



Optimização

Aula 13



Programação Linear (PL).

Aula 13 Dualidade.

Propriedades.

- Propriedades Fundamentais.
- Propriedade dos Desvios Complementares. (complementaridade das slacks)



Formas Canónica e Padrão de Dualidade.

Problema Primal

$$\text{Maximizar } z = c^t X$$

sujeito a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Problema Primal

$$\text{Maximizar } z = c^t X$$

sujeito a

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Minimizar } w = b^t Y$$

sujeito a

$$A^t Y \geq c$$

$$Y \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Minimizar } w = b^t Y$$

sujeito a

$$A^t Y \geq c$$

$$Y \text{ livre}$$



Teorema 13.1 (fraco de dualidade)

Considere o anterior par de problemas duais (P)-(D) na forma canónica.

Se X é admissível para (P) e Y é admissível para (D) então:

$z = c^t X \leq b^t Y = w$, i.e., o valor da função objectivo de qualquer solução admissível do problema primal, não excede o valor da função objectivo do problema dual.

Prova: como X e Y são soluções admissíveis para os respectivos problemas primal-dual então:

X é SBAP
 Y é SBAD

$$AX \leq b$$

$Y \geq 0$ multiplicando por Y^t
ambos membros

$$Y^t AX \leq Y^t b = b^t Y = w \quad (a)$$

Y é SBAD
 X é SBAP

multiplicando por X^t
ambos membros

$$X^t A^t Y \geq X^t c = c^t X = z \quad (b)$$

de b e a

$$z = c^t X \leq X^t A^t Y = Y^t AX \leq b^t Y = w$$

$$z = c^t X \leq b^t Y = w$$

multiplicação de matrizes e vectores.



Corolário 13.1. (corolário do teorema fraco de dualidade)

Se X^* é admissível para (P) e Y^* é admissível para (D) e os valores óptimos das respectivas funções objectivo coincidem, i.e., $z = c^t X = b^t Y^* = w^*$, então X^* é a solução óptima do primal e Y^* é a solução óptima do dual

Prova:

pele teorema 13.1 qualquer solução admissível X do primal



$$c^t X \leq b^t Y^* \quad (a)$$

por hipótese



$$c^t X^* = b^t Y^* \quad (b)$$

de (a) e (b)



$$c^t X \leq c^t X^*$$

De igual forma, pode ser demonstrado que Y^* é a solução óptima do dual



X^* é a solução óptima do primal



Teorema 13.2: (relações entre as soluções óptimas primal e dual).

Se o primal tem solução óptima (i.e. tem óptimo finito) então o respectivo dual também tem e os correspondentes valores óptimos z^* e w^* coincidem.

Prova: Considere o problema primal de maximização na forma padrão e seja A a matriz das restrições:

X^* é solução óptima do primal $\Rightarrow X^* = \begin{bmatrix} X_B^* \\ X_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

pelos critérios de optimalidade para a solução primal, todos os custos reduzidos são não negativos $\Rightarrow c_j - z_j = c_j - c_B^t B^{-1} P_j \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$

Faça-se $Y^* = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$\Rightarrow c_j - Y^* P_j \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n \Rightarrow A^t Y^* \geq c$

$\Rightarrow Y^*$ é uma SBA do problema dual

Minimizar $w = y^t b$

s. a

$A^t Y \geq c$

Y livres

$z^* = c^t X^* = c_B^t X_B^* = c_B^t B^{-1} b = Y^{t*} b = b^t Y^* = w^*$

$Y^* = c_B^t B^{-1}$ é a solução óptima para o problema dual





Teorema Fundamental da Dualidade.

- 1°. Um problema de PL tem óptimo finito se e só existirem soluções admissíveis para os problemas primal-dual.
- 2°. Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções admissíveis, i.e., é impossível.

Prova : 1°.

se X é admissível para (P)



o valor da f. o. $z = c^t X$

se Y' é admissível para (D)



o valor da f.o. $w = b^t Y$

pele Teorema

fraco de dualidade



$$z = c^t X \leq b^t Y = w$$

a solução óptima X^* também verifica:

$$z^* = c^t X^* \leq b^t Y = w$$

w é finito



z^* é finito

o primal tem óptimo finito



o dual tem óptimo finito





Teorema Fundamental da Dualidade.

