Optimização

Aula 8

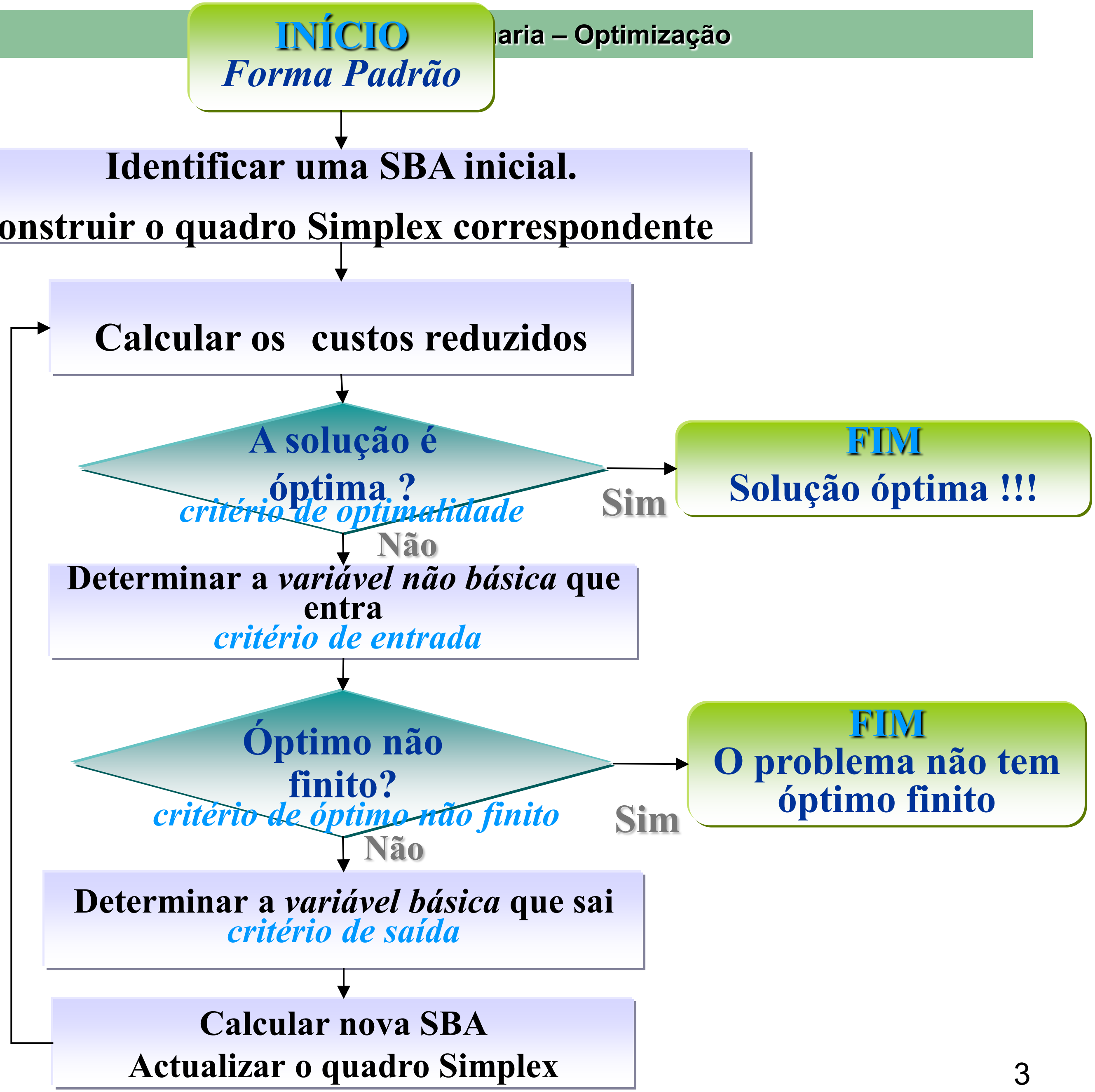
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear (PL)

Aula 8 : O método Simplex.
Casos particulares.

- Empate no critério de entrada.
- Óptimo não finito.
- Soluções óptimas alternativas.
- Degenerescência.

Fluxograma


INÍCIO
Forma Padrão
Identificar uma SBA inicial.
Construir o quadro Simplex correspondente
Calcular os custos reduzidos
A solução é óptima ?
critério de optimalidade
Sim
FIM
Solução óptima !!!
Não
Determinar a variável não básica que entra
critério de entrada
Óptimo não finito?
critério de óptimo não finito
Sim
FIM
O problema não tem óptimo finito
Não
Determinar a variável básica que sai
critério de saída
Calcular nova SBA
Actualizar o quadro Simplex

Caso 1: Empate no critério de entrada

O máximo dos custos reduzidos é atingido em mais do que numa variável *não básica*.

Critério de entrada:

$$\max \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = c_{j_1} - z_{j_1} = c_{j_2} - z_{j_2} = \ldots = c_{j_k} - z_{j_k}$$

Solução:

Escolhe-se arbitrariamente uma para entrar. Qualquer que seja a escolha o processo converge para o óptimo.

Caso 2: Óptimo não finito.

A região de admissibilidade é não limitada e o valor da f.o. cresce indefinidamente nesta região.

