



Optimização

Aula 14



Programação Linear (PL)

Aula 14 Dualidade.

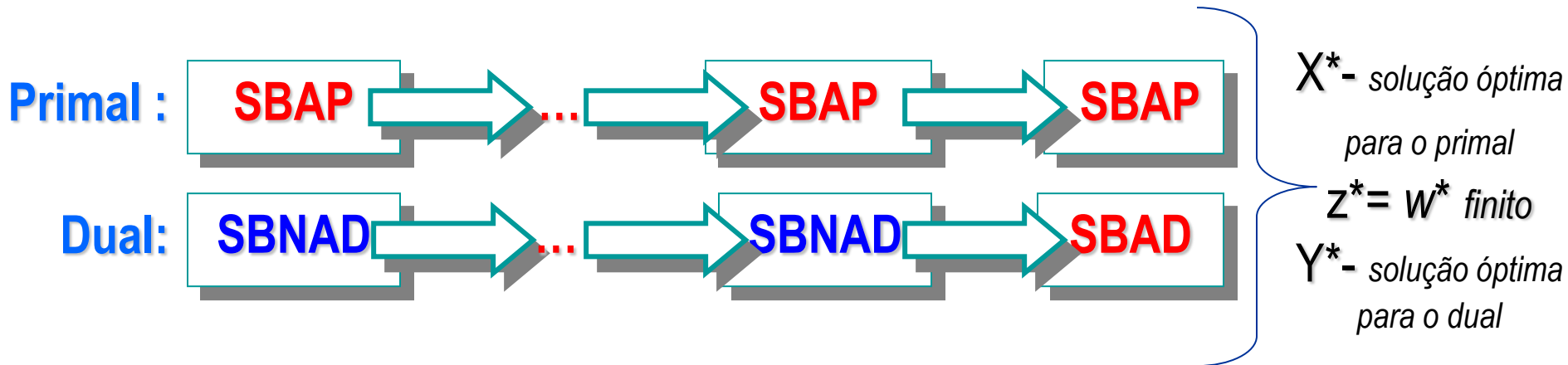
Algoritmo Dual Simplex.



Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Primal

Caso 1: Ótimo finito

No caso de ótimo finito o algoritmo Primal aplicado ao problema primal consiste em partir de uma **SBAP**, a que corresponde uma **SBNAD**, prosseguindo de **SBAP (SBNAD)** em **SBAP (SBNAD)** até obter um par de soluções admissíveis do primal e do dual (**SBAP** e **SBAD**) que são as soluções ótimas para os respectivos problemas





Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Primal.

Caso 1: Óptimo finito. Exemplo Protótipo: Problema Primal

Soluções complementares

SBAP $X^0 = (0, 0, 4, 12, 18)$, $z^0=0$

SBNAD $Y^0 = (0, 0, 0, -3, -5)$, $w^0=0$

SBAP $X^1 = (0, 6, 4, 0, 6)$, $z^1=30$

SBNAD $Y^1 = (0, 5/2, 0, -3, 0)$, $w^1=30$

SBAP $X^2 = (2, 6, 2, 0, 0)$, $z^2=36$

SBAD $Y^2 = (0, 3/2, 1, 0, 0)$, $w^2=36$

Soluções óptimas:

Primal: $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

$z^* = w^* = 36$

Dual: $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

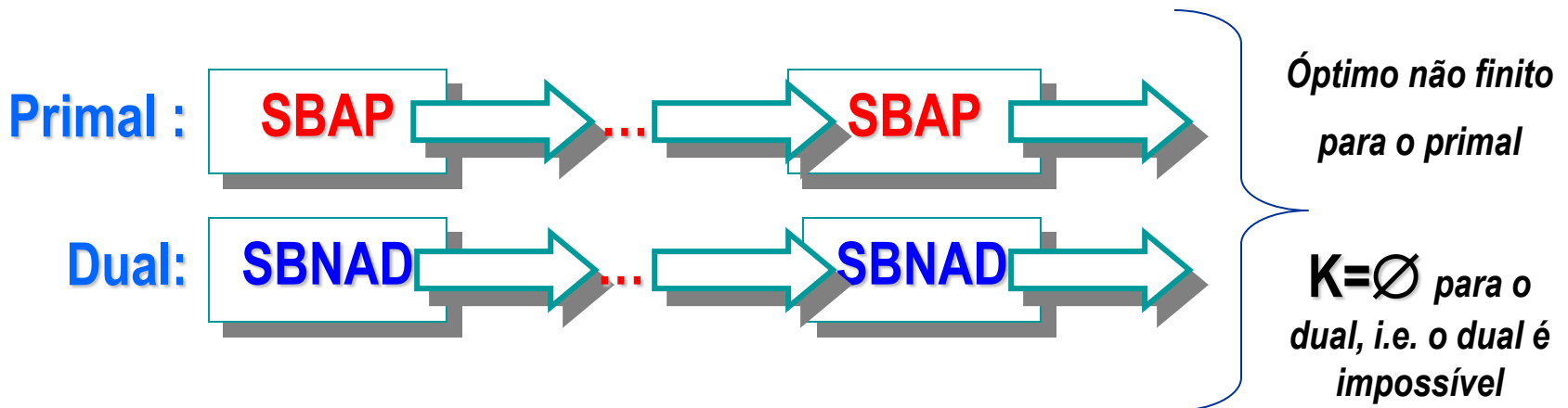


Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema

Primal

Caso 2: Ótimo não finito.

No caso de **ótimo não finito** o algoritmo Primal aplicado ao **problema primal** consiste em partir de uma **SBAP**, a que corresponde uma **SBNAD**, prosseguindo de **SBAP (SBNAD)** em **SBAP (SBNAD)** sem nunca obter uma **SBAD**, e concluir que o **primal não tem ótimo finito**, sendo então o **dual impossível**.

