Optimização

Aula 16

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear (PL)

Aula 16: Dualidade. (Aula Prática)

Definição do Problema Dual.

Propriedades das Soluções complementares

Problema 16.1

Transformar o seguinte problema Primal em Dual.

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = 3x_1 + 2x_2 \\
&sujeito\ a: \\
&\quad x_1 \qquad\quad\ \ \le 4 \\
&\quad x_1 + 3x_2 \le 15 \\
&2x_1 + x_2 \le 10 \\
&com\ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Problema 16.1 (Resolução)

	x_1	x_2		
Y_1	1	0	≤	4
Y_2	1	3	≤	15
y_3	2	1	≤	10
	IV	IV		
	3	2		

$$Min\ z = 4y_1 + 15y_2 + 10y_3$$

$$sujeito\ a:$$

$$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$3y_2 + y_3 \geq 2$$

$$com\ y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Problema 16.2 (I)

Considere o problema clássico da dieta: **(problema primal):** Quer-se consumir quantidades de determinados alimentos de tal forma a satisfazer as necessidades mínimas de nutrientes exigidas a um custo mínimo despendido, problema este ilustrado pelo quadro que a seguir se apresenta.

	Alimentos					Necessidade mínima de nutrientes
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Proteínas (g)	3	4	5	3	6	42
Sais minerais (g)	2	3	4	3	3	24
Custo (USD)	25	35	50	33	36	

Problema 16.2 (II)

Considerando-se:

a_{ij} : percentual do componente i presente no alimento j;

x_j : quantidade do componente j presente na dieta a ser feita;

c_j : preço por grama de cada ingrediente;

b_i : quantidade mínima de cada ingrediente a ser consumida na dieta;

a_j: coluna j da matriz do sistema.

Problema 16.2 (Resolução I)

- O modelo Primal passa a ser apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimizar}\ 25x_1 + 35x_2 + 50\,x_3 + 33x_4 + 36x_5 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \geq 42 \\
&2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 24 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Problema 16.2 (III)

Suponha-se que o vendedor das proteínas e dos sais minerais propõe substituir a dieta de alimentos apresentada por uma dieta com as seguintes condições:

1. As pílulas (gramas) de proteínas custarão y_1
2. As pílulas (gramas) de sais minerais custarão y_2
3. Os preços y_1 e y_2 serão fixados arbitrariamente
4. O vendedor garante que as pílulas terão preços iguais ou mais baratas que qualquer alimento;
5. O vendedor pretende maximizar a sua renda de forma a satisfazer a necessidade das dietas.

Problema 16.2 (Resolução II)

- Para o problema proposto tem-se o modelo visto a seguir:

$$
\begin{aligned}
&Maximizar\ 42y_1 + 24y_2\\
&sujeito\ a:\\
&3y_1 + 2y_2 \leq 25\\
&4y_1 + 3y_2 \leq 35\\
&5y_1 + 4y_2 \leq 50\\
&3y_1 + 3y_2 \leq 33\\
&6y_1 + 3y_2 \leq 36\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema 16.3 (I)

Uma empresa produz 3 produtos (P1,P2 e P3). Para a sua produção tem uma restrição respeitante ao nível máximo de produção (NMP) e outra respeitante a matéria prima disponível (MPD). Com o objectivo de maximizar o lucro total em unidades monetárias, a empresa determinou o plano óptimo de produção resolvendo o seguinte problema de Programação Linear:

Problema 16.3 (II)

$$\begin{aligned}
&Maximizar\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
&sujeita\ a: \\
&5x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 10 \quad (NMP) \\
&4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 16 \quad (MPD) \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Cujo quadro óptimo é:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	2	2	1	0	1/2	0	8
	-1	-6	0	1	1	-1	6
c_j-z_j	-7	-3	0	0	-2	0	32

Onde x_4 e x_5 são as variáveis de folga associadas às 1ª e 2ª restrições respectivamente.

Problema 16.3 (III)

1. Indique justificando, os valores óptimos da solução primal e da solução dual (incluindo as variáveis de folga), assim como o valor óptimo da função objectivo. Interprete economicamente a partir das propriedades dos desvios complementares.

2. Suponha que a empresa limita a produção máxima conjunta dos produtos 1 e 3 em 7 unidades. Determine o novo plano de produção.