<u>Critério de óptimo não finito</u>:

Não existe nenhuma componente positiva na coluna pivotal.

coluna pivot.

Critério de entrada:

$$\max_{j} \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = c_r - z_r$$

$$\begin{matrix} x_1 & \cdots & \boxed{x_r} & \cdots & x_m \\ x_{11} & \cdots & x_{1r} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2r} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & \\ x_{m1} & \cdots & x_{mr} & \cdots & x_{mn} \end{matrix}$$

Existe alguma componente $x_{ir} > 0$?

Não → FIM o problema não tem óptimo finito

Sim → O vector P_r da matriz de restrições está em condições de entrar na base

Caso2: Óptimo não finito. Exemplo.

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

C_B	c_j / X_B	2 / x_1	3 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	$\bar{b}$
2	x_1	1	0	-1/4	-1/2	0	1
3	x_2	0	1	-1/4	1/2	0	2
0	x_5	0	2	1/4	-1/2	1	1
	z_j	2	3	-5/4	-1	0	8
	$c_j - z_j$	0	0	5/4	1	0	
2	x_1	1	0	0	-1	1	2
3	x_2	0	1	0	0	1	3
0	x_3	0	0	1	-2	4	4
	z_j	2	3	0	-2	5	13
	$c_j - z_j$	0	0	0	2	-5	

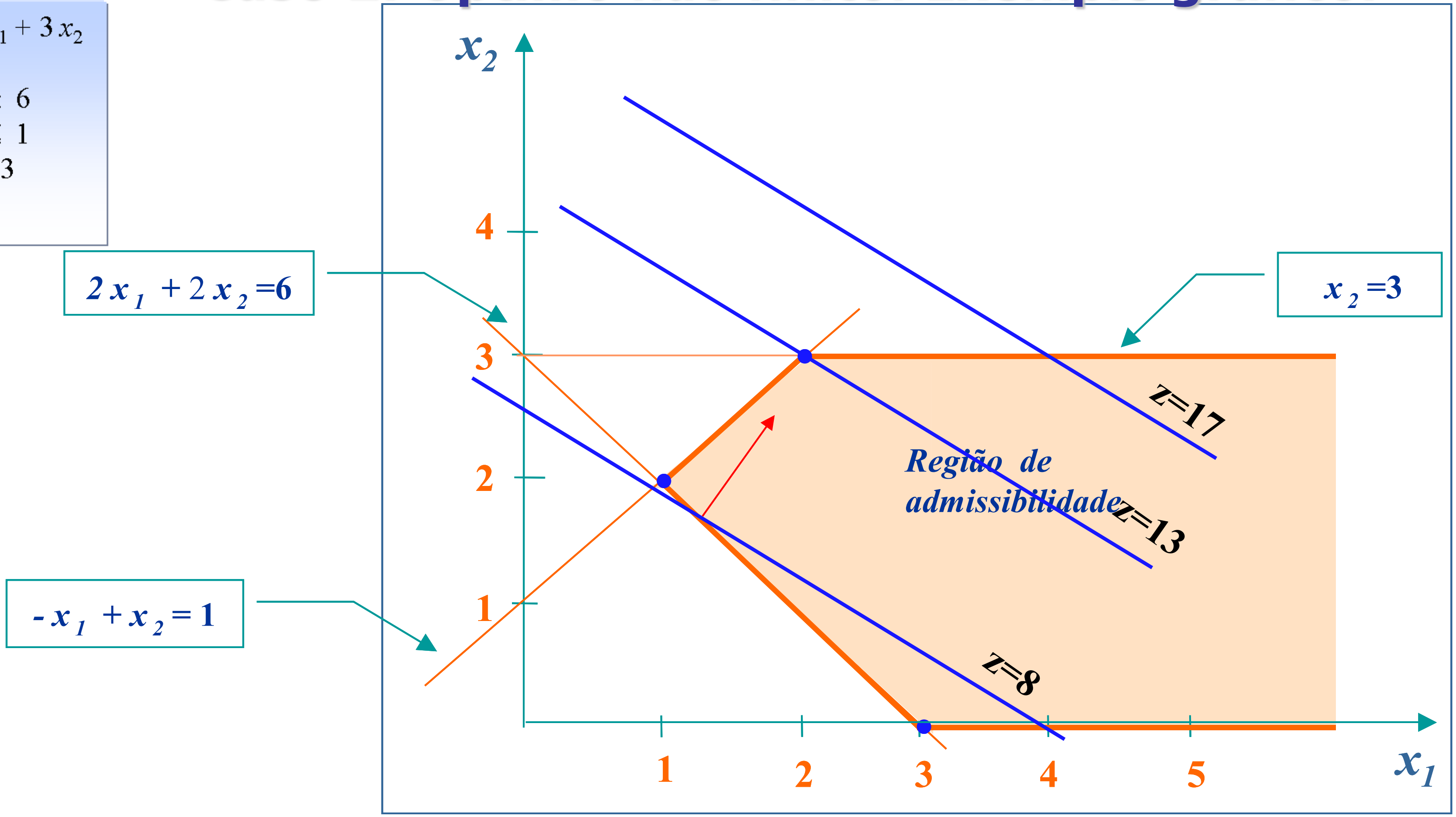
máximo

Todas as componentes da coluna pivotal são não positivas (são todas ≤0): ***o problema não tem óptimo finito***

Caso 2: Óptimo não finito. Exemplo gráfico.