Prova 2º:

2º. Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções admissíveis, i.e., é impossível.

*suponha que o primal não tem óptimo finito (i.e. $z \rightarrow \infty$);
suponha ao contrário que o dual tem soluções admissíveis;
seja Y uma solução dual admissível (SBAD) :*

pelo Teorema fraco de dualidade



$z = c^t X \leq b^t Y = w$ é limitada !!!



absurdo !!! (por hipóteses $z \rightarrow \infty$)




o dual não tem soluções admissíveis

analogamente é possível demonstrar que se o dual não tem óptimo finito, então o primal não tem soluções admissíveis.





Teorema Fundamental da Dualidade. Conclusões



Segundo o Teorema fundamental da dualidade pode concluir-se que para os problemas primal-dual, verifica-se uma e só uma das seguintes situações:

- Ambos têm soluções óptimas X^* e Y^* e os valores óptimos das respectivas funções objectivo coincidem: $z^* = w^*$;
- Se um problema não tem óptimo finito, então o outro é impossível;
- Ambos os problemas são impossíveis.



Ambos os Problemas são Impossíveis. Exemplo.

Primal

Maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$$-x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

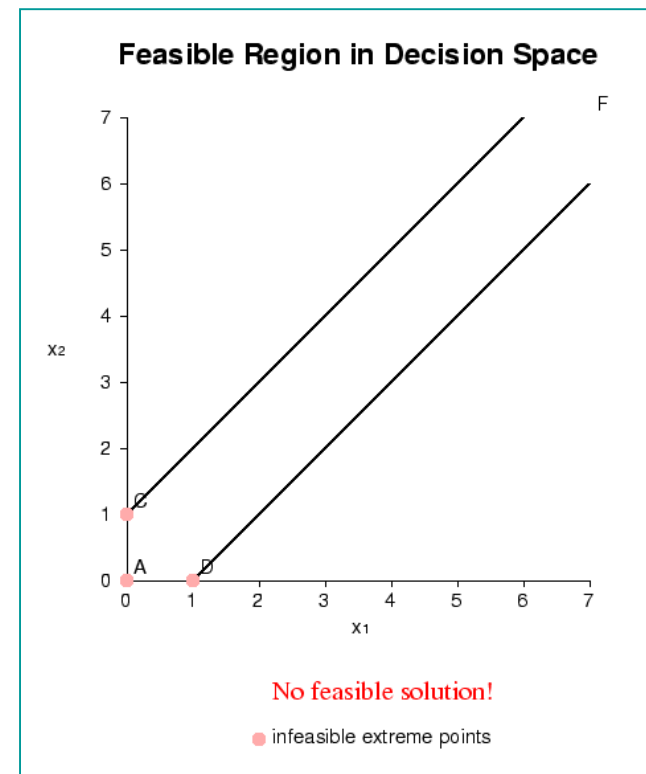
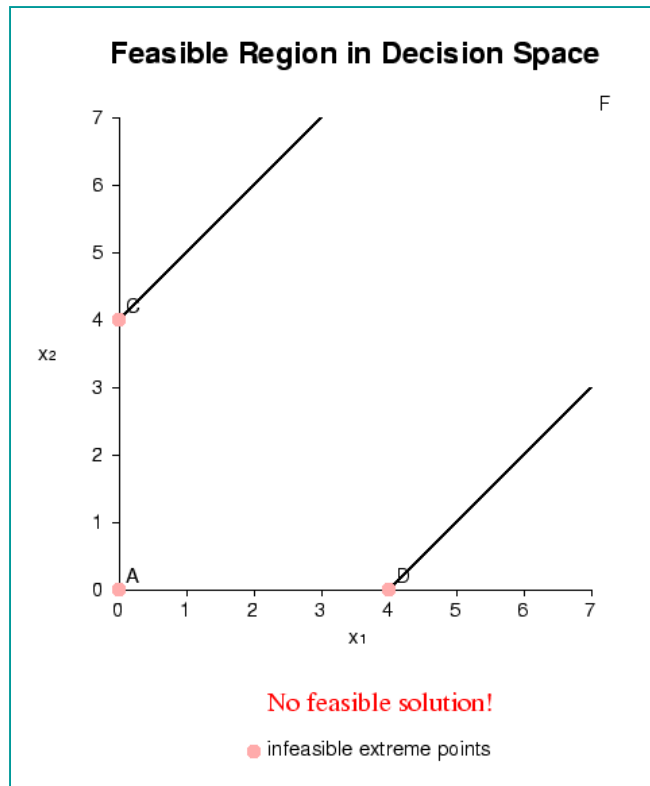
Minimizar $w = 4y_1 + 4y_2$

