# Optimização

## Aula 4



Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

# Aula 4. Programação Linear (PL)

- O modelo de Programação Linear.
  - **Forma Padrão (“standard”) e Forma Canónica.**
  - **Conceitos fundamentais.**
  - **Outras formas do modelo:**
    - forma cartesiana
    - forma matricial
    - forma vectorial
- Propriedades fundamentais da Programação Linear:
  - **Redução à Forma Padrão**
  - **Conceitos Fundamentais.**
  - **Teorema Fundamental da PL.**



Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

# O Modelo de PL.

*Função objectivo*

*Maximizar (minimizar)* $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_Nx_N$

*sujeito a:*

*coluna j* | *restrições*

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1N}x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2N}x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_2 \\
\ldots \\
\textit{linha } i \rightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{iN}x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_i \\
\ldots \\
a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{Mj}x_j + \ldots + a_{MN}x_N \ \{\leq, =, \geq\}\ b_M
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0 \longleftarrow$$ *Condições de não negatividade*

onde $a_{ij}$, $b_i$ e $c_j$ $(i=1,2,\ldots,M,\ j=1,2,\ldots,N)$ *são constantes* e *em cada restrição apenas se verifica uma e só uma das relações* $\{\leq, =, \geq\}$.

# Forma Padrão ("standard").

Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de equações* diz-se que esse modelo está na *forma padrão* (ou "*standard*").

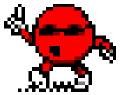
***Maximizar*** $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

***(Minimizar)***

***sujeito a***

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
&\;\;\vdots \\
a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N &= b_M \\
x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N &\geq 0
\end{aligned}
$$

# Forma Canónica.



Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de inequações* diz-se que esse modelo está na *forma canónica.*

*Maximizar* $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

*sujeito a*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N \leq b_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N \leq b_M$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0$$

*Minimizar* $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

*sujeito a*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N \geq b_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N \geq b_M$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0$$

# Operações de Reformulação

I. Qualquer problema de maximização pode converter-se num problema de minimização, pois:

$$\boxed{\textit{máximo } Z = -\textit{ mínimo } (-Z)}$$

# Operações de Reformulação.

II. Qualquer restrição de desigualdade de tipo **"≤"** pode ser convertida numa restrição do tipo **"≥"** multiplicando por (-1) ambos os seus membros.

$$a_{i\,1}x_1 + a_{i\,2}x_2 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i$$

$$\Updownarrow$$

$$-a_{i\,1}x_1 - a_{i\,2}x_2 - \ldots - a_{i\,N}x_N \geq -b_i$$

# Operações de Reformulação.

III. Qualquer restrição de igualdade pode ser convertida em duas restrições de desigualdades "≤" equivalentes àquela.

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N = b_i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \le b_i$$
$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \ge b_i$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \le b_i$$
$$-a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N \le -b_i$$

# Operações de Reformulação.

IV. Qualquer restrição de desigualdade pode ser convertida numa restrição de igualdade, através da introdução de uma nova variável (*variável de desvio* ou *folga*) $x_{N+1}$ de valor não negativo.

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad b_i - a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{N+1} = b_i - a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N + x_{N+1} = b_i \qquad x_{N+1} \geq 0$$

# Operações de Reformulação.

V. Qualquer *variável livre* $x_j$, (*não restringida pela condição de não negatividade*) pode ser substituída por um par de variáveis não negativas $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$, fazendo:

$$\boxed{x_j = x_j' - x_j''}$$

e deste modo formulando de novo o problema em função destas duas variáveis.

# Conceitos Fundamentais(1).

*A função a maximizar (minimizar),*

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N,$$

*designa-se por* ***função objectivo*** (f.o).

*As equações (inequações)*

*designam-se por* ***restrições.***

*As desigualdades* $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$

*designam-se por* ***condições de não negatividade.***

# Conceitos Fundamentais(2).

*As variáveis* $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_N}$,
*designam-se por* **variáveis de decisão.**

*As constantes* $\boldsymbol{a_{ij}}$,
*designam-se por* **coeficientes tecnológicos.**

*As constantes* $\boldsymbol{b_i}$,
*designam-se por* **termos independentes.**

*As constantes* $\boldsymbol{c_j}$,
*designam-se por* **coeficientes da função objectivo**

# Conceitos fundamentais(3).

*Qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão* $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ *que satisfaça as restrições do modelo e as condições de não negatividade*