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeito a

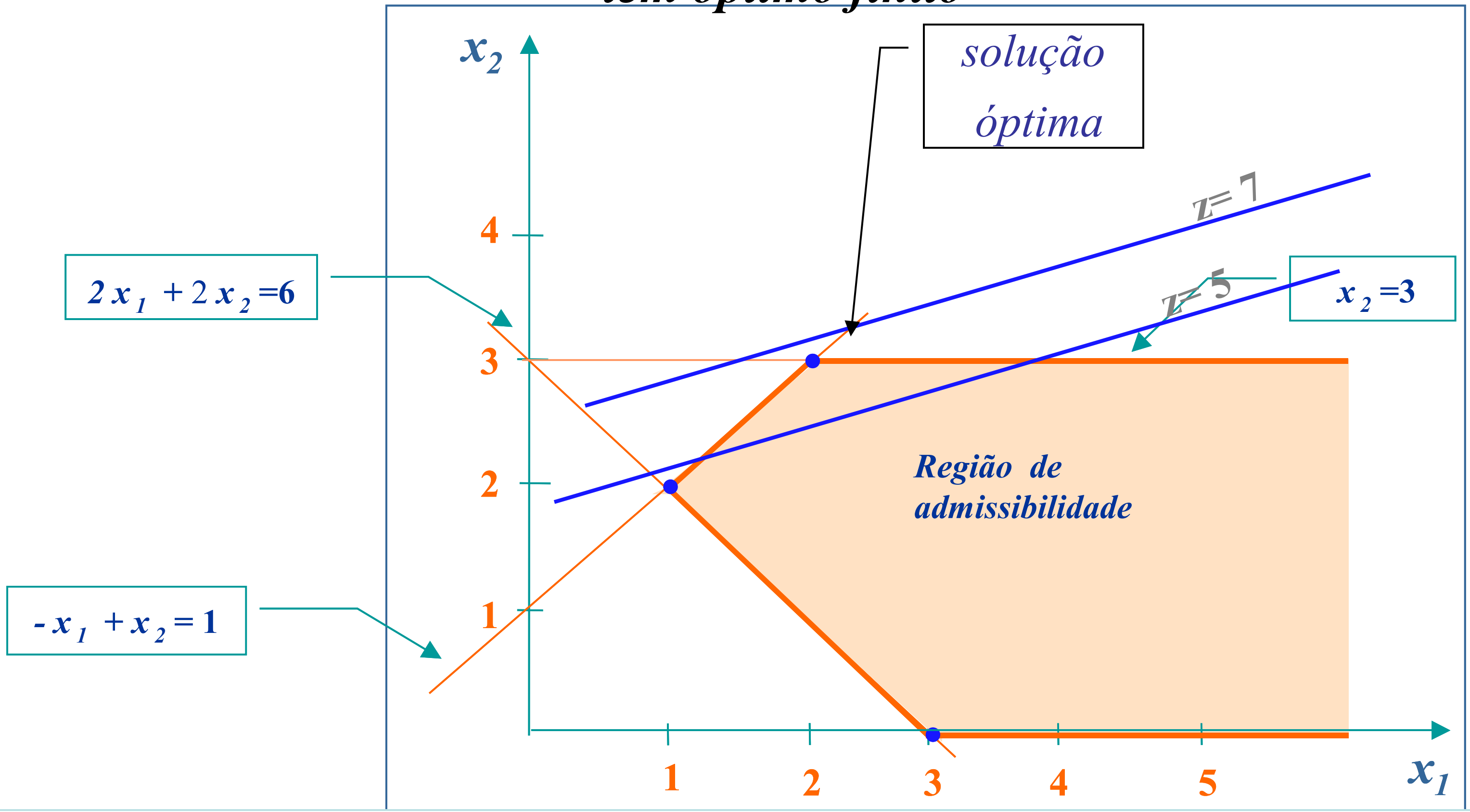
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



A região de admissibilidade é não limitada e o valor da f.o. cresce indefinidamente nesta região, o que significa que o problema **não tem óptimo finito.**

Região de Admissibilidade Não Limitada e Óptimo finito. Exemplo gráfico.

Se mudamos a f.o de $z=2x_1+3x_2$ para $z=-x_1+3x_2$ este novo problema ***tem óptimo finito***



A região de admissibilidade é não limitada e o problema tem óptimo finito. O ponto (2,3) é a solução óptima com um valor óptimo igual a 7.

Caso 3: Soluções óptimas alternativas.

O problema tem uma ***infinidade de soluções óptimas*** das quais pelo menos duas são soluções básicas e as restantes podem ser obtidas por combinação linear convexa daquelas

Como identificar a existência de soluções óptimas alternativas?

Quando no quadro simplex óptimo existe alguma ***variável não básica*** com ***custo reduzido nulo*** ($c_j - z_j = 0$) com pelo menos ***uma componente positiva*** na correspondente coluna do quadro.

Caso 3: Soluções óptimas alternativas...