sujeito a

$$-y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1 - y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \text{ livres}$$





Problema dual: Forma Canónica e Forma Padrão.

Forma canónica

Primal

Maximizar $z = c^t X$

s. a

$$A X \leq b$$

$$X \geq 0$$



Dual

Minimizar $w = y^t b$

s. a

$$A^t Y \geq c$$

$$Y \geq 0$$

reduzir à
forma padrão



Forma padrão

Primal

Maximizar $z = c^t X$

s. a

$$A X + I X_s = b$$

$$X, X_s \geq 0$$



Dual

Minimizar $w = y^t b$

s. a

$$A^t Y \geq c$$

$$I Y \geq 0$$

Y livres

A matriz das restrições pode ser decomposta como:
 $[A, I]$, X_s é o vector das variáveis de folga

Fica redundante, pode ser eliminada, e obtém-se a forma canónica do problema dual

Se uma solução é admissível para o problema dual na forma padrão com variáveis duais livres, é admissível para o problema dual do problema original na forma canónica, i.e., verificam-se as restrições de não negatividade para as variáveis duais.



Formulando o Problema Dual a partir da Forma Padrão. Exemplo Protótipo.

Forma canónica

Primal

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad x_1 \leq 4 \\ & \quad \quad 2x_2 \leq 12 \\ & \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

reduzir à
forma padrão



Forma padrão

Primal

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad x_1 + x_3 = 4 \\ & \quad \quad 2x_2 + x_4 = 12 \\ & \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & \quad \quad 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & \quad \quad 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & \quad y_1 \geq 0 \\ & \quad \quad y_2 \geq 0 \\ & \quad \quad \quad y_3 \geq 0 \\ & \quad y_1, y_2, y_3 - \text{livres} \end{aligned}$$

Ficam redundantes, podem ser eliminadas, e obtém-se a forma canónica do problema dual



Variáveis de Decisão Duais e Quadro Primal Óptimo.

Relação I: Os valores das variáveis de decisão da solução óptima dual encontram-se no quadro simplex óptimo na linha z_j nas colunas correspondentes à base inicial de identidade $B^0 = I$.

Primal

Maximizar $z = c^t X$
 s. a
 $A X \leq b$
 $X \geq 0$

→

Maximizar $z = c^t X$
 s. a
 $A X + I X_s = b$
 $X, X_s \geq 0$

Dual

Minimizar $w = y^t b$
 s. a
 $A^t Y \geq c$
 $I Y \geq 0$
 Y livres

→

Minimizar $w = y^t b$
 s. a
 $A^t Y \geq c$
 $Y \geq 0$

A matriz das restrições para o problema na forma padrão pode ser decomposta como: $[N^0 \ B^0] = [A \ I]$, $B^0 = I$.

Quadro simplex óptimo

m variáveis de decisão duais que correspondem às *m* restrições primais

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = C_B B^{-1}$$

		X_{N^0}	X_{B^0}	\bar{b}
C_B	X_B	$B^{-1}N^0$	$B^{-1}I$	$B^{-1}b$
	z_j	$C_B B^{-1}N^0$	$C_B B^{-1}$	$C_B B^{-1}b$
	$c_j - z_j$	$C_{N^0} - C_B B^{-1}N^0$	$C_J - C_B B^{-1}$	valor da f.o. $z^* = w^*$
			variáveis de decisão duais	



Variáveis de Folga Duais e Quadro Primal Óptimo.