*designa-se por* ***solução admissível.***

*O conjunto de todas as soluções admissíveis*

*designa-se por* ***região de admissibilidade.***

*Uma* ***solução óptima*** *maximiza (minimiza) a função objectivo sobre toda a região de admissibilidade.*

# Objectivo da PL

*O objectivo da PL é determinar de entre as soluções admissíveis,* ***uma que seja a "melhor"****, medida pelo valor da* ***função objectivo*** *do modelo. Por* ***"melhor"*** *entende-se o* ***maior*** *ou* ***menor valor****, dependendo se o objectivo é* ***maximizar*** *ou* ***minimizar****.*

# Soluções do Problema de PL

- Um problema de PL pode ter:
  - uma única solução óptima
- *ou*
  - múltiplas soluções óptimas (*uma infinidade*)
- *ou*
  - não ter óptimo finito
- *ou*
  - não ter nenhuma solução (*neste caso o problema é impossível*)

# Exemplo Protótipo: Formulação

| | *Capacidade utilizada por unidade de produção* | | |
|---|---|---|---|
| Secção Nº | Produto 1 | Produto 2 | Capacidade disponível |
| 1 | **1** | **0** | 4 |
| 2 | **0** | **2** | 12 |
| 3 | **3** | **2** | 18 |
| Lucro unitário (mil Mt) | 3 | 5 | |

*Maximizar* $Z = 3x_1 + 5x_2,$

*sujeito a*

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

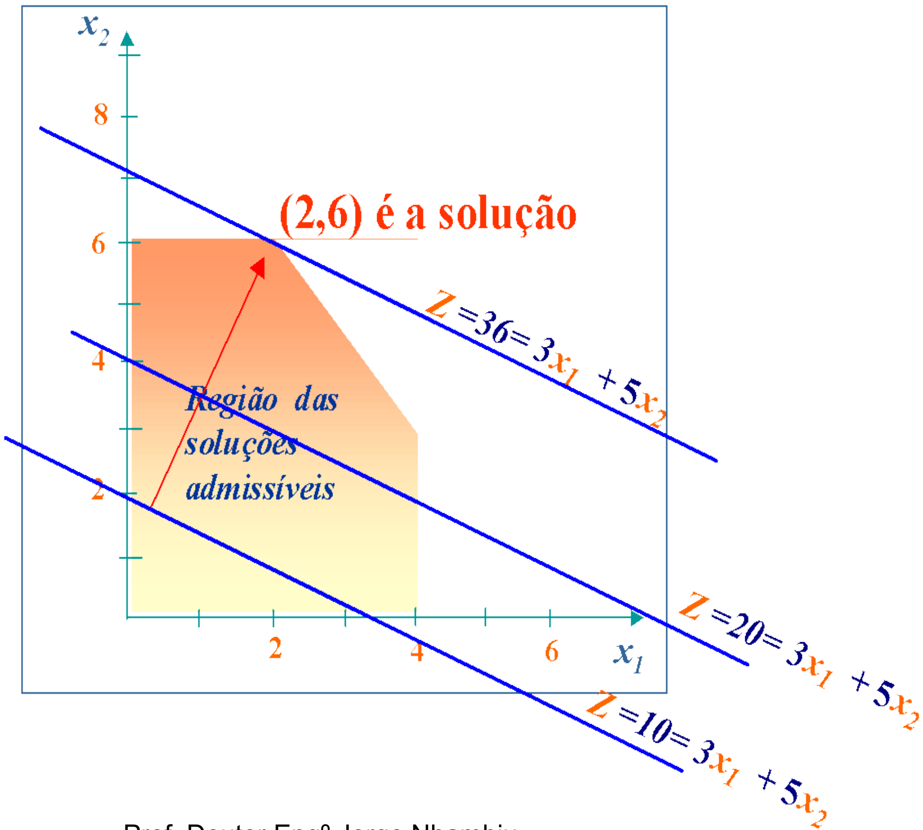
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$x_i$ – *o número de unidades do produto produzidas por minuto, i= 1,2.*

$Z$ – *o lucro total por minuto.*

# Uma Única Solução Óptima

**No exemplo protótipo determinamos** *uma única solução óptima*: $x_1 = 6$ , $x_2 = 2$**, onde a** ***função objectivo*** **alcança o seu** *valor máximo Z=36*.