Problema 16.3 (Resolução I)

Primal: $X^*=(0,0,8,6,0)$

Dual: $Y^*=(0,2,7,3,0)$

Z*=W*=32

$x_1^* = 0,\ y_3^* = 7$ ⟺ $5y_1 + 4y_2 \geq 1$

O Produto P1 não é produzido porque a sua perda de oportunidade é não nula (=7), significa que a valorização interna do nível mínimo de produção e da matéria prima necessária a produção de uma unidade de P1 provocaria um decréscimo de 7 u.m no lucro

Problema 16.3 (Resolução II)

$x_2^* = 0, \; y_4^* = 3$ ⟺ $10y_1 + 4y_2 \geq 5$

O Produto P2 não é produzido porque a sua perda de oportunidade é não nula (=3), significa que a valorização interna do nível mínimo de produção e da matéria prima necessária a produção de uma unidade de P2 provocaria um decréscimo de 3 u.m no lucro

$x_3^* = 8, \; y_5^* = 0$ ⟺ $2y_1 + 2y_2 = 4$

São produzidas 8 unidades do Produto P3 pelo que a sua perda de oportunidade é nula

Problema 16.3 (Resolução III)

$x_4^* = 6$ ⟺ $5x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 10$ | $y_1^* = 0$

O nível mínimo de produção foi excedido em 6 unidades pelo que a sua valorização interna é nula

$x_5^* = 0$ ⟺ $4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$ | $y_2^* = 2$

A matéria prima disponível foi esgotada, trata-se de um recurso escasso porque a sua valorização interna é não nula, este recurso foi internamente valorizado em duas unidades o que significa que por cada unidade adicional de matéria prima o lucro aumenta em 2 unidades monetárias

Problema 16.3 (Resolução IV)

Usando a primeira linha do quadro óptimo Simplex tem-se:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + ½x_5 = 8$$

$$x_3 = 8 - 2x_1 - 2x_2 - ½x_5$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	2	2	1	0	1/2	0	8
	-1	-6	0	1	1	-1	6
c_j-z_j	-7	-3	0	0	-2	0	32

Substituindo na nova restrição obtêm-se:

$$x_1 + (8 - 2x_1 - 2x_2 - ½\,x_5) + x_7 = 7$$

$$-x_1 - 2x_1 - ½\,x_5 + x_7 = -1$$

Problema 16.3 (Resolução V)

É esta a expressão que tem de se introduzir no quadro Simplex sem esquecer que a variável de folga x_7 entra na base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_6	
x_3	2	2	1	0	1/2	0	0	8
x_4	-1	-6	0	1	1	0	-1	6
x_7	-1	-2	0	0	-1/2	1	0	-1
c_j-z_j	-7	-3	0	0	-2	0	0	32

Usando o algoritmo dual do Simplex em que o elemento Pivot se encontra na linha 3, coluna 2, obtém-se o seguinte quadro óptimo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_6	
x_3	1	0	1	0	0	1	0	7
x_4	2	0	0	1	5/2	-3	-1	9
x_2	1/2	1	0	0	1/4	-1/2	0	1/2
c_j-z_j	-11/2	0	0	0	-5/4	-3/2	0	30,5

Problema 16.3 (Resolução VI)

$X^*=(0,1/2,7,9,0,0)$

$Z^*=30{,}5$

O novo plano de produção é o seguinte continua-se a não produzir P1, produz-se agora ½ unidade de P2 e passa-se a produzir só 7 unidades de P3. O nível mínimo de produção foi agora excedido em 9 unidades. A matéria prima também ficou esgotada e o nível máximo de produção conjunta de P1 e P3 foi atingido. O lucro total deste plano é de 30,5 unidades monetárias.

Trabalho para Casa 5

A empresa Móveis de Carrupeia fabrica três tipos de mesas de fórmica: quadrada triangular e redonda. Cada mesa passa por dois processos: de produção e de acabamento. A seguinte tabela resume o número de horas requerido por mesa em cada um dos processos, bem como o lucro unitário de cada mesa.

Modelo de mesa	Produção	Acabamento	Lucro unitário
Quadrada	3 horas	3 horas	30000 Mt
Triangular	4 horas	3 horas	60000 Mt
Redonda	5 horas	3 horas	80000 Mt
Total semanal disponível	1200 horas	800 horas	

Trabalho para Casa 5

a) Formule o problema;

b) Estabeleça o dual;

c) Resolva-os utilizando o Solver do Excel;

d) Identifique as soluções complementares e faça a sua interpretação económica.

Enviar até a 0 hora de quarta-feira dia 2 de Outubro com o "subject": TPC05.