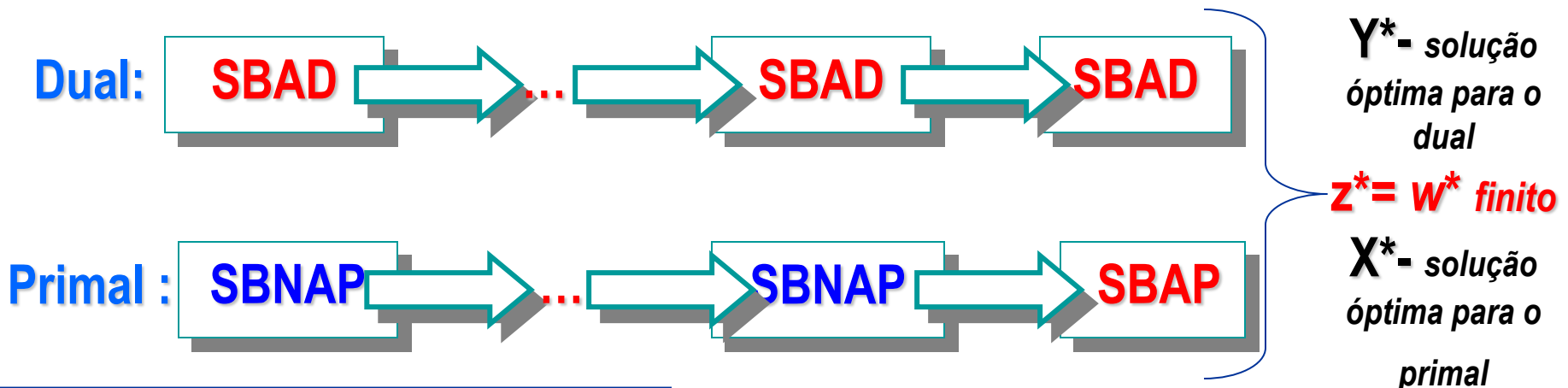




Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Dual.

Caso 1: Ótimo finito.

No caso de **ótimo finito** o algoritmo **Primal** aplicado ao problema dual consiste em partir de uma **SBAD**, à que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** até obter um par de soluções admissíveis do primal e do dual (**SBAP** e **SBAD**) que são soluções ótimas para os respectivos problemas



O dual do problema dual é o problema primal



Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Dual.

Caso 1: Óptimo finito. Exemplo Protótipo: Problema Dual.

Soluções complementares

SBAD $Y^0 = (3, 5/2, 0, 0, 0)$, $w^0=42$ \longleftrightarrow SBNAP $X^0 = (4, 6, 0, 0, -6)$, $z^0=42$

SBAD $Y^1 = (0, 3/2, 1, 0, 0)$, $w^1=36$ \longleftrightarrow SBAP $X^1 = (2, 6, 2, 0, 0)$, $z^1=36$

Soluções óptimas

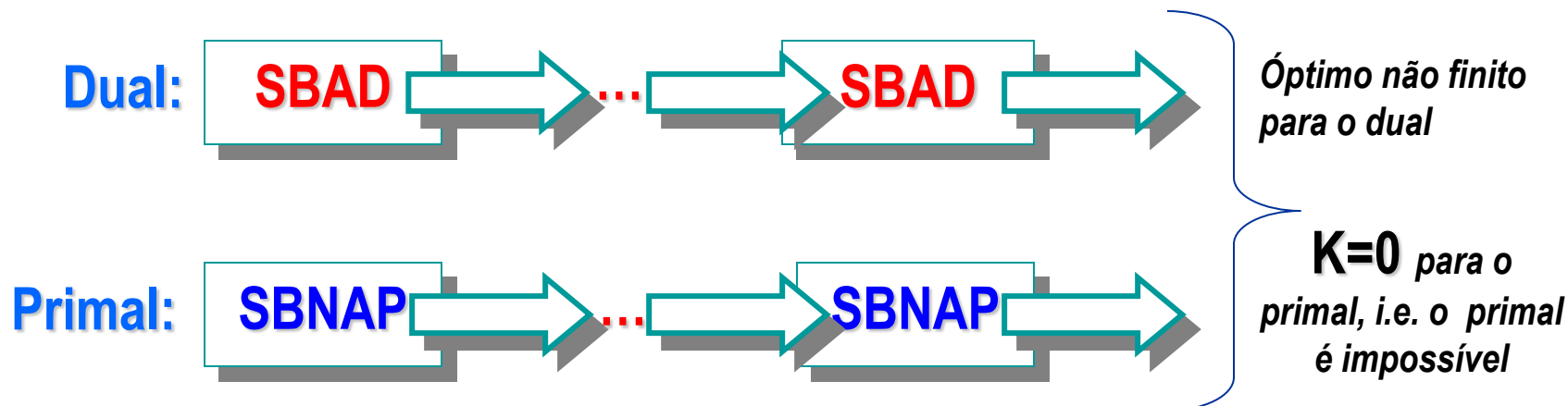
Dual: $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$ \longleftrightarrow $w^* = z^* = 36$ \longleftrightarrow Primal: $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$



Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal aplicado ao Problema Dual.