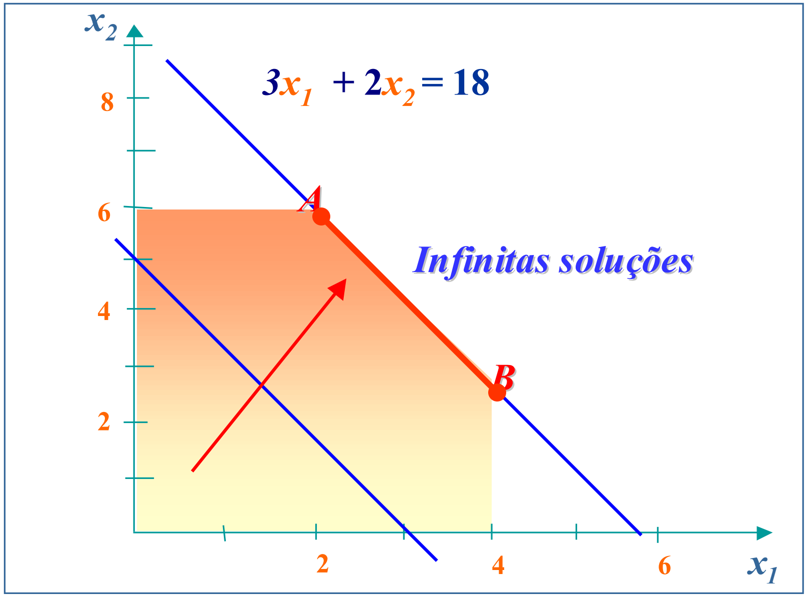
# Múltiplas Soluções

Se um problema de PL tem soluções óptimas múltiplas então tem um *número infinito* delas.

No exemplo protótipo mudámos o lucro unitário do *produto 2* de 5 para 2 Mts, i.e., a função objectivo é agora a recta $Z=3x_1+2x_2$.

(a f.o. tem o mesmo gradiente da recta da 3ª restrição $3x_1+2x_2=18$).

Todos os pontos (uma infinidade) do segmento de recta AB, são soluções óptimas, pois todas alcançam o melhor valor da f.o.: z=18.

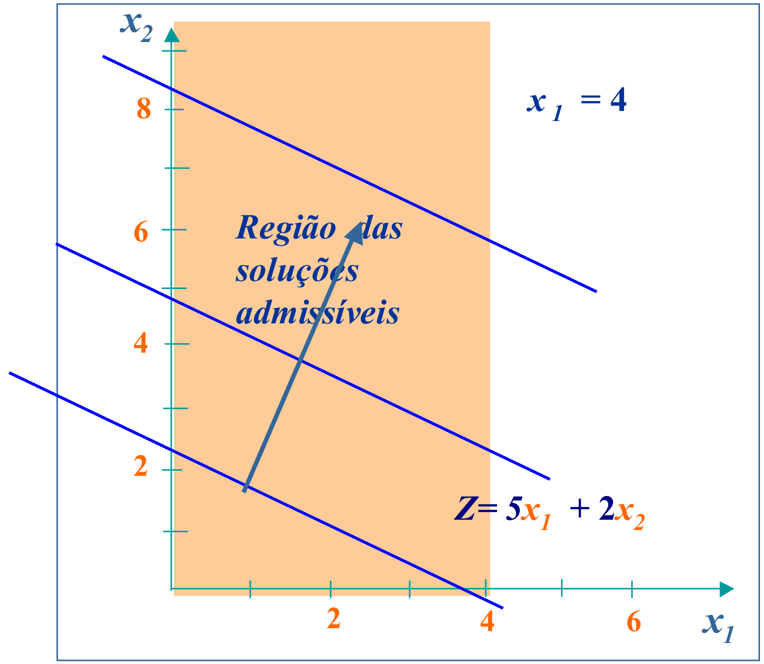


# O Problema não tem Óptimo Finito.

Se as restrições não evitarem o crescimento indefinido do valor da função objectivo Z, no sentido favorável (positivo ou negativo) então *o problema não tem óptimo finito.*

No exemplo protótipo, eliminando as restrições:

$\mathbf{2x_2 \leq 12,\ \ 3x_1 + 2x_2 \leq 18,}$ a região de admissibilidade fica não limitada e o valor da função objectivo pode crescer *indefinidamente* nesta região.