Relação 2: Os valores das variáveis de folga correspondentes à solução óptima dual encontram-se no quadro simplex óptimo e são os simétricos dos elementos da linha dos custos reduzidos nas colunas correspondentes às variáveis de decisão primais.

Às n variáveis de folga duais correspondem às n variáveis de decisão primais: $Y_s = (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n})$

$$A^t Y \geq c \Rightarrow A^t Y - I Y_s = c$$

substituindo por $Y = C_B B^{-1}$

$$\Rightarrow A^t C_B B^{-1} - I Y_s = c$$

$$\Rightarrow -Y_s = c - A^t C_B B^{-1} = c - C_B B^{-1} A$$

$$\Rightarrow -Y_s = C_{N^0} - C_B B^{-1} N^0$$

Quadro simplex óptimo

		X_{N^0}	X_{B^0}	\bar{b}
C_B	X_B	$B^{-1} N^0$	$B^{-1} I$	$B^{-1} b$
	z_j	$C_B B^{-1} N^0$	$C_B B^{-1}$	$C_B B^{-1} b$
	$c_j - z_j$	$C_{N^0} - C_B B^{-1} N^0$	$C_J - C_B B^{-1}$	
	variáveis de folgas duais		variáveis de decisão duais	

(por hipótese as colunas de N^0 correspondem às colunas da matriz A)



Quadro Óptimo do Exemplo Protótipo. Solução dual.

a solução óptima para o problema dual é:
 $y_1 = 0$,
 $y_2 = 3/2$,
 $y_3 = 1$

	C_j	3 5 0 0 0					
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	Z_j	3	5	0	$-\frac{3}{2}$	1	36
	$C_j - Z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

as variáveis de folga do dual são simétricas aos custos reduzidos correspondentes às colunas das variáveis de decisão primais
 $y_4 = 0$, $y_5 = 0$



Solução Complementar.

Relação 3: A cada solução básica primal (SBP), admissível ou não admissível, corresponde-lhe uma solução básica dual (SBD), admissível ou não admissível, a que chamamos solução complementar.

Exemplo protótipo: 2º Quadro Simplex (a solução não é óptima)

$X = (0, 6, 4, 0, 6)$ SBAP \Leftrightarrow solução complementar $Y = (0, 5/2, 0, -3, 0)$ - SBNAD

	C_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
0	x_3	1	0	1	0	0	4
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	x_5	3	0	0	-1	1	6
	Z_j	0	5	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	$C_j - Z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	

Variáveis de decisão
duals:
 $y_1 = 0$,
 $y_2 = 5/2$,
 $y_3 = 0$

O facto de não ser um quadro óptimo para o primal, significa que a solução do dual não é admissível.


as variáveis de folga duals
 $y_4 = -3$, $y_5 = 0$





Solução Dual Complementar. Critério de Admissibilidade.


Relação 4: Se num quadro simplex correspondente a uma solução básica primal (SBP), admissível ou não admissível, todos os custos reduzidos são não positivos então a solução dual complementar é admissível (SBAD).

Se todos os custos reduzidos são *não positivos*, i.e., $c_j - z_j \leq 0$ verifica-se o *critério de optimalidade* para a *solução primal*


$$c_j - C_B B^{-1} P_j \leq 0 \quad \forall j, j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m$$


$$Y^t = C_B B^{-1}$$

$$c_j - Y^t P_j \leq 0 \quad \forall j, j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m$$


$$Y^t P_j \geq c_j \quad \forall j, j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m$$


$$Y^t A \geq c$$

(neste caso por hipótese A refere-se à matriz de restrições correspondente ao problema na forma padrão, já que são incluídas todas as colunas do quadro simplex)


$$A^t Y \geq c$$



Y é uma SBAD. (solução básica admissível para o dual)



Relação entre as Soluções dos Problemas Primal–Dual.

