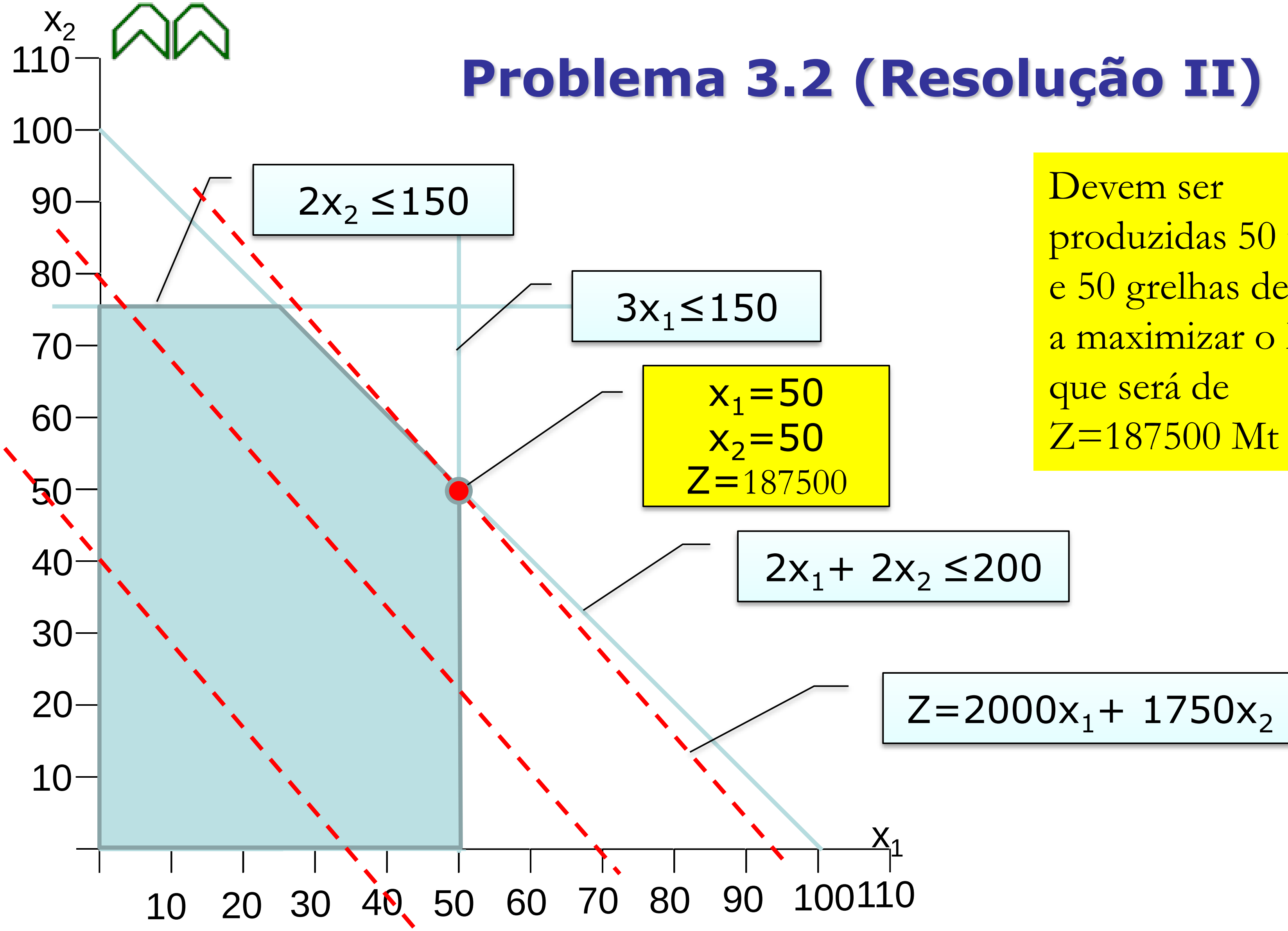
$$3x_1 + 0x_2 \leq 150$$

$$0x_1 + 2x_2 \leq 150$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Problema 3.2 (Resolução II)




Devem ser produzidas 50 tampas e 50 grelhas de modo a maximizar o lucro que será de Z=187500 Mt

# Problema 3.3 (I)

"Publicações Polémicas" vai publicar uma autobiografia de um político controverso, e admite que a 1ª edição vai ser vendida por completo se não houver atrasos. Foi decidido que versões de Luxo (L) e Normal (N) vão aparecer simultaneamente e são conhecidas as seguintes condicionantes do projecto:

- (a) O departamento de impressão pode produzir no máximo 10000 cópias (incluindo versões L e N).
- (b) O departamento de encadernação pode concluir 12000 cópias N ou 8000 cópias L se trabalhar em cada um destes tipos isoladamente. Se produzir as duas versões, pode produzir proporções daquelas quantidades que totalizem 1.