# O problema é Impossível

Se não existirem soluções admissíveis (o conjunto de soluções admissíveis é vazio), então o problema não tem nenhuma solução, *o* ***problema é impossível***.

# Outras formas do modelo.
## 1º. Forma Cartesiana.

*Maximizar* $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

*sujeito a*

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N &\le b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N &\le b_2 \\
&\ldots \\
a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{MN} x_N &\le b_M \\
x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N &\ge 0
\end{aligned}
$$

*Maximizar* $Z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i$$

$$x_j \ge 0$$

$$i = 1,2,\ldots\ldots\ldots M$$

$$j = 1,2,\ldots\ldots\ldots N$$

# Outras formas do modelo.
## 2º. Forma Matricial.

*Maximizar* $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

*sujeito a*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N \leq b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N \leq b_M$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0$$

*Maximizar* $Z = c'X$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

$$c = [c_1, c_2, \ldots, c_N]', X = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$$

$$b = [b_1, b_2, \ldots, b_M]',$$

$$A = [a_{ij}]_{(M \times N)}, 0 = [0,0,\ldots,0]'$$

# Outras formas do Modelo.
## 3º. Forma Vectorial

*Maximizar* $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

*sujeito a*

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N &\le b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N &\le b_2 \\
&\ldots \\
a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{MN} x_N &\le b_M \\
x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N &\ge 0
\end{aligned}
$$

*Maximizar* $Z = c' X$

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_N P_N \le P_o$$

$$x_j \ge 0$$

$$j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots N$$

$$c = [c_1, c_2, \ldots, c_N]', X = [x_1, x_2, \ldots, x_N]'$$

$$P_j = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{Mj}]' \qquad P_0 = [b_1, b_2, \ldots, b_M]'$$

# Redução à Forma Padrão (1)

O primeiro passo para a resolução de um problema de PL consiste na sua *redução à* ***Forma Padrão***. Para isto é preciso *converter* as *restrições funcionais* de *desigualdade* em *restrições equivalentes* de *igualdade*.

uma *restrição de desigualdade* de tipo **"≤"** pode ser convertida numa *restrição de igualdade adicionando uma nova variável* ***não negativa*** *(variável de desvio ou folga)* $x_{N+1}$:

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i \Leftrightarrow a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N + x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

# Redução à Forma Padrão (2)

uma *restrição de desigualdade* de tipo **"≥"** pode ser convertida numa *restrição de igualdade subtraindo uma nova variável não negativa (variável de desvio ou folga)* $x_{N+1}$:

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \geq b_i \Leftrightarrow a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N - x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

# Exemplo Protótipo. Redução à Forma Padrão.

| | Restrição de desigualdade | Variável de folga | Restrição de igualdade |
|---|---|---|---|
| 1ª | $x_1 \leq 4$ | $x_3$ | $x_1 + x_3 = 4$ |
| 2ª | $2x_2 \leq 12$ | $x_4$ | $2x_2 + x_4 = 12$ |
| 3ª | $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ | $x_5$ | $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$ |

# Exemplo Protótipo. Redução à Forma Padrão.

As variáveis de folga têm coeficientes nulos na f.o.

## Forma Canónica

*Maximizar* $Z = 3x_1 + 5x_2$

*sujeito a*

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\quad & \leq 4 \\ 2x_2 & \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Forma Padrão

*Maximizar* $Z = 3x_1 + 5x_2$

*sujeito a*

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad\quad & = 4 \\ 2x_2 \quad\quad + x_4 \quad & = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad + x_5 & = 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

A introdução destes conceitos são necessários para a compreensão do método Simplex.

# Conceitos Fundar

- Suponha-se que:
  - m - número de restrições funcionais,
  - n - número total de variáveis (*de decisão e de folga*);
  - $b_i \geq 0$, ($i$=1,2,…,m) - em caso contrário multiplicar por (-1)
  - o problema de PL se encontra na forma padrão:

$$\text{Maximizar } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad \textbf{(4.1)}$$

*sujeito a*

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \quad \textbf{(4.2)} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n \geq 0 \quad (m \leq n) \quad \textbf{(4.3)}$$

# Conceitos Fundamentais

*Qualquer conjunto de valores para as variáveis* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *que satisfaça as restrições do modelo, i,e, que seja uma solução do sistema de equações lineares* (4.2) *designa-se por* **solução**.