Suponha-se que foi encontrada, na iteração *k, a solução óptima* X^k com z^* como valor da f.o. e que no quadro Simplex existe uma *variável não básica* com *custo reduzido nulo* e com pelo menos ***uma componente positiva*** na correspondente coluna do quadro Simplex.

a entrada desta variável não básica corresponde a uma nova SBA $\mathbf{X^{k+1}}$

Ver capítulo 4.2.2

$z^{k+1} = z^* + \theta\,(c_j - z_j) = z^* + \theta\,(0) = z^*$, i.e., os valores da f.o. coincidem

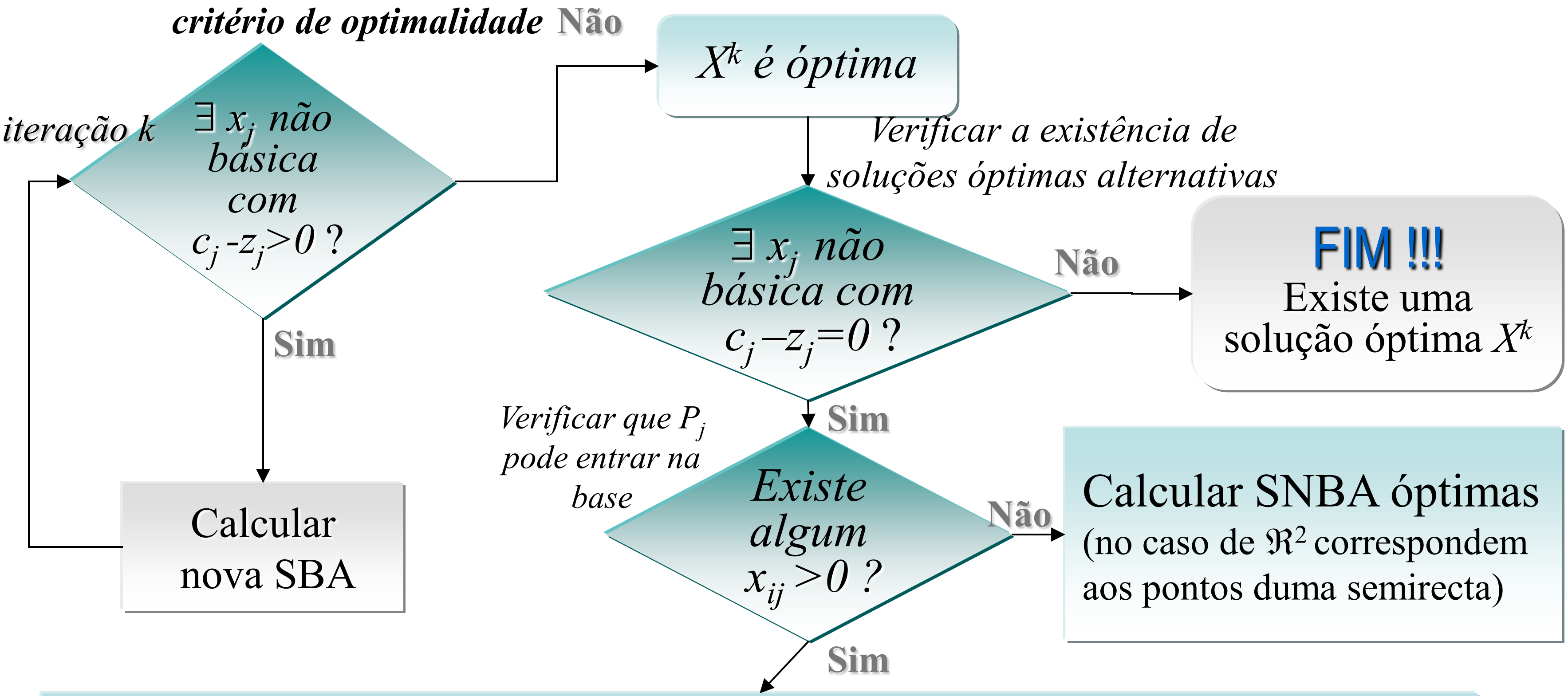
$\mathbf{X^{K+1}}$ é também *solução óptima.*

Assim podemos, sucessivamente, identificar todas as ***soluções básicas alternativas***.
As soluções óptimas ***não básicas*** podem ser calculadas como combinação linear convexa das soluções básicas óptimas:

$$X^* = \lambda X^*_1 + \lambda X^*_2 + \ldots + \lambda X^*_n \;,\; 0<\lambda<1$$

$$X^*_1, .., X^*_n \text{ – SB óptimas}$$

Caso 3: Soluções óptimas alternativas. Algoritmo.



1º. Calcular SBA óptimas alternativas.