# Problema 3.3 (II)

- (c) O armazém pode despachar um máximo de 15000 cópias N ou 9000 cópias L, ou proporções que totalizem 1.
- (d) Já existem pedidos de 2000 versões N e 1000 versões L, que deverão ser satisfeitos na 1ª edição.
- (e) Pelo menos 1/4 do total das cópias deverá ser em versão de Luxo (L).

O lucro resultante da venda de uma cópia N é de 600,00 Mt e de uma cópia L é de 720,00 Mt."Publicações Polémicas" pretende saber qual o número de cópias de cada tipo a produzir de modo a obter o maior lucro possível.

(a) Formule este problema como Programação Linear.

(b) Resolva-o graficamente, ilustrando o conjunto das soluções admissíveis.

# Problema 3.3 (Solução I)

Sejam $x_L$ – Versões de Luxo e $x_N$ – Versões Normais.

Sabendo que o lucro unitário da venda de uma cópia normal é de 600,00 Mt e de 720,00 Mt para cada cópia de luxo

Devem ser maximizados

O lucro obtido com a venda de cópias normais

MAIS

O lucro obtido com a venda de cópias de luxo

Que se traduz algebricamente na igualdade linear:

$$Maximizar\ Z = 600x_N + 720x_L$$

# Problema 3.3 (Solução II)

O departamento de impressão pode produzir no máximo 10000 cópias (incluindo versões L e N).

As versões normais

MAIS

As versões de luxo

NÃO PODEM EXCEDER

O máximo de 10000

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$x_N + x_L \leq 10000$$

# Problema 3.3 (Solução III)

O departamento de encadernação pode concluir 12000 cópias N ou 8000 cópias L se trabalhar em cada um destes tipos isoladamente. Se produzir as duas versões, pode produzir proporções daquelas quantidades que totalizem 1.

As versões normais/12000

MAIS

As versões de luxo/8000

NÃO PODEM EXCEDER

O máximo de 1

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$\frac{x_N}{12000} + \frac{x_L}{8000} \leq 1$$

# Problema 3.3 (Solução IV)

O armazém pode despachar um máximo de 15000 cópias N ou 9000 cópias L, ou proporções que totalizem 1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| As versões normais/15000 | MAIS | As versões de luxo/9000 | NÃO PODEM EXCEDER | O máximo de 1 |

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$\frac{x_N}{15000} + \frac{x_L}{9000} \leq 1$$

# Problema 3.3 (Solução V)

Pelo menos 1/4 do total das cópias deverá ser em versão de Luxo (L).

¼ { As versões normais | MAIS | As versões de luxo } | PELO MENOS DEVEM SER | Versões de Luxo

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$\frac{1}{4}\left(x_N + x_L\right) \leq x_L$$



Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

# Problema 3.3 (Solução VI)

Já existem pedidos de 2000 versões N e 1000 versões L, que deverão ser satisfeitos na 1ª edição.

| | | |
|---|---|---|
| As versões normais | DEVEM NO MÍNIMO | Satisfazer os pedidos já existentes (2000) |
| As versões de Luxo | DEVEM NO MÍNIMO | Satisfazer os pedidos já existentes (1000) |