Relação 5: Se ambos os problemas têm soluções admissíveis (ambos são possíveis) então ambos têm óptimo finito e os correspondentes valores óptimos z^* e w^* coincidem

Relação 6: Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções admissíveis (é impossível).

	PRIMAL	Possível $K \neq \emptyset$	Impossível $K = \emptyset$
DUAL			
Possível $K \neq \emptyset$		$z^* = w^*$ ambos os problemas têm óptimo finito	$w^* \rightarrow \infty$ o problema dual não tem óptimo finito
Impossível $K = \emptyset$		$z^* \rightarrow \infty$ o problema primal não tem óptimo finito	Nenhum dos dois problemas têm soluções admissíveis



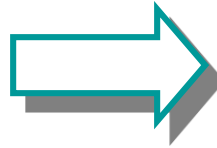
Resolução do Problema Dual.

Exemplo protótipo.

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
 sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

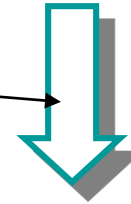


Redução à forma padrão: subtraíam-se duas variáveis de folga y_4, y_5

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
 sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 - y_4 &= 3 \\ 2y_2 + 2y_3 - y_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$



Como não é possível determinar uma matriz identidade introduz-se uma variável artificial y_6 na restrição nº 2 (para a equação nº1 a variável y_1 pode ser tomada como variável básica inicial).

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
 sujeito a

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 - y_4 &= 3 \\ 2y_2 + 2y_3 - y_5 + y_6 &= 5 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

y_6 - variável artificial

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^0 = \begin{pmatrix} P_1 & P_6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Exemplo protótipo. Resolução do Problema Dual. Método das duas fases: 1ª Fase.

Para aplicação da 1ª fase constrói-se o problema auxiliar:

Minimizar $w' = y_6$
 sujeito a
 $y_1 + 3y_3 - y_4 = 3$
 $2y_2 + 2y_3 - y_5 + y_6 = 5$
 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$
 y_6 - variável artificial

	C_j	0	0	0	0	0	1	
C_B	Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	\bar{b}
0	y_1	1	0	3	-1	0	0	3
1	y_6	0	2	2	0	-1	1	5
	Z_j	0	2	2	0	-1	1	5
	$Z_j - C_j$	0	2	2	0	-1	0	
0	y_1	1	0	3	-1	0	0	3
0	y_2	0	1	1	0	-1/2	1/2	5/2
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0	-1	

A SBA inicial para a 2ª fase é
 $Y^0 = (3, 5/2, 0, 0, 0)$



Exemplo protótipo. Resolução do Problema Dual. Método das duas fases: 2ª Fase.

Minimizar $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
 sujeito a

$$y_1 + 3y_3 - y_4 = 3$$

$$2y_2 + 2y_3 - y_5 + y_6 = 5$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

y_6 - variável artificial

	C_j	4	12	18	0	0	0	
C_B	Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	\bar{b}
4	y_1	1	0	3	-1	0	0	3
12	y_2	0	1	1	0	-1/2	1/2	5/2
	Z_j	4	12	24	-4	-6	6	42
	$Z_j - C_j$	0	0	6	-4	-6	6	
18	y_3	1/3	0	1	-1/3	0	0	1
12	y_2	-1/3	1	0	1/3	-1/2	1/2	3/2
	Z_j	2	12	18	-2	-6	6	36
	$Z_j - C_j$	-2	0	0	-2	-6		

A solução óptima
 é $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$



Par de Problemas Primal-Dual. Quadros Óptimos.

Primal: $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

$z^* = w^* = 36$

Dual: $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

C_j	3	5	0	0	0			C_j	4	12	18	0	0	0		
C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}		C_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	\bar{b}	
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	18	y_3	1/3	0	1	-1/3	0	0	1
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	12	y_2	-1/3	1	0	1/3	1/2	1/2	3/2
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2		z_j	2	12	18	-2	-6	6	36
	z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36		$z_j - C_j$	-2	0	0	-2	-6		
	$C_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1										

a solução óptima para o dual é:
 $y_1 = 0, y_2 = 3/2, y_3 = 1$

as variáveis de folga do dual
 $y_4 = 0, y_5 = 0$

as variáveis de folga do primal são simétricas aos custos reduzidos das colunas correspondentes às variáveis de decisão duais:
 $x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0$

a solução óptima para o primal, $x_1 = 2, x_2 = 6$, encontram-se na linha z_j nas colunas correspondentes à matriz inicial identidade, i.e., nas colunas correspondentes a y_1 e à variável artificial y_6