2º. Calcular SNBA óptimas como combinação linear convexa das SBA (no caso de $\Re^2$ correspondem aos pontos dum segmento de recta)

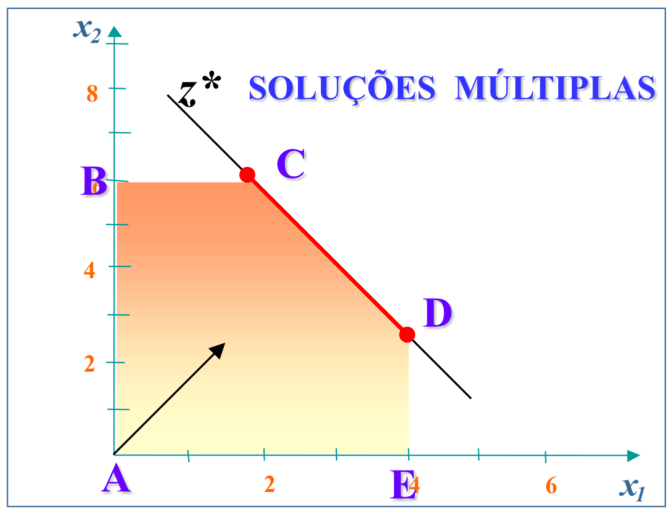
Caso 3: Soluções óptimas alternativas. Exemplo gráfico

A função objectivo alcança o seu valor máximo em qualquer ponto do segmento de recta CD. Este segmento de recta constitui o conjunto de todas as combinações lineares convexas dos pontos C e D.

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 & \leq 4 \\
2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\
x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$



o gradiente da função objectivo coincide com o gradiente da recta da 3ª restrição do exemplo, i.e., as rectas da função objectivo seriam paralelas à recta $3x_1 + 2x_2 = 18$ **.**

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Regra da Estrela:

1 / 0 x

=2 -(0x3/1)=2

3 x 2 -

32

1 / 1 x

=0 -(1x3/1)=-3

3 x 0 -

33

1 / 0 x

=0 -(0x3/1)=0

3 x 0 -

34

1 / 4 x

=18 -(4x3/1)=6

3 x 18 -

3b

Soluções óptimas alternativas. Exemplo: Quadro 1

	c_j	3	2	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	3	2	0	0	1	18
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	3	2	0	0	0	
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	0	2	-3	0	1	6

Linha 1 e 2: NÂO MUDÃO

Linha 3:

	3	2	0	0	1	18
-(3)	1	0	1	0	0	4
	0	2	-3	0	1	6

Soluções óptimas alternativas. Exemplo: Quadro 2

Linha 1: NÃO MUDA

Linha 3: dividir pelo pivot

Linha 2:

	0	2	0	1	0	12
-(2)	0	1	-3/2	0	1/2	3
	0	0	3	1	-1	6

	c_j	3	2	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	0	2	-3	0	1	6
	z_j	0	0	3	0	0	12
	$c_j - z_j$	0	2	-3	0	0	
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
2	x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3

Determinando soluções óptimas alternativas. Exemplo: Quadro óptimo

A solução X=(4,3,0,6,0) que corresponde ao ponto D=(4,3) é óptima. O valor óptimo é 18

A variável não básica x_3 tem : $c_3 - z_3 = 0$, e na coluna do quadro existem coeficentes positivos $\Rightarrow$ existe soluções óptimas alternativas

A solução X=(2,6,2,0,0) que corresponde ao ponto C=(2,6) também é óptima com o mesmo valor óptimo 18

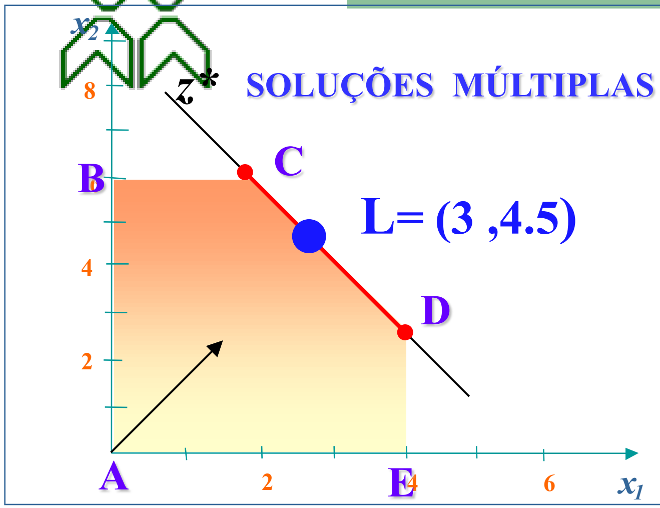
C_B	c_j / X_B	3 / x_1	2 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	$\bar{b}$
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
2	x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3
	z_j	3	2	0	0	1	18
	$c_j - z_j$	0	0	0	0	-1	
3	**x_1**	**1**	**0**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**2**
0	**x_3**	**0**	**0**	**1**	**1/3**	**-1/3**	**2**
2	**x_2**	**0**	**1**	**0**	**1/2**	**0**	**6**
	z_j	**3**	**2**	**0**	**0**	**1**	**18**
	$c_j - z_j$	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	

Determinando soluções óptimas alternativas.

A solução $X^*=(2,6,2,0,0)$ que corresponde ao ponto $C=(2,6)$ também é óptima com o mesmo valor óptimo 18

	c_j	3	2	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
3	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
2	x_2	0	1	0	1/2	0	6
	z_j	3	2	0	0	1	18
	c_j-z_j	0	0	0	0	-1	

A variável não básica x_4 tem $c_4-z_4=0$. A iteração extra não muda os custos reduzidos, i.e., a variável básica que sai fica com o mesmo valor nos seus custos igual a 0. Se continuar com outra iteração vamos a obter o quadro anterior, ou seja a primeira SBA óptima. Verificar!!!!...