*Uma* **solução admissível** *é uma solução* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $X \in \Re^n$, *que também verifica as condições de não negatividade* (4.3), *i.e., todos os seus valores são não negativos.*

*O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por* **região de admissibilidade.**

*Uma* **solução óptima** *maximiza (minimiza) a função objectivo sobre toda a região de admissibilidade.*

# Como determinar uma solução do problema de PL na forma Padrão?

***Maximizar*** $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ **(4.1)**

***sujeito a***

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \quad (4.2)$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n \geq 0 \quad (m \leq n) \quad (4.3)$$

***c(A) - característica de uma matriz $A_{mxn}$ que corresponde ao número máximo de colunas de A linearmente independentes***

Para determinar uma solução do problema de PL é preciso resolver o sistema de equações lineares (4.2). Este sistema é constituído por *m equações* e *n incógnitas,* Suponha que a *característica* da matriz do sistema é igual a *m*, *c(A)=m,* e que $m \leq n$ . Este sistema tem uma *infinidade de soluções*, tratando-se portanto dum sistema *possível e indeterminado de grau n-m*. Isto significa que podemos exprimir *m* variáveis em função das *n-m* restantes.

# Exemplo Protótipo. Resolução do Sistema de Equações Lineares.

O sistema de equações lineares é constituído por **3** ***equações*** e **5** ***incógnitas***, onde **3 ≤ 5**. A característica **c(A)=3.**

*Maximizar* $Z = 3x_1 + 5x_2$

*sujeito a*

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
2x_2 \qquad\quad + x_4 \qquad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 &= 18
\end{aligned}
$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

$$
\begin{array}{ccccc} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} \\ \end{array}
\qquad \mathbf{X} \qquad\qquad \mathbf{P_0}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}
$$

Este sistema tem uma ***infinidade de soluções,*** tratando-se portanto dum ***sistema possível e indeterminado de grau* 5-3=2,** o que significa que podemos exprimir **3** ***variáveis*** em ***função das restantes* 2.**



Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

# Resolução do sistema de equações lineares pelo Método Gauss-Jordan.

I- Reduzir 3 colunas de A a uma matriz identidade I.

$$
\begin{array}{c} \\ L1 \rightarrow \\ L2 \rightarrow \\ L3 \rightarrow \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18
\end{array}\right)
$$

1º: L2 / 2

2º: L1 x(-3) + L3

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\
0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 6
\end{array}\right)
$$

3º: L2x(-2)+L3

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -6
\end{array}\right)
$$

4º: L3 / -3

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2
\end{array}\right)
$$

5º: L1-L3

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2
\end{array}\right)
$$

*Ficam reduzidas as colunas {P1, P2, P3} a uma matriz identidade I.*

# Resolução do sistema de equações lineares pelo Método Gauss-Jordan.

II- Atribuindo valores arbitrários a $x_4$ e $x_5$, as variáveis $x_1, x_2, x_3$ podem ser expressas em função de $x_4$ *e* $x_5$.

$$
\begin{array}{cccccc}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_0
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2
\end{array}\right)
$$

**Infinidade de soluções** $\Rightarrow$

$x_4 = \lambda_1, \ \lambda_1 \in \Re$

$x_5 = \lambda_2, \ \lambda_2 \in \Re$

$x_1 = 2 + 1/3\ \lambda_1 - 1/3\ \lambda_2$

$x_2 = 6 - 1/2\ \lambda_1$

$x_3 = 2 - 1/3\ \lambda_1 + 1/3\ \lambda_2$

Obviamente, quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, uma solução seria: $x_1=2$, $x_2=6$, $x_3=2$, $x_4=0$, $x_5=0$, i.e., X=(2, 6, 2, 0, 0).

# Base do Sistema. Variáveis básicas e não básicas.

*Se uma submatriz $B_{m \times m}$ da matriz $A$ do sistema de equações correspondente às restrições (4.2) é não singular, i.e., o determinante de $B_{m \times m}$ é não nulo,*

*então $B_{m \times m}$ designa-se por* ***base.***

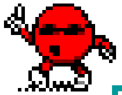
*As $m$ variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_m$, correspondentes às colunas de $B_{m \times m}$, designam-se por* ***variáveis básicas*** *e as restantes n-m variáveis $x_{m+1}$, $x_{m+2}, \ldots, x_n$*

*designam-se por* ***variáveis não básicas***.