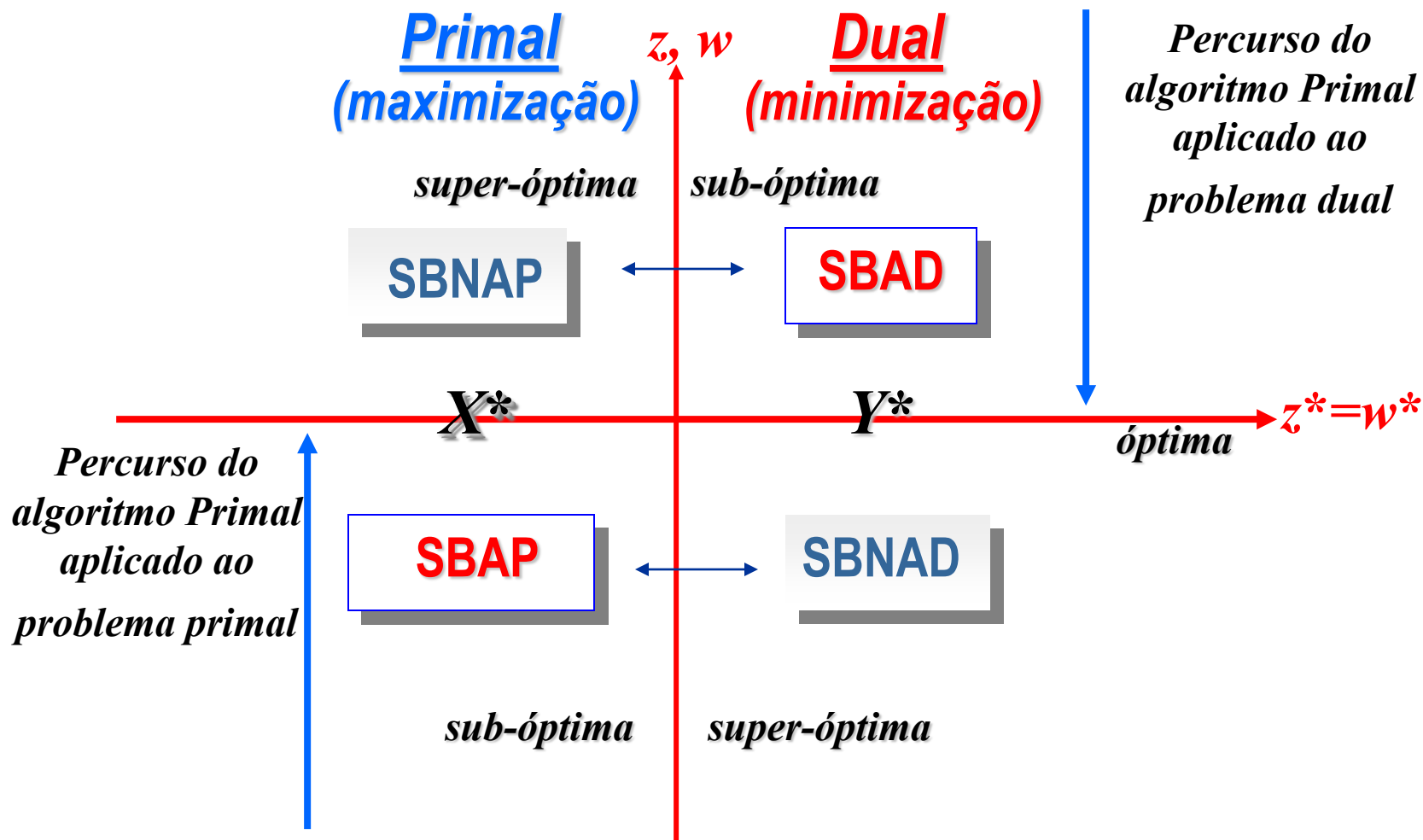
Caso 2: Ótimo não finito.

No caso de **ótimo não finito** o algoritmo Primal aplicado ao problema dual consiste em partir de uma **SBAD**, a que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** sem nunca obter uma **SBAP**, e concluir que **o dual não tem ótimo finito**, sendo então **o primal impossível**.





Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Primal. Representação gráfica





Algoritmo Dual Simplex.

O algoritmo dual Simplex tem um comportamento homólogo ao algoritmo primal do simplex aplicado ao problema dual



Em que consiste o algoritmo dual *Simplex*?



O algoritmo dual Simplex consiste em partir *duma* solução básica admissível dual (SBAD), a que corresponde uma solução básica não admissível primal (SBNAP), prosseguindo até:

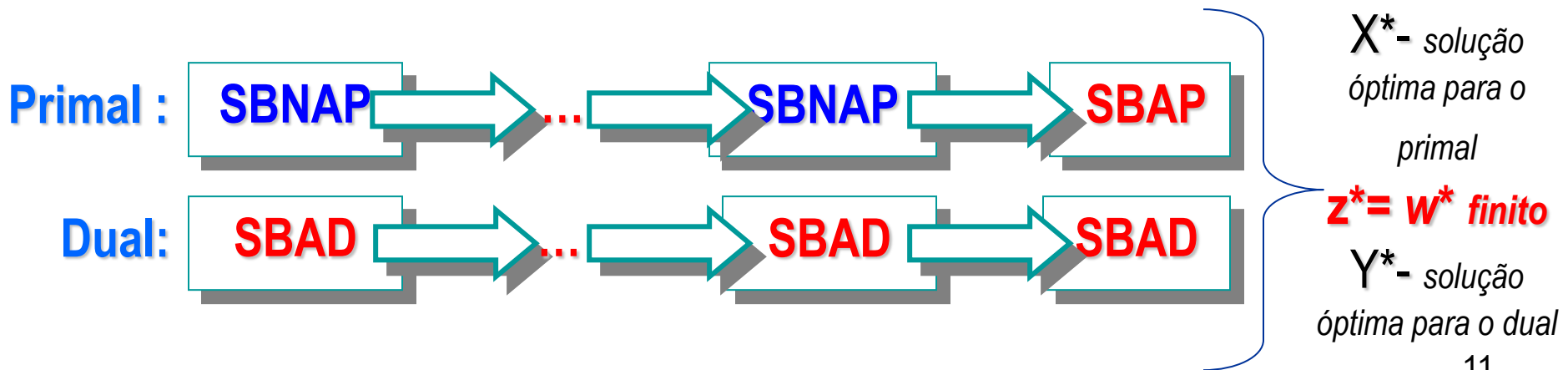
- 1º:** se atingir uma solução básica admissível primal (SBAP) e concluir que o *problema tem* *ótimo finito*.
- 2º:** nunca se atingir uma solução básica admissível primal, e concluir que o problema dual não tem *ótimo finito*, sendo então o *primal impossível*.



Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Dual aplicado ao Problema Primal.

Caso 1: Ótimo finito.