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$x_N \geq 2000$$

$$x_L \geq 1000$$

# Problema 3.3 (Solução VII)

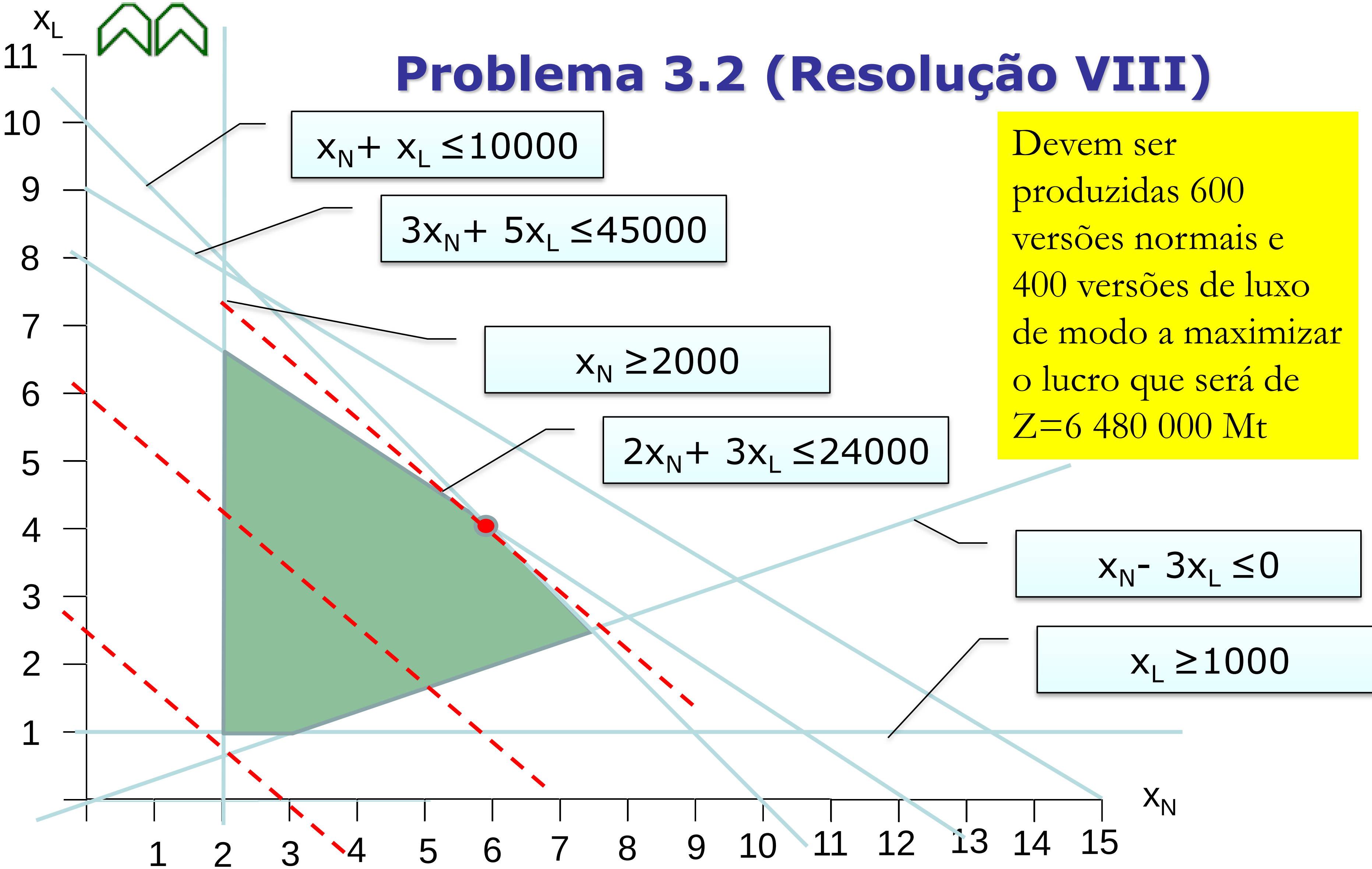
O modelo de programação linear para este problema torna-se

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } Z = 600x_N + 720x_L \\
&\text{sujeito a:} \\
&x_N + x_L \le 10000 \\
&\frac{x_N}{12000} + \frac{x_L}{8000} \le 1 \\
&\frac{x_N}{15000} + \frac{x_L}{9000} \le 1 \\
&\frac{1}{4}\left(x_N + x_L\right) \le x_L \\
&x_N \ge 2000 \\
&x_L \ge 1000
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } Z = 600x_N + 720x_L \\
&\text{sujeito a:} \\
&x_N + x_L \le 10000 \\
&2x_N + 3x_L \le 24000 \\
&3x_N + 5x_L \le 45000 \\
&x_N - 3x_L \le 0 \\
&x_N \ge 2000 \\
&x_L \ge 1000
\end{aligned}
$$

# Problema 3.2 (Resolução VIII)




Devem ser produzidas 600 versões normais e 400 versões de luxo de modo a maximizar o lucro que será de Z=6 480 000 Mt

# Problema 3.4 (I)

A direcção de Marketing de uma empresa de mobiliário metálico de escritório sugere o lançamento de dois novos produtos: um modelo de secretária e um modelo de estante, ambos em substituição de modelos actuais. Esta direcção não prevê dificuldade de colocação dos produtos no mercado para as estantes, enquanto que aconselha que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades. Após estudos levados a cabo pela Direcção de Produção, concluiu-se que:

A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 horas-máquina.