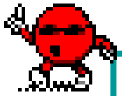
# Solução Básica e Solução Básica Admissível.

Sem perda de generalidade, suponha que a ***base*** B é composta pelas *m* primeiras colunas, i.e., B= { $P_1$ , $P_2$ ,..., $P_m$ }

***como o determinante de B é não nulo (pela definição de base), o sistema de equações $BX_B$ =b tem solução única***



*Obtém-se uma* ***solução básica*** *para o sistema* (4.2) *atribuindo o valor 0 às* ***n-m variáveis não básicas*** $x_{m+1}$ , $x_{m+2}$ ,…, $x_n$, *e determinando uma solução para as restantes* ***m variáveis básicas*** $x_1$ , $x_2$ ,…, $x_m$ *,i.e.,* $X = (x_1 , x_2 ,\dots , x_m, 0,\dots,0)$, *onde* $X_B =(x_1 , x_2 ,\dots, x_m)$ *é a única solução do sistema* $B X_B =b$.



*Se todas as variáveis básicas da solução básica* $X= (x_1 , x_2 ,\dots , x_m, 0,\dots,0)$ *são* ***não negativas*** *então X é uma* ***solução básica admissível*** *(SBA).*

# Solução Básica Degenerada.

Suponha-se $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ uma solução básica *para o sistema* (4.2) com as correspondentes variáveis básicas $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

*Se alguma* **variável básica** $x_1, x_2, \ldots, x_m$ **for igual a zero,**
**a solução básica** *designa-se por*
**solução básica degenerada**.

*Se todas as variáveis básicas são* **não nulas**
**a solução básica** *designa-se por*
**solução básica não degenerada**.

# Exemplo Protótipo: Base, SBA.

•*A matriz B composta pelas colunas B*={ $P_3$ , $P_4$ , $P_5$ } é uma *base do sistema*. O determinante de *B* é não nulo, pelo que o sistema de equações $BX_B=b$ tem solução única.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18
\end{array}\right)
\xrightarrow[BX_B=b]{\text{resolvendo}}
\begin{array}{ccc} P_3 & P_4 & P_5 \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} X_B \\ \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{c} P_0 \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \end{array}
$$

B = columns $P_3$, $P_4$, $P_5$

*Obviamente $x_3=4$, $x_4=12$, $x_5=18$ é a única solução deste sistema.*

**X = ( 0, 0, 4, 12, 18 )** *é uma **solução básica admissível** (SBA) correspondente a esta base.*

$x_3=4$ , $x_4=12$, $x_5=18$ *são **variáveis básicas** e* $x_1=0$, $x_2=0$ são ***variáveis não básicas.***

# Quantas soluções básicas tem um problema de PL?

## Matriz das restrições do exemplo Protótipo

$$A = \begin{array}{ccccc} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O número de ***soluções básicas*** é igual ao número de matrizes 3x3 que podem ser extraídas da matriz A com determinante não nulo

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = 10$$

Existem 10 submatrizes candidatas a bases:

$$B_1 = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$
$$B_2 = \{ P_1, P_3, P_4 \}$$
$$B_3 = \{ P_1, P_4, P_5 \}$$
$$B_4 = \{ P_1, P_2, P_4 \}$$
$$B_5 = \{ P_1, P_2, P_5 \}$$
$$B_6 = \{ P_1, P_3, P_5 \} \rightarrow \textit{determinante nulo}$$
$$B_7 = \{ P_2, P_3, P_4 \}$$
$$B_8 = \{ P_2, P_3, P_5 \}$$
$$B_9 = \{ P_2, P_4, P_5 \} \rightarrow \textit{determinante nulo}$$
$$B_{10} = \{ P_3, P_4, P_5 \}$$

# Exemplo Protótipo: Matrizes com determinante nulo.

$$A = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_4=0]{x_2=0} B_6 = \begin{array}{ccc} P_1 & P_3 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B_6| = 0$$

O *determinante de* $B_6$ *é nulo* $\Rightarrow$ B não é base $\Rightarrow$ *o sistema é indeterminado*

$$A = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_3=0]{x_1=0} B_9 = \begin{array}{ccc} P_2 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B_9| = 0$$

O *determinante de* $B_9$ *é nulo* $\Rightarrow$ B não é base $\Rightarrow$ *o sistema é indeterminado*

# Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$$X_B = B^{-1} P_0$$

$$A = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_2=0]{x_1=0} B_{10} = \begin{array}{ccc} P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_B \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

*Det*($B_{10}$) *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X=( 0, 0, 4, 12, 18)

$$A = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_4=0} B_1 = \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

*Det*($B_1$) *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X= (2, 6, 2, 0, 0)

# Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_3=0} B_4 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_4)$ *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X=( 4, 3, 0, 6, 0)

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_3=0]{x_2=0} B_3 = \begin{pmatrix} P_1 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_3)$ *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X= (4, 0, 0, 12, 6)

# Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$X_B = B^{-1} P_0$

$$A = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_4=0]{x_1=0} B_8 = \begin{array}{ccc} P_2 & P_3 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_8)$ *não nulo* $\Rightarrow SBA\ X = (0, 6, 4, 0, 6)$

# Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA).

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_1=0} B_7 = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

*Det*($B_7$) *não nulo* ,$x_4 < 0 \Rightarrow$ *SBNA* X=( 0, 9, 4, -6, 0)

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_2=0} B_2 = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

*Det*($B_2$) *não nulo*, $x_3 < 0 \Rightarrow$ *SBNA* X= (6, 0, -2, 12, 0)

# Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA).

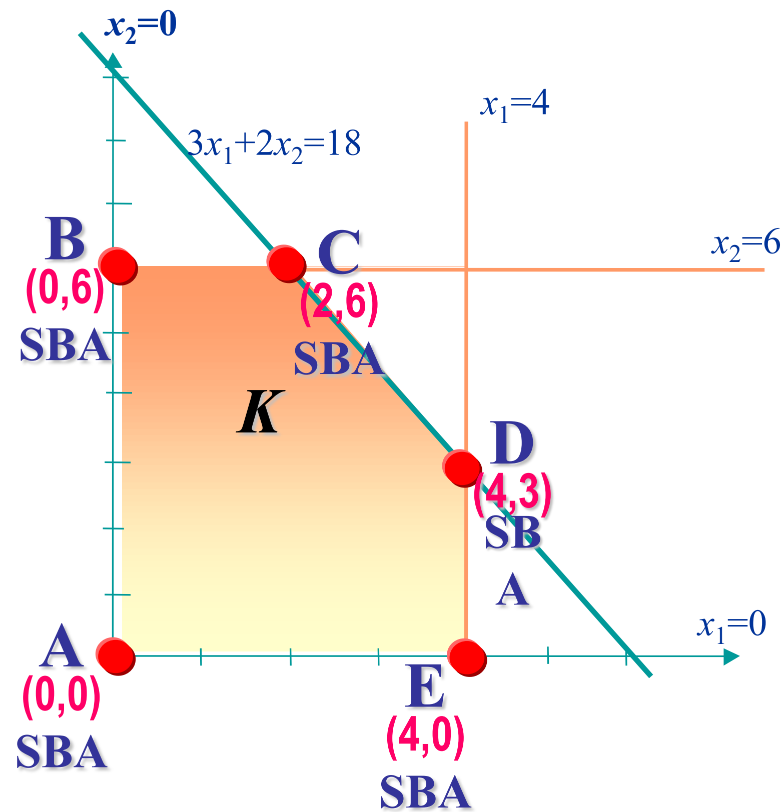
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xRightarrow[x_4=0]{x_3=0} B_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} X \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\mathit{Det}(B_5)\ \textit{não nulo},\ x_5 < 0 \Rightarrow \mathit{SBNA}\quad X = (4, 6, 0, 0, -6)}$$

# Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis (SBA).

Existem 5 SBA que correspondem a 5 pontos extremos de K.