No caso de **ótimo finito** o algoritmo **Dual** aplicado ao problema **primal** consiste em partir de uma **SBAD**, à que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** até obter um **par de soluções admissíveis do primal e do dual (SBAP e SBAD)** que são **soluções ótimas para os respectivos problemas.**

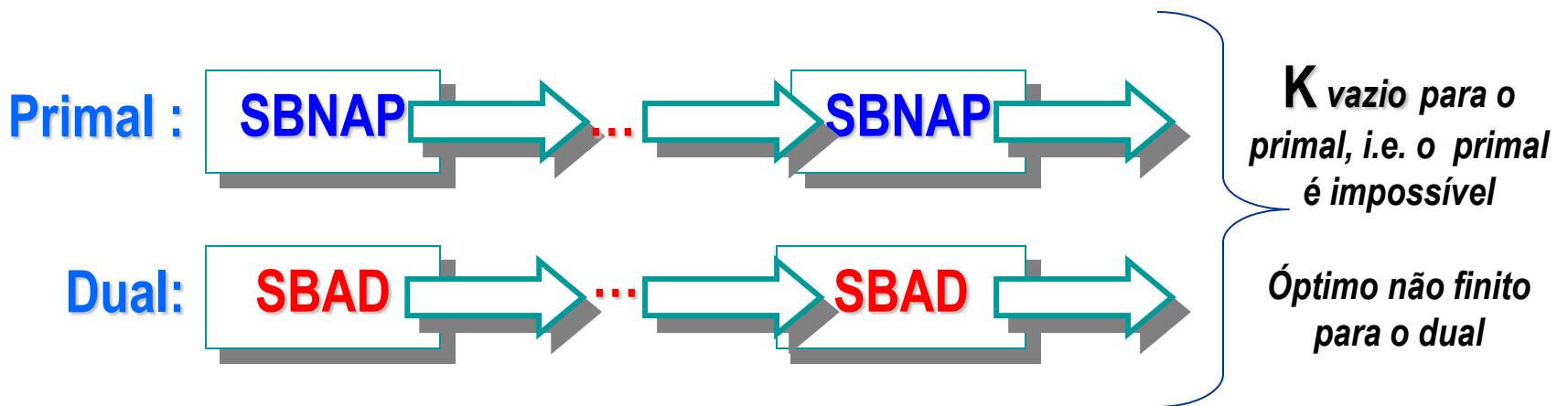




Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Dual aplicado ao Problema Primal.

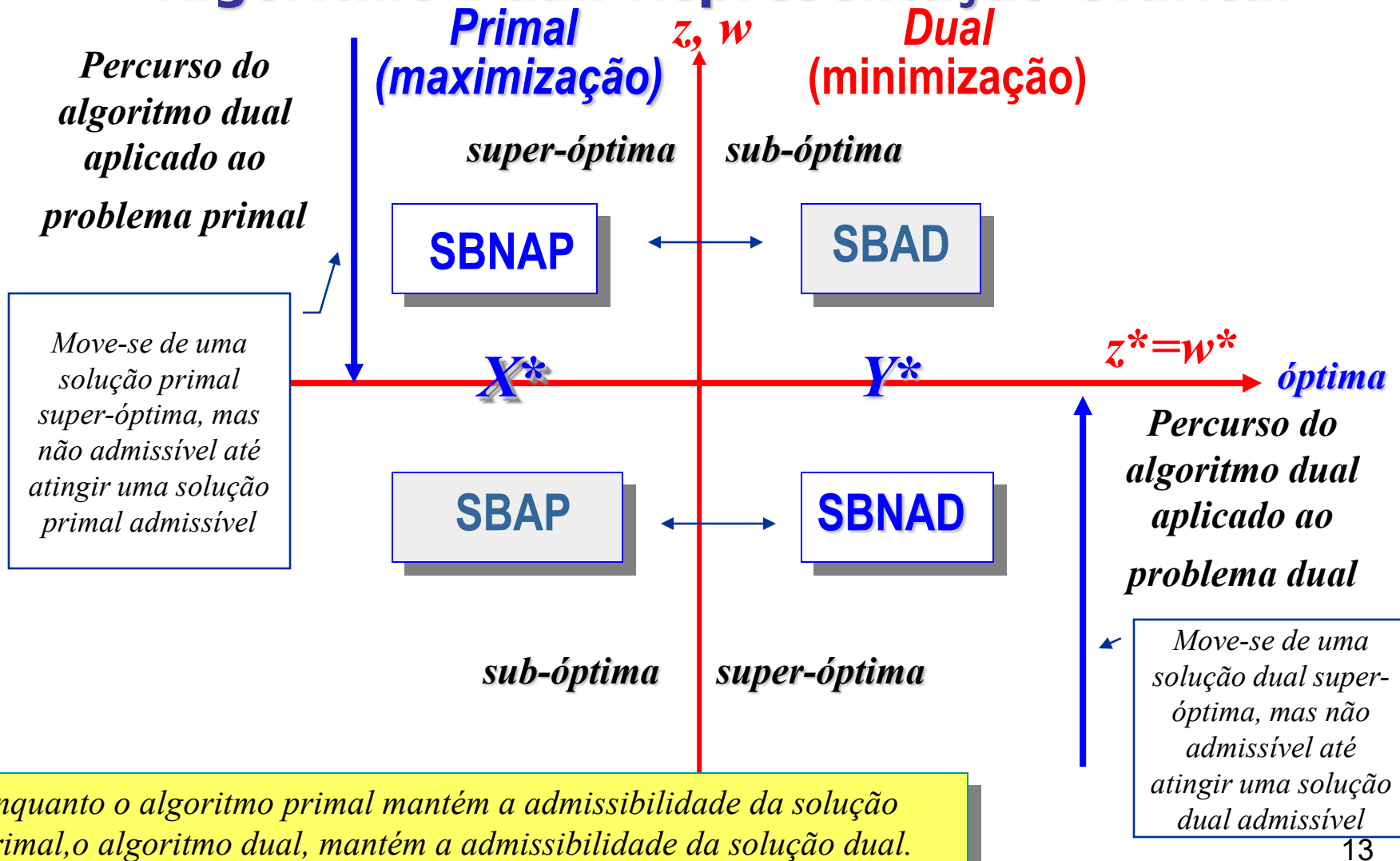
Caso 2: Problema impossível.