# Problema 3.4 (II)

A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 horas-homem.

Cada secretária necessita de 2h-M de estampagem e 4h-H de montagem e acabamento.

Cada estante necessita de 4h-M de estampagem e 4h-H de montagem e acabamento. As margens brutas unitárias estimadas são de 6.000,00MT para as secretárias e 3.000,00MT para as estantes.

Formalize o problema de forma a se poder determinar o plano de produção mensal que maximize a margem bruta, para estes dois novos produtos e resolva o problema através do método gráfico.

# Problema 3.4 (Resolução I)

A disponibilidade mensal do departamento de montagem e acabamento é de 880 horas-homem;

Cada secretária necessita de 2 H-M de estampagem e 4 H-H de montagem e Acabamento;

Cada estante necessita de 4 H-M de estampagem e 4 H-H de montagem e Acabamento.

Por outro lado as margens brutas unitárias estimadas são de 6 000,00 Mt para secretárias e 3 000,00 Mt para estantes.

A empresa pretende determinar o plano óptimo mensal para novos modelos que maximiza a margem bruta.

# Problema 3.4 (Resolução II)

Sejam $x_1$ e $x_2$ o número de secretárias e de estantes de novos modelos , respectivamente a produzir mensalmente e z a margem bruta total no mesmo período. Tem-se evidentemente $x_1$ e $x_2$ como variáveis de decisão e como objectivo determinar valores para estas duas variáveis que maximizem:

$$z = 6x_1 + 3x_2 \ (\text{em}\ 10^3 Mtn)$$

# Problema 3.4 (Resolução III)

Tendo em conta as restrições impostas pelas limitações da capacidade produtiva do mercado.

Relativamente ao departamento de estampagem sabe-se que:

- cada secretária necessita de 2 H - M, pelo que o número total de horas-máquina necessárias à produção de $x_1$ secretárias é de $2x_1$.
- cada estante necessita de 4 H - M, pelo que o número total de horas-máquina necessárias a produção de $x_2$ estantes é $4\,x_2$.
- a disponibilidade mensal é de 720 horas-máquina

# Problema 3.4

Então a restrição relativa a este departamento é:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tempo total de máquina gasto na produção de secretárias | MAIS | Tempo total de máquina gasto na produção de estantes | NÃO PODE EXCEDER | Disponibilidade em Horas - maquina |

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 720$$

Analogamente tem-se para o Departamento de Montagem e Acabamento

$$4x_1 + 4x_2 \leq 880$$

# Problema 3.4 (Resolução IV)

No que diz respeito ao mercado, a restrição traduz-se por:

$$x_1 \leq 160$$

Para alem destas restrições, tem-se ainda:

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0,$$

Pois não fazem sentido produções negativas

# Problema 3.4 (Resolução V)

Em síntese o problema consiste em escolher $x_1$ e $x_2$ por forma a:

$$Maximizar\ z = 6x_1 + 3x_2$$

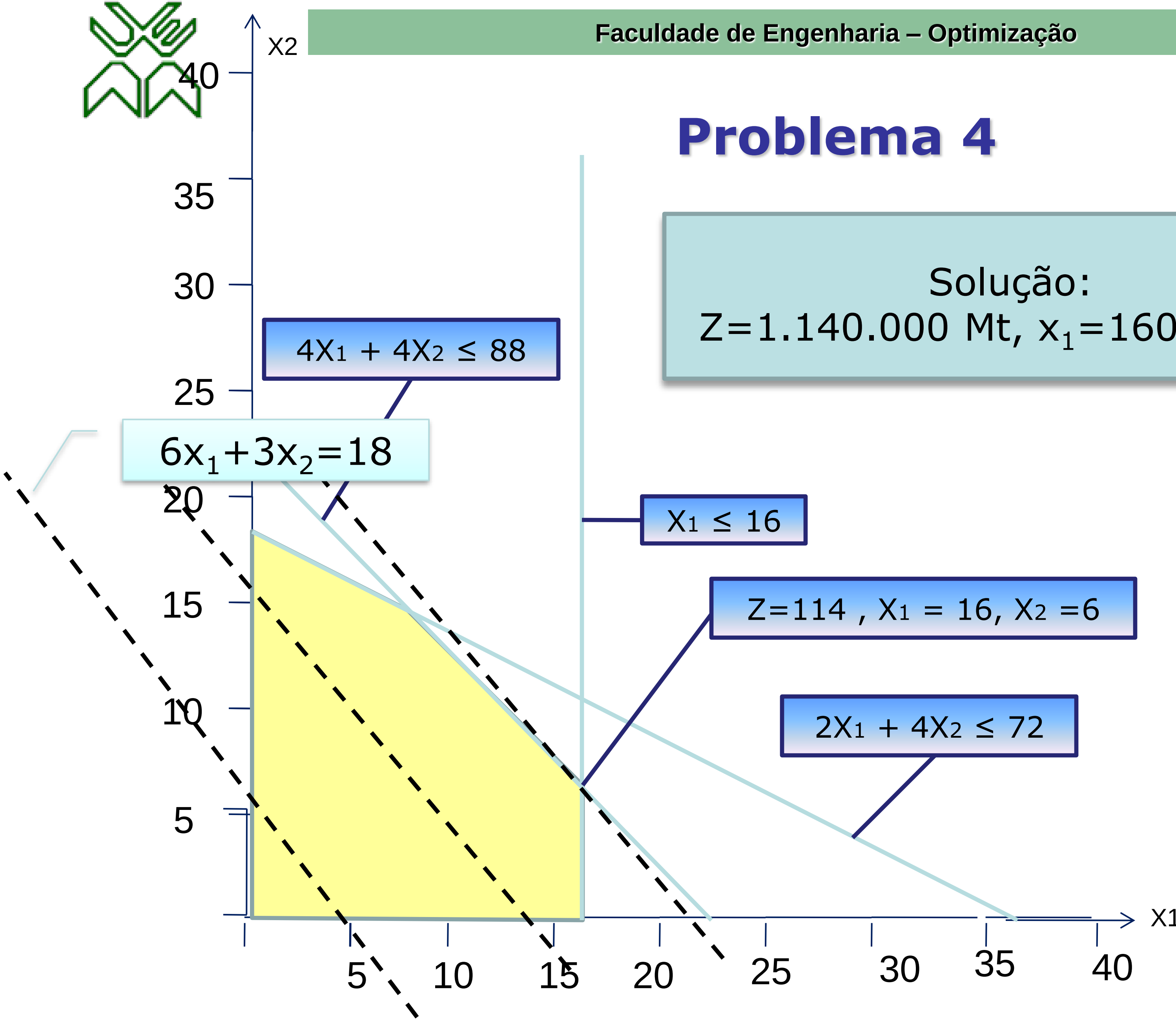
$$\text{sujeito a:}$$

$$\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 720 \\
4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 880 \\
x_1 & & & \leq & 160
\end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Problema 4

Solução:
Z=1.140.000 Mt, $x_1$=160, $x_2$=60



# Trabalho Para Casa (I)

Uma empresa fabrica quatro produtos: Pi para i=1,2,3,4. Cada produto precisa de horas de trabalho de trabalhadores e horas de uso de máquinas para ser produzido em cada uma das quatro secções. A empresa possui um número limitado de horas de trabalho disponíveis por semana e um número limitado de horas de máquina disponíveis por semana. O objectivo da empresa é maximizar o lucro total, sujeito às restrições de disponibilidade de horas de trabalho e horas de máquina. Sendo os seguintes, os dados de produção e o respectivo lucro por produto:

# Trabalho Para Casa (II)

$P_1 = 50$, $P_2 = 40$, $P_3 = 30$, $P_4 = 20$ (lucro por unidade dos Produtos 1, 2, 3 e 4)

$T_{11} = 2$, $T_{12} = 1$, $T_{13} = 3$, $T_{14} = 2$ (horas de trabalho no Posto 1 para os Produtos 1, 2, 3 e 4)

$T_{21} = 1$, $T_{22} = 3$, $T_{23} = 2$, $T_{24} = 1$ (horas de trabalho no Posto 2 para os Produtos 1, 2, 3 e 4)

$T_{31} = 4$, $T_{32} = 1$, $T_{33} = 2$, $T_{34} = 3$ (horas de trabalho no Posto 3 para os Produtos 1, 2, 3 e 4)

$T_{41} = 2$, $T_{42} = 2$, $T_{43} = 1$, $T_{44} = 4$ (horas de trabalho no Posto 4 para os Produtos 1, 2, 3 e 4)

$H_1 = 100$, $H_2 = 120$, $H_3 = 80$, $H_4 = 90$ (total de horas de trabalho disponíveis por semana nos Postos 1, 2, 3 e 4)

Envie a formulação até a 0 hora de quarta-feira dia 14 de Agosto de 2024 para optimizacao.dema@gmail.com com o "subject":TPC01