Determinando as soluções óptimas alternativas não básicas.

Existem duas SBA óptimas com o valor óptimo 18:

- X^*_1*=(4,3,0,6,0)-que corresponde ao ponto D=(4,3)*
- X^*_2*=(2,6,2,0,0) -que corresponde ao ponto C=(2,6)*

Qualquer outra solução <u>*não básica*</u> *admissível (SNBA) óptima,* X^* *, é obtida como combinação linear convexa de* X^*_1 *e* X^*_2*, atribuindo a* λ *valores numéricos diferentes entre 0 e 1 :*

$$X^* = \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\lambda = \frac{1}{2}}{\overset{\text{Por exemplo fixando}}{=}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \\ \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 0 \\ \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4{,}5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A SBNA óptima X=*(3 ,4.5,1,3,0) corresponde ao ponto L=(3 ,4.5) do segmento de recta CD

Caso 4: Degenerescência & "cycling".

•Quando se está a definir qual a variável básica que sai e o mínimo é atingido *em mais do que um dos quocientes* (empate no critério de saída) obtém-se uma solução básica *degenerada*, i.e., com variáveis básicas nulas.

•O Algoritmo Simplex nos casos de soluções degeneradas pode entrar em ciclo ("cycling") i.e., pode começar a reproduzir periodicamente as mesmas soluções básicas, mantendo-se constante o valor da f.o. e nunca atingir o valor óptimo.

Caso 4: Degenerescência. Exemplo.

Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$
sujeito a

$x_1 + 4x_2 \le 8$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

mínimos empatados

C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
	c_j	3	9	0	0	
0	x_3	1	$\boxed{4}$	1	0	8
0	x_4	1	2	0	1	4
	z_j	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	3	9	0	0	
9	x_2	1/4	1	1/4	0	2
0	x_4	$\boxed{1/2}$	0	-1/2	1	0
	z_j	9/4	9	9/4	0	18
	$c_j - z_j$	3/4	0	-9/4	0	

8/4= 2

4/2= 2

Escolhe-se arbitrariamente para sair x_3

Solução degenerada

A solução $X=(0, 2,0,0)$ *é* <u>*degenerada*</u> *(a variável básica* x_4 *é nula)*

Caso 4: Degenerescência. Exemplo

Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$
sujeito a

$x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

	c_j	3	9	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{b}$
9	x_2	1/4	1	1/4	0	2
0	x_4	1/2	0	-1/2	1	0
	z_j	9/4	9	9/4	0	18
	$c_j - z_j$	3/4	0	- 9/4	0	
9	x_2	0	1	1/2	-1/2	2
3	x_1	1	0	-1	2	0
	z_j	3	9	3/2	3/2	18
	$c_j - z_j$	0	0	-3/2	-3/2	

2x4= 8

0x2= 0

mínimo

Solução degenerada

A solução X=(0, 2,0,0) é óptima e degenerada (a variável básica x_1 é nula)

Caso 4: Degenerescência. Exemplo Gráfico.

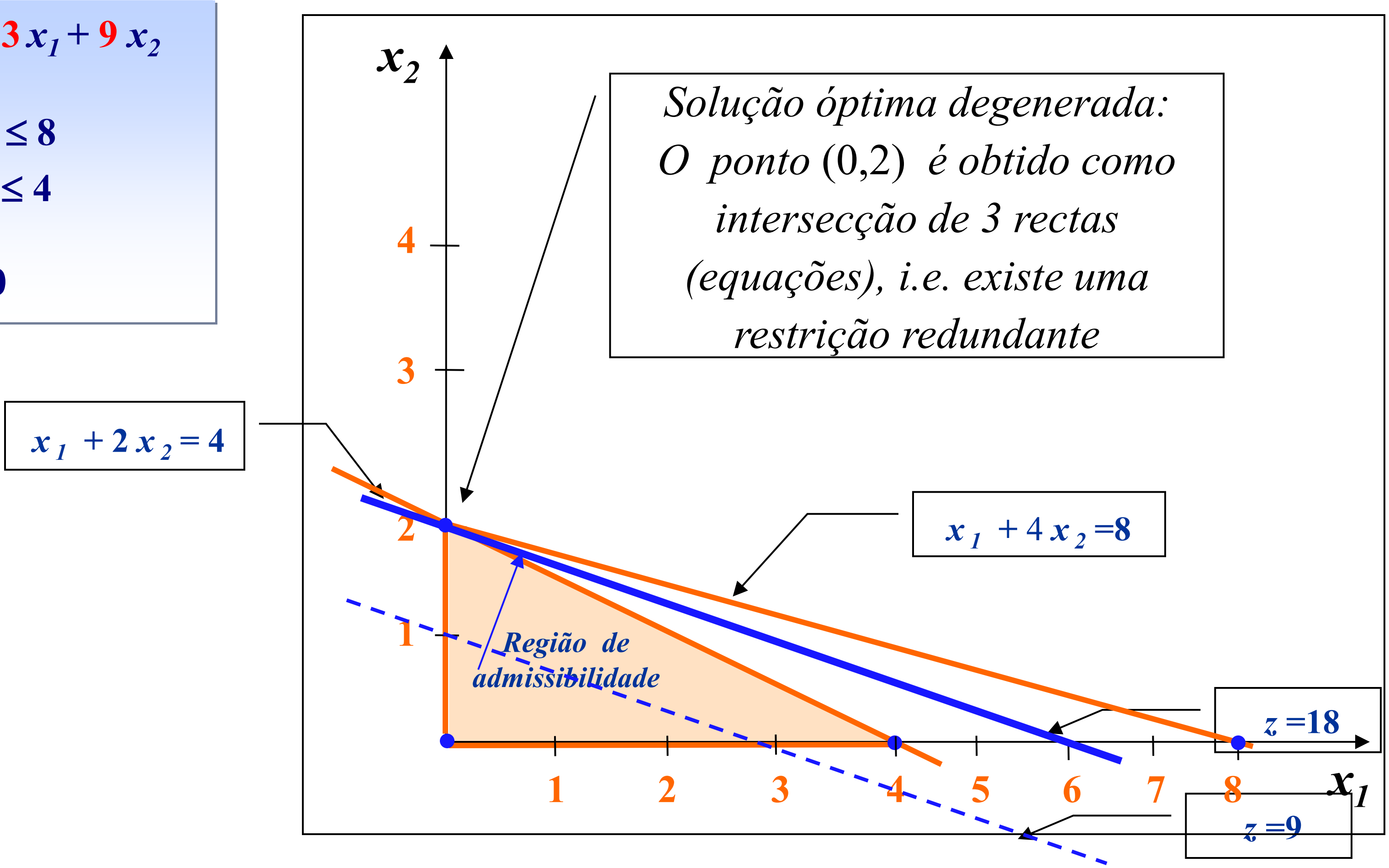
Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$