No caso de problema impossível o algoritmo Dual aplicado ao problema primal consiste em partir de uma **SBAD**, a que corresponde uma **SBNAP**, prosseguindo de **SBAD (SBNAP)** em **SBAD (SBNAP)** sem nunca atingir uma **SBAP**, e concluir que o dual não tem óptimo finito, sendo então o primal impossível.





Percurso do par de soluções primais-duais. Algoritmo Dual. Representação Gráfica.





Algoritmo Dual Simplex. Fluxograma Geral.

Construir o quadro simplex correspondente a uma SBAD complementar (todos os custos reduzidos não positivos)

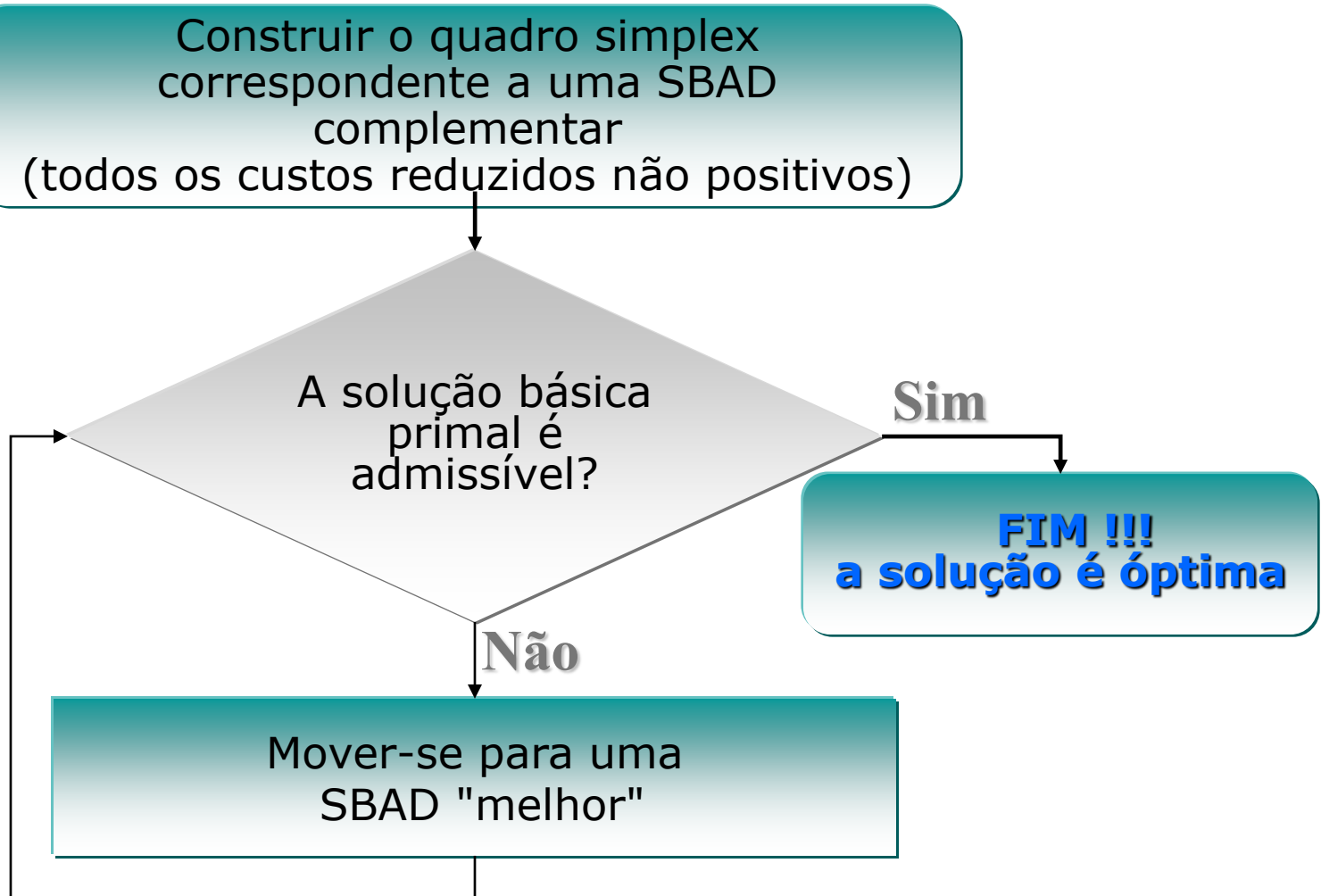
A solução básica primal é admissível?

Sim

**FIM !!!
a solução é óptima**

Não

Mover-se para uma SBAD "melhor"





INÍCIO
Forma Padrão

Optimização

Algoritmo Dual.

**F
I
N
I
S
M
A**

critério de admissibilidade para o dual:
 $\forall j: c_j - z_j \leq 0$

Construir quadro correspondente a uma **SBAD complementar**

critério de admissibilidade para o primal:
 $x_i \geq 0, \forall x_i \in X_B$

A solução básica primal é admissível?

FIM
a solução é ótima !!!

critério de saída
 $\min \{ x_i : x_i < 0, x_i \in X_B \} = x_s$
determinar a linha pivotal s

Determinar a variável básica negativa que sai da **SBNAP**

critério de ótimo não finito para o dual
 $\forall j: x_{sj} \geq 0$

Ótimo não finito para o dual?

FIM
o primal é impossível !!!

critério de entrada
 $\min \left\{ \frac{c_j - z_j}{x_{sj}} : x_{sj} < 0 \right\}$
determinar a coluna pivotal

Determinar a variável não básica que entra para a **SBNAP**

Calcular nova SBP. Atualizar quadro correspondente à nova **SBAD complementar**.