Exemplo Protótipo: Soluções complementares

Primal: $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$ $z^* = w^* = 36$ **Dual:** $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

Soluções complementares

SBAP $X^0 = (0, 0, 4, 12, 18)$, $z^0 = 0$ **SBNAD** $Y^0 = (0, 0, 0, -3, -5)$, $w^0 = 0$

SBAP $X^1 = (0, 6, 4, 0, 6)$, $z^1 = 30$ **SBNAD** $Y^1 = (0, 5/2, 0, -3, 0)$, $w^1 = 30$

SBAP $X^2 = (2, 6, 2, 0, 0)$, $z^2 = 36$ **SBAD** $Y^2 = (0, 3/2, 1, 0, 0)$, $w^2 = 36$



Restrições do Problema Primal em Notação Vectorial.

Considere a matriz A do problema primal representada por m linhas P^i :

$$AX = \begin{pmatrix} P^1 \rightarrow a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ P^2 \rightarrow a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ P^i \rightarrow a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot \\ P^m \rightarrow a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_j \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_i \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

então uma restrição i do problema primal pode ser representada como:

$$P^i X \leq b_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$



Restrições do Problema Dual em Notação Vectorial.

Considere a matriz A do problema primal representada por n colunas P_j :

$$A^t Y = Y^t A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_j & \dots & P_n \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_j \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}^t$$

então uma *restrição* j do *problema dual* pode ser representada como:

$$Y^t P_j \geq c_j$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$



Restrições Saturadas e Não Saturadas.



Uma restrição encontra-se **saturada** se verifica a igualdade.

- ▶ se $P^i X = b_i$ para o problema primal.
- ▶ se $Y^t P_j = c_j$ para o problema dual



Caso contrário a restrição encontra-se **não saturada**

- ▶ se $P^i X < b_i$ para o problema primal.
- ▶ se $Y^t P_j > c_j$ para o problema dual



Teorema 13.4: Propriedade dos Desvios Complementares.

Se X^* e Y^* são soluções óptimas para o primal (P) e dual(D), respectivamente, então verificam a seguinte propriedade designada como *propriedade dos desvios complementares* ou complementaridade das *slacks*:

- 1°. Se uma variável de decisão de qualquer dos problemas for não nula na solução óptima, então, no outro problema a restrição associada a essa variável encontra-se saturada, i.e., a variável de folga correspondente é nula.
- 2°. Se uma restrição de qualquer dos problemas não se encontra saturada na solução óptima desse problema (se uma variável de folga é positiva) então, no outro problema, a variável de decisão associada a essa restrição é nula.

**Propriedade dos Desvios...**

Em síntese a propriedade dos desvios complementares pode resumir-se pelas seguintes expressões:

I. $x_j^* (Y_j^{*t} P_j - c_j) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$

$x_j^* \times y_{m+j}^* = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$

é nulo o produto da j -ésima variável de decisão do primal pela j -ésima variável de folga do dual

II. $y_i^* (b_i - P_i X^*) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m$

$y_j^* \times x_{n+i}^* = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m$

é nulo o produto da i -ésima variável de decisão do dual pela i -ésima variável de folga do primal.