sujeito a

$x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



Caso 4: Degenerescência.

Degenerescência acontece quando no percurso do algoritmo Simplex aparece uma SBA degenerada. Podem acontecer duas situações:

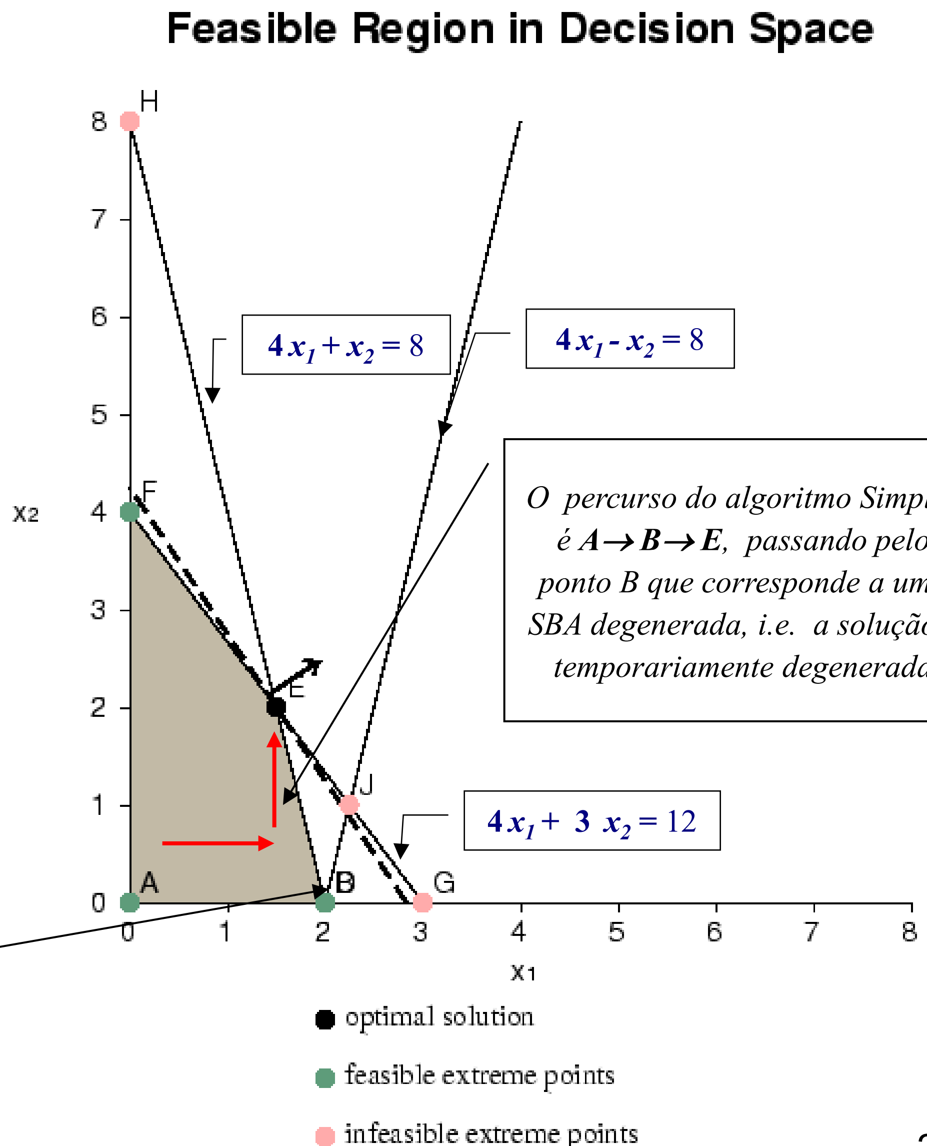
- O algoritmo Simplex pode *entrar em ciclo* ("*cycling*"), podendo repetir a mesma sequência de iterações, nunca atingindo a solução óptima.
- O algoritmo Simplex consegue continuar até atingir uma solução óptima. Neste caso diz-se que a solução é temporariamente degenerada.