Exemplo. Redução á forma padrão.

$$\text{minimizar } 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4$$

sujeito a:

$$2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 \geq 20$$

$$7x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 \leq 35$$

$$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



$$\text{minimizar } 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4$$

sujeito a:

$$2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 20$$

$$7x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_6 = 35$$

$$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_7 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Multiplicando por (-1) as equações 1 e 3, obtém-se uma matriz inicial identidade

$$\text{minimizar } 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4$$

sujeito a:

$$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = -20$$

$$7x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_6 = 35$$

$$-4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 = -15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$



Algoritmo Dual. Exemplo: determinando uma SBP inicial.

Passo 1: Determinar uma SBP inicial que corresponde a uma SBAD. Construir o quadro *simplex* correspondente.

Com a redução à forma padrão, é possível identificar uma SBP que corresponda a uma SBAD complementar.

(verifica : $\forall j : c_j - z_j \leq 0, j=1, \dots, n$)

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_5 & P_6 & P_7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_B \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ -20 \\ 35 \\ -15 \end{pmatrix}$$

A SBP inicial $X^0 = (0, 0, 0, 0, -20, 35, -15)$ é não admissível.



Algoritmo Dual. Exemplo: 1º quadro Simplex correspondente à SBP Inicial.

1º quadro, Passo 1: Construção do 1º quadro correspondente à SBP $\mathbf{X}^0 = (0, 0, 0, 0, -20, 35, -15)$.

	C_j	2	7	6	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
0	x_5	-2	3	5	-4	1	0	0	-20
0	x_6	7	2	6	-2	0	1	0	35
0	x_7	-4	-5	3	2	0	0	1	-15
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	-2	-7	-6	-5	0	0	0	

verifica o critério de optimalidade: os custos reduzidos são não positivos, i.e. a solução dual complementar é admissível.

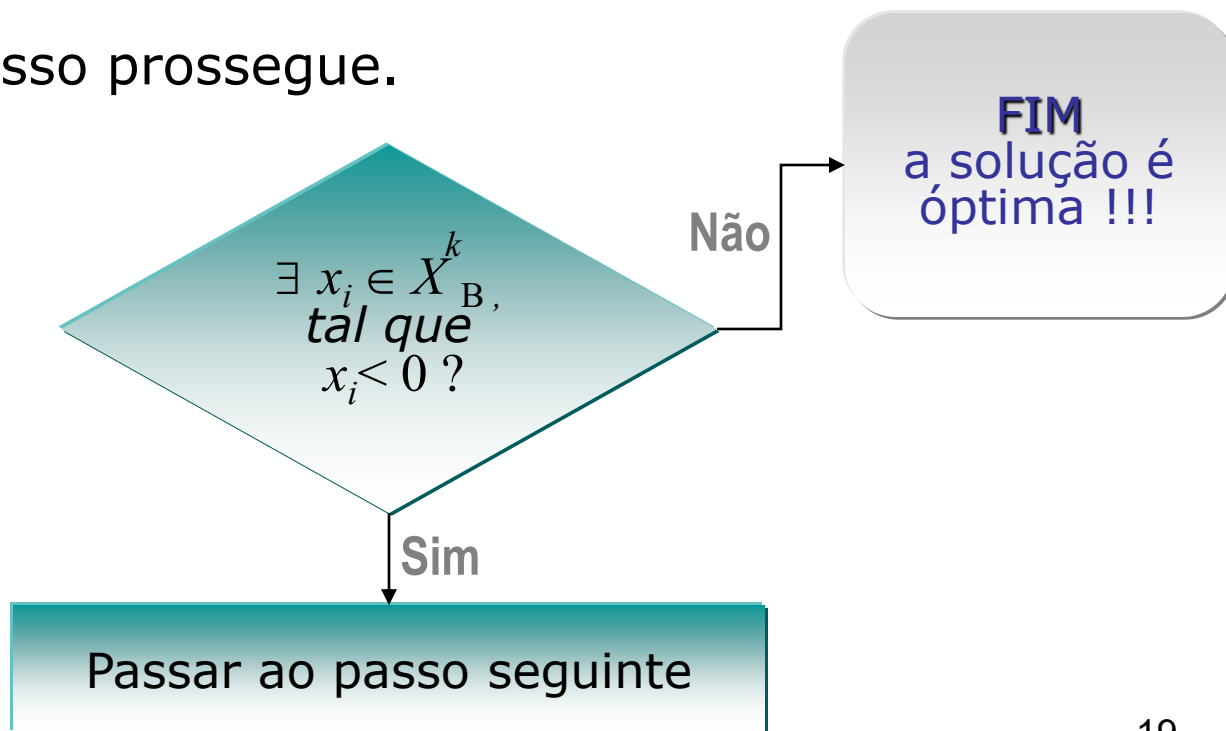
valor da f.o.



Algoritmo Dual.

Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

- Existe algum $x_i \in X_B^k$, tal que $x_i < 0$, $i=1, \dots, m$?
 - Não, o processo termina: a solução básica do primal é admissível, i.e., a solução é óptima para o primal.
 - Sim, o processo prossegue.





Algoritmo Dual. Exemplo: 1º Quadro. Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

Existe alguma *variável básica* negativa?

$$X_B^0 = (\boxed{-20}, 35, \boxed{-15})$$

$\exists x_i \in X_B^0$, tal
que
 $x_i < 0$?

X^0 não é admissível
para o primal
(SBNAP)

Sim

Passar ao passo seguinte



Algoritmo Dual.

Passo 3: Determinando a variável básica negativa que sai.

linha pivotal s

X_B	x_1	...	x_j	...	x_n
x_{i_1}	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
x_{i_2}	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
$x_{i_s} < 0$	x_{s1}	...	x_{sj}	...	x_{sn}
...					
x_{i_M}	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Critério de saída:

$$\min_i \{ x_i \in X_B^k : x_i < 0 \} = x_s$$



Algoritmo Dual. Exemplo. 1º Quadro.

Passo 3: Determinando a variável básica negativa que sai.