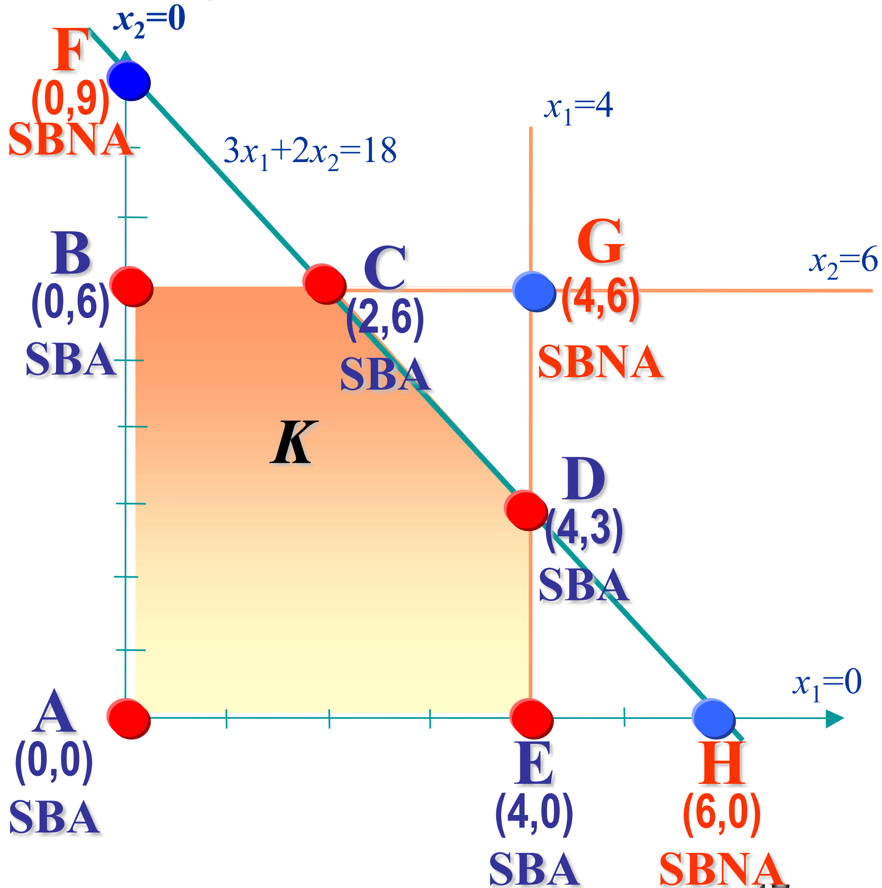
| Pontos Extr. | SBA | Base |
|---|---|---|
| A=(0,0) | X=(0,0,4,12,18) | B={$P_3$ , $P_4$ , $P_5$ } |
| B=(0,6) | X=(0,6,4,0,6) | B={ $P_2$ , $P_3$ , $P_5$ } |
| C=(2,6) | X=(2,6,2,0,0) | B={ $P_1$ , $P_2$ , $P_3$ } |
| D=(4,3) | X=(4,3,0,6,0) | B={ $P_1$ , $P_2$ , $P_4$ } |
| E=(4,0) | X=(4,0,0,12,6) | B={ $P_1$ , $P_4$ , $P_5$ } |



# Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA)

Existem 3 SBNA que correspondem àqueles pontos onde se intersectam pelo menos duas restrições e que ficam fora da região de admissibilidade.

| | SBNA | Base |
|---|---|---|
| F=(0,9) | X=(0,9,4,-6, 0) | B={$P_2$, $P_3$, $P_4$ } |
| G=(4,6) | X=(4,6,0,0,-6) | B={ $P_1$, $P_2$, $P_5$ } |
| H=(6,0) | X=(6,0,-2,12,0) | B={ $P_1$, $P_3$, $P_4$ } |



# Teorema Fundamental da PL.

Se existe uma solução admissível do problema de PL definido pelas expressões (4.1), (4.2) e (4.3), então existe uma solução básica admissível, e se existe uma solução óptima admissível então existe uma solução óptima básica admissível.

# Número de Soluções Básicas.

- Do *teorema fundamental da PL* conclui-se que não é necessário *procurar a solução óptima* entre todas as soluções admissíveis, mas apenas entre as *soluções básicas admissíveis.*
- O *número máximo* destas *soluções básicas* para um problema com *m restrições* e *n variáveis*, é dado pelo número de possíveis combinações de *m* números que podem ser obtidas usando *n números*:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

***A solução óptima poderia ser encontrada pela experimentação de todas as soluções básicas admissíveis, porém este método é tremendamente ineficaz.***

# Conclusões

**A Programação Linear procura :**

1. Desenvolver um método que permita passar de ***uma solução básica admissível*** para uma o***utra solução básica admissível*** que corresponda a um **melhor** valor da ***função objectivo;***
2. Dispor de um ***critério*** que permita saber quando se ***alcançou a solução óptima*** sem necessidade de experimentar todas ***as soluções básicas.***