- I. Se a variável de decisão do primal é positiva então a variável de folga correspondente do dual é nula.

$$x_j^* > 0$$



$$y_{m+j}^* = 0$$

pela propriedade de desvios

complementares

$$x_j^* (Y^{*t} P_j - c_j) = 0, \forall j = 1, \dots, n$$

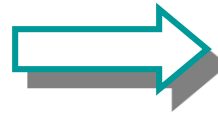
$$x_j^* > 0$$



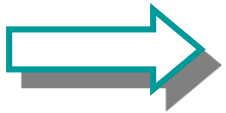
$$Y^{*t} P_j - c_j = 0$$



$$Y^{*t} P_j = c_j$$



$$a_{1j} y_1^* + a_{2j} y_2^* + \dots + a_{mj} y_m^* = c_j$$



a restrição do problema dual associada a essa variável *encontra-se saturada*



a *variável de folga* do problema *dual* associada a essa restrição é *nula*



$$y_{m+j}^* = 0$$



II. Se a variável de folga do dual é positiva então a variável de decisão correspondente do primal é nula.

$$y_{m+j}^* > 0 \Rightarrow x_j^* = 0$$

$y_{m+j}^* > 0$ \Rightarrow a restrição do problema dual associada encontra-se não saturada

$$\Rightarrow a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \dots + a_{mj}y_m^* > c_j$$

$$\Rightarrow Y^{*t} P_j > c_j$$

$$\Rightarrow Y^{*t} P_j - c_j > 0$$

pela propriedade de desvios complementares

$$x_j^* (Y^{*t} P_j - c_j) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow x_j^* = 0$$



Propriedade dos desvios...

III. Se a variável de decisão do dual é positiva então a variável de folga correspondente do primal é nula.

$$y_i^* > 0 \Rightarrow x_{m+i}^* = 0$$

IV. Se a variável de folga do primal é positiva então a variável de decisão correspondente do dual é nula.

$$x_{m+i}^* > 0 \Rightarrow y_i^* = 0$$



Propriedade dos Desvios Complementares. Conclusões.

A variáveis de decisão primais positivas correspondem restrições duais saturadas (i.e., variáveis de folga duais nulas, slacks nulas);

A restrições duais não saturadas (i.e, variáveis de folga duais positivas, slacks positivas) correspondem variáveis de decisão primais nulas;

e reciprocamente:

A variáveis de decisão duais positivas correspondem restrições primais saturadas (i.e, variáveis de folga primais nulas, slacks nulas);

A restrições primais não saturadas (i.e, variáveis de folga primais positivas, slack positivo) correspondem variáveis de decisão duais nulas.



Propriedade dos Desvios Complementares. Exemplo Protótipo.

Primal: $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

Dual: $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

variáveis de decisão

variáveis de folga

os produtos das variáveis de decisão do primal pelas correspondentes variáveis de folga do dual são nulos

$x_1 = 2$ ↔ $y_4 = 0$

$x_2 = 6$ ↔ $y_5 = 0$

variáveis de folga

variáveis de decisão

os produtos das variáveis de decisão do dual pelas correspondentes variáveis de folga do primal são nulos

$x_3 = 2$ ↔ $y_1 = 0$

$x_4 = 0$ ↔ $y_2 = 3/2$

$x_5 = 0$ ↔ $y_3 = 1$



Aplicando Dualidade e as Propriedades de Desvios Complementares para resolver o Problema Primal.

Como o problema dual é um problema com duas variáveis pode ser resolvido graficamente.

Primal de Minimização

Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Dual de Maximização

Maximizar $w = 4y_1 + 3y_2$

sujeito a

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$y_1 - 2y_2 \leq 3$$

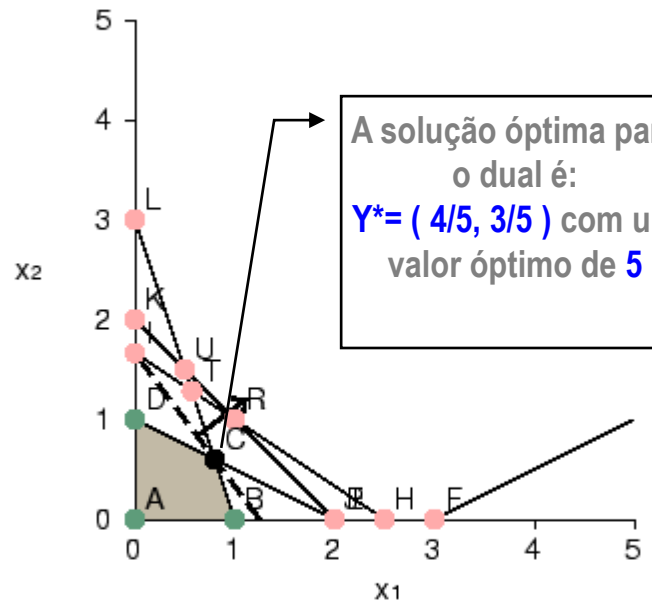
$$2y_1 + 3y_2 \leq 5$$

$$y_1 + y_2 \leq 2$$

$$3y_1 + y_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Feasible Region in Decision Space