$\min \{ x_i \in X_B^k : x_i < 0 \} = -20$

C_j		2	7	6	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
0	x_5	-2	3	5	-4	1	0	0	-20 → <i>mínimo</i>
0	x_6	7	2	6	-2	0	1	0	35
0	x_7	-4	-5	3	2	0	0	1	-15
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	-2	-7	-6	-5	0	0	0	

a variável candidata a sair é: x_5

linha pivotal



Algoritmo Dual.

Passo 4: Teste de óptimo não finito para o dual (primal impossível).

Existe alguma componente negativa na linha pivotal ?

$$\min_i \{ x_i \in X_B^k : x_i < 0 \} = x_{sj}$$

X_B	x_1	...	x_j	...	x_n
x_{i_1}	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
x_{i_2}	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
$x_{i_s} < 0$	x_{s1}	...	x_{sj}	...	x_{sn}
...
x_{i_M}	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Existe algum $x_{sj} < 0$?

Não

Sim

FIM
óptimo não finito para o dual, i.e., o primal não tem soluções admissíveis:
o primal é impossível

Passar ao passo seguinte



Algoritmo Dual. Exemplo. 1º Quadro.

Passo 4: Teste de óptimo não finito para o dual.

Existe alguma componente negativa na linha pivotal ?

		C_j								
		2	7	6	5	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}	
0	x_5	-2	3	5	-4	1	0	0	-20	
0	x_6	7	2	6	-2	0	1	0	35	
0	x_7	-4	-5	3	2	0	0	1	-15	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	-2	-7	-6	-5	0	0	0		

→ *mínimo*

Há 2 componentes negativas na linha pivotal, i.e., é possível passar ao passo seguinte do algoritmo



Algoritmo Dual.

Passo 5: Determinar a variável não básica que entra.

linha pivotal s

X_B	x_1	...	x_j	...	x_n
x_{i_1}	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
x_{i_2}	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
$x_{i_s} < 0$	x_{s1}	...	x_{sj}	...	x_{sn}
...					
x_{i_M}	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

1º. Seleccionar os coeficientes negativos da linha pivotal s : $x_{sj} < 0$

2º. Dividir os quocientes entre os custos reduzidos e cada um destes coeficientes negativos

$$\frac{c_j - z_j}{x_{sj}} : x_{sj} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

A escolha de θ_0 como o mínimo desta expressão garante a admissibilidade da nova solução dual, já que o percurso deste algoritmo dual Simplex é mover-se duma SBAD para outra SBAD “melhor”.

3º. Seleccionar a coluna r onde se alcance o menor dos quocientes (*critério de entrada*):

$$\theta_0 = \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{x_{sj}} \mid x_{sj} < 0 \right\} = \frac{c_r - z_r}{x_{sr}}$$



Algoritmo Dual. Exemplo: 1º Quadro.

Passo 5: Determinar a variável não básica que entra.

coluna pivotal: $j = 1$		C_j	2	7	6	5	0	0	0		
<i>pivot</i>		C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
0	x_5		-2	3	5	-4	1	0	0	-20	→ mínimo
0	x_6		7	2	6	-2	0	1	0	35	
0	x_7		-4	-5	3	2	0	0	1	-15	
	Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$		-2	-7	-6	-5	0	0	0		
$-2/-2 = 1$										$-5/-4 = 5/4$	

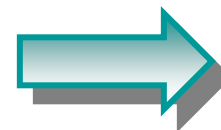


Algoritmo Dual.

Passo 6: 1º. Calcular nova SBP com SBAD complementar.
2º. Construir o novo quadro simplex.

1ª

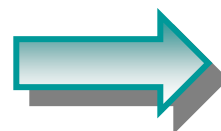
A variável básica negativa que sai



x_s

2ª

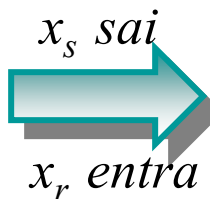
A variável não básica que entra



x_r

SBP:

$$X^0 = (x_1, x_2, x_s, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$



nova SBP:

$$X^1 = (x_1, x_2, x_r, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

Calcular o novo quadro aplicando o método de Gauss-Jordan, tomando o pivot como elemento redutor.

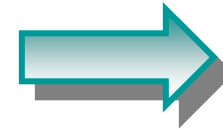


Algoritmo Dual. Exemplo. 1º Quadro.

Passo 6: Calcular nova SBP com SBAD complementar.

1ª

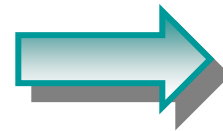
A variável básica negativa que sai



x_5

2ª

A variável não básica que entra



x_1

SBP inicial X^0 :

$$X_B^0 = (x_5, x_6, x_7)$$

$$X^0 = (0, 0, 0, 0, -20, 35, -15)$$

x_1 entra



x_5 sai

SBP X^1 :

$$X_B^1 = (x_1, x_6, x_7)$$

$$X^1 = ?$$



Algoritmo Dual. Exemplo.

Passo 6. Calcular nova SBP X^1 .

Linha 1: linha pivotal
dividir pelo pivot: **-2**

Linha 2: linha anterior -
(coeficiente coluna pivot x nova linha pivot)

7	2	6	-2	0	1	0	35
-7	1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	10
0	25/2	47/2	-16	7/2	1	0	-35

Linha 3: linha anterior -
(coeficiente coluna pivot x nova linha pivot)

-4	-5	3	2	0	0	1	-15
+4x	1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	10
0	-11	-7	10	-2	0	1	25

		c_j	2	7	6	5	0	0	0		
		C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
0	x_5		-2	3	5	-4	1	0	0		-20
0	x_6		7	2	6	-2	0	1	0		35
0	x_7		-4	-5	3	2	0	0	1		-15
	Z_j		0	0	0	0	0	0	0		0
	$Z_j - C_j$		-2	-7	-6	-5	0	0	0		
2	x_1		1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	0		10
0	x_6		0	25/2	47/2	-16	7/2	1	0		-35
0	x_7		0	-11	-7	10	-2	0	1		25



Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro.