Solução temporariamente degenerada. Exemplo gráfico.

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$
sujeito a

$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$4x_1 - x_2 \le 8$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



O percurso do algoritmo Simplex é $A \to B \to E$, *passando pelo ponto B que corresponde a uma SBA degenerada, i.e. a solução é temporariamente degenerada*

O ponto (2,0) é obtido como intersecção de 3 rectas: $4x_1 + x_2 = 8$, $4x_1 - x_2 = 8$, $x_2 = 0$ *e corresponde a uma SBA degenerada*

Técnicas para tratar a degenerescência.

•Para evitar a entrada em ciclo do Simplex pode ser utilizada uma das seguintes técnicas:

– Técnica de perturbação:

"perturbando" ligeiramente o vector dos termos independentes condicionando a escolha dos índice da linha pivotal.

– Regra de Bland:

condiciona a escolha dos índices da coluna e linha pivotal.

•A regra de Bland é mais elegante do que a técnica de perturbação, mas, computacionalmente menos eficiente.

Degenerescência. Técnica de perturbação.

Foi introduzida por Charnes, 1952, e é equivalente à outra regra: a regra lexicográfica apresentada por Dantzig, Orden and Wolfe em 1955

Suponha-se que a matriz básica inicial (matriz identidade) ocupa as m primeiras colunas do quadro.

1º.Calcular:

$$\boxed{\theta = \theta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{im+1}} \middle| x_{im+1} > 0 \right\}}$$

Suponha-se que existe empate nos índices s,...,q (correspondentes às linhas do quadro)

$$\min_{i=s\ldots q} \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ir}} \middle| x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sr}} = \ldots = \frac{x_{q0}}{x_{qr}}$$

em lugar de calcular os quocientes entre os termos independentes, calcular entre as componentes com índice 1 nas colunas correspondentes

2º.Calcular:

$$\boxed{\min_{i=s\ldots q} \left\{ \frac{x_{i1}}{x_{ir}} \middle| x_{ir} > 0 \right\}}$$

Suponha-se que ainda existe empate nestes novos quocientes

$$\min_{i=s\ldots q} \left\{ \frac{x_{i1}}{x_{ir}} \middle| x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s1}}{x_{sr}} = \ldots = \frac{x_{q1}}{x_{qr}}$$

Degenerescência. Técnica de perturbação.

em lugar de calcular os quocientes entre os termos independentes, calcular entre as componentes com índice **2** *nas colunas correspondentes*

3º. Calcular::

$$\boxed{\min_{i=s\ldots q}\left\{\frac{x_{i2}}{x_{ir}}\middle| x_{ir}>0\right\}}$$

$$\min_{i=s\ldots q}\left\{\frac{x_{i2}}{x_{ir}}\middle| x_{ir}>0\right\}=\frac{x_{s2}}{x_{sr}}=\ldots=\frac{x_{q2}}{x_{qr}}$$

Se o empate ainda persistir, repetir o processo com

$$\boxed{\min_{i=s\ldots q}\left\{\frac{x_{ij}}{x_{ir}}\middle| x_{ir}>0: j=2,3,\ldots m\right\}}$$

este processo garante o desempate.

Técnica de Perturbacão . Exemplo.

Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$
sujeito a

$$x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Para aplicar a técnica de perturbação a matriz identidade deve ocupar as primeiras colunas do quadro

recalcular quocientes:

	c_j	0	0	3	9		
C_B	X_B	x_3	x_4	x_1	x_2	$\bar{b}$	***mínimos empatados***
0	x_3	1	0	1	4	8	8/4= 2
0	x_4	0	1	1	2	4	4/2= 2
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	0	0	3	9		

mínimo

1/4 *em lugar de* 8/4= 2
0/2 *em lugar de* 4/2= 2

Como existe empate nos mínimos dos quocientes para lograr um desempate é preciso "perturbar" os termos independentes. i.e., em lugar de calcular os quocientes entre os termos independentes, calcular entre as componentes da linha 1 *nas colunas das variáveis onde existe o empate (neste caso :* x_3 *e* x_4 *) : min* $(1/4, 0/2) = 0$ *em lugar de min* $(8/4, \ 4/2) = 2$.
Como existe agora um desempate a variável a sair da base é x_4

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Degenerescência. Regra de Bland.

Foi introduzida por Bland em 1977

1º. Escolher a coluna para entrar a base:
aquela que tem menor índice *j* que verifica $(c_j - z_j) > 0$

2º. Regra do quociente mínimo:

$$\theta = \theta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{im+1}} \middle| x_{im+1} > 0 \right\}$$

Se existir empate, escolher entre os quocientes que dão origem ao empate aquele com menor índice .