A solução óptima para o dual é:
 $Y^* = (4/5, 3/5)$ com um valor óptimo de 5

- optimal solution
- feasible extreme points
- infeasible extreme points



Utilizando o dual e as propriedades....

variáveis de decisão variáveis de folga variáveis de decisão variáveis de folga

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

$$Y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$$

$Y^* = (4/5, 3/5)$ é a solução óptima do problema dual obtida graficamente

1º: Pela propriedade dos desvios complementares se a variável de decisão do dual é positiva então a variável de folga correspondente do primal é nula.

$$y_1 = 4/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop. desvios}} x_6 = 0$$

$$y_2 = 3/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop. desvios}} x_7 = 0$$

2º: Calcular as variáveis de folga duais, substituindo os valores de $y_1 = 4/5$, $y_2 = 3/5$ nas restrições duais.

$$y_3 = 2 - y_1 - 2y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_3 = 2 - 4/5 - 6/5 \Rightarrow y_3 = 0 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop. desvios}} x_1 > 0$$

$$y_4 = 3 - y_1 + 2y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_4 = 3 - 4/5 + 6/5 \Rightarrow y_4 = 13/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop. desvios}} x_2 = 0$$

$$y_5 = 5 - 2y_1 - 3y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_5 = 5 - 8/5 - 9/5 \Rightarrow y_5 = 8/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop. desvios}} x_3 = 0$$

$$y_6 = 2 - y_1 - y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_6 = 2 - 4/5 - 3/5 \Rightarrow y_6 = 3/5 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop. desvios}} x_4 = 0$$

$$y_7 = 3 - 3y_1 - y_2 \xrightarrow[\text{por } y_1 \text{ e } y_2]{\text{substituindo}} y_7 = 3 - 12/5 - 3/5 \Rightarrow y_7 = 0 \xrightarrow[\text{complementares}]{\text{prop. desvios}} x_5 > 0$$



Utilizando o dual e as propriedades....

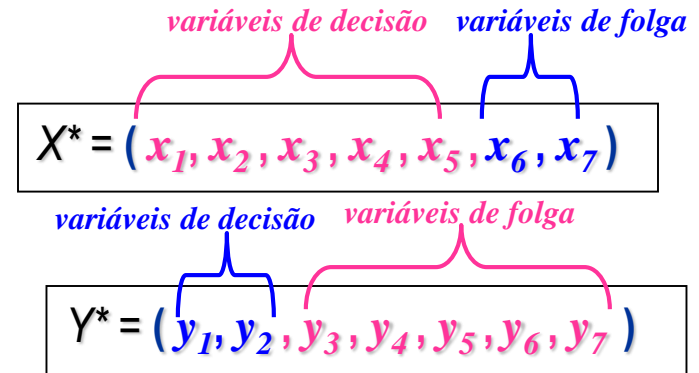
Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



3º: Calcular $x_1 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ substituindo $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ nas restrições primais

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 4$$

substituindo por
 \Rightarrow
 $x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$

$$x_1 + 3x_5 = 4$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_7 = 3$$

substituindo por
 \Rightarrow
 $x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$

$$2x_1 + x_5 = 3$$

\Rightarrow

$$x_1 = 1$$

$$x_5 = 1$$

A solução primal óptima é $X^* = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$

Os produtos das variáveis de decisão primais (duais) com as correspondentes variáveis de folga duais (primais) são nulos

A solução dual óptima é $Y^* = (4/5, 3/5, 0, 13/5, 8/5, 3/5, 0)$