Passo 1. Construir o quadro Simplex correspondente à nova SBP $X^1 = (10, 0, 0, 0, 0, -35, 25)$.

	C_j	2	7	6	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
2	x_1	1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	0	10
0	x_6	0	25/2	47/2	-16	7/2	1	0	-35
0	x_7	0	-11	-7	10	-2	0	1	25
	Z_j	2	-3	-5	4	-1	0	0	20
	$Z_j - C_j$	0	-10	-11	-1	-1	0	0	

os custos reduzidos são não positivos, i.e., a solução dual complementar é admissível.



Algoritmo Dual. Exemplo: 2º quadro.

Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

Existe alguma variável básica negativa?

$$X_B^1 = (10 , \mathbf{-35} , 25)$$

$\exists x_i \in X_B^0,$
tal que
 $x_i < 0 ?$

Sim

Passar ao passo seguinte

*X^1 não é admissível
para o primal
(SBNAP)*



Algoritmo Dual. Exemplo. 2º quadro.

Passo 3: Determinar a variável básica que sai.

		C_j	2	7	6	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	linha pivotal
	2	x_1	1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	0	10
0	x_6	0	25/2	47/2	-16	7/2	1	0	-35	→ mínimo
0	x_7	0	-11	-7	10	-2	0	1	25	
	Z_j	2	-3	-5	4	-1	0	0	20	
	$Z_j - C_j$	0	-10	-11	-1	-1	0	0		

a variável
candidata a sair
é: x_6



Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro.

Passo 4: Teste de óptimo não finito para o dual, problema impossível para o primal.

Existe algum $x_{5j} < 0$ na linha pivotal?

Há uma componente negativa na linha pivotal, i.e., é possível passar ao passo seguinte do algoritmo

C_j		2	7	6	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
2	x_1	1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	0	10
0	x_6	0	25/2	47/2	-16	7/2	1	0	-35 → mínimo
0	x_7	0	-11	-7	10	-2	0	1	25
	Z_j	2	-3	-5	4	-1	0	0	20
	$Z_j - C_j$	0	-10	-11	-1	-1	0	0	



Algoritmo Dual. Exemplo: 2º quadro.

Passo 5: Determinar a variável não básica que entra.

		C_j	2	7	6	5	0	0	0			
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			\bar{b}	
	2	x_1	1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	0			10
0	x_6	0	25/2	47/2	-16	7/2	1	0			-35 → mínimo	
0	x_7	0	-11	-7	10	-2	0	1			25	
		Z_j	2	-3	-5	4	-1	0	0			20
		$Z_j - C_j$	0	-10	-11	-1	-1	0	0			

mínimo ↑

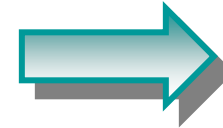
$$-1/-16 = 1/16$$



Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro. Passo 6: Calcular nova SBP X^2 .

1ª

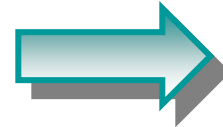
A variável básica negativa que sai



x_6

2ª

A variável não básica que entra



x_4

SBP inicial X^1 :

$$X_B^1 = (x_1, x_6, x_7)$$

$$X^1 = (10, 0, 0, 0, 0, -35, 25)$$

x_4 entra



x_6 sai

SBP X^2 :

$$X_B^2 = (x_1, x_4, x_7)$$

$$X^2 = ?$$



Algoritmo Dual. Exemplo: 2º Quadro.

Passo 6. Calcular nova SBP X^2 .

		c_j	2	7	6	5	0	0	0			
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			\bar{b}	
2	x_1	1	-3/2	-5/2	2	-1/2	0	0			10	
0	x_6	0	25/2	47/2	-16	7/2	1	0			-35	
0	x_7	0	-11	-7	10	-2	0	1			25	
		z_j	2	-3	-5	4	-1	0	0			20
		$z_j - c_j$	0	-10	-11	-1	-1	0	0			
2	x_1	1	1/16	7/16	0	-1/16	1/8	0			45/8	
5	x_4	0	-25/32	-47/32	1	-7/32	-1/16	0			35/16	
0	x_7	0	-51/16	123/16	0	3/16	5/8	1			75/8	



Algoritmo Dual. Exemplo.

Passo 1: Construir o 3º quadro Simplex correspondente à nova SBP X^2 .

$$X^2 = (45/8, 0, 0, 35/16, 0, 0, 75/8).$$

		C_j	2	7	6	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		\bar{b}
2	x_1	1	1/16	7/16	0	-1/16	1/8	0		45/8
5	x_4	0	-25/32	-47/32	1	-7/32	-1/16	0		35/16
0	x_7	0	-51/16	123/16	0	3/16	5/8	1		75/8
	Z_j	2	-121/32	-207/32	5	-39/32	-1/16	0		355/16
	$Z_j - C_j$	0	-345/32	-399/32	0	-39/32	-1/16	0		

os custos reduzidos são não positivos, i.e. a solução dual complementar é admissível



Algoritmo Dual. Exemplo: 3º quadro.

Passo 2: Teste de admissibilidade para a solução primal.

Existe alguma variável básica negativa?

$$X_B^2 = (45/8, 35/16, 75/8)$$

$\exists x_i \in X_B^2,$
tal que
 $x_i < 0 ?$

Não

FIM
a solução é
óptima !!!

X^2 é admissível para o primal (SBAP), sendo a solução óptima para o primal.

A solução dual complementar $Y^2 = C_B B^{-1}$ é admissível para o dual (SBAD), sendo a solução óptima para o dual.



Algoritmo Dual. Conclusões.



O Algoritmo Dual Simplex envolve:

- uma SBAD como ponto de partida à qual corresponde uma SBNAP;
- um mecanismo que determina a passagem para uma nova SBAD "melhor" do que a anterior;
- critérios de paragem que indicam se o problema primal tem óptimo finito (solução óptima) ou se o problema primal é impossível (neste caso o problema dual não tem óptimo finito).