Optimização

Aula 17

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear (PL)

Aula 17: Análise pós-optimal

- Alterações discretas nos termos independentes.

- Alterações discretas nos coeficientes da função objectivo.

Alteração dos termos independentes.

Um termo independente b_k *sofre* *<u>um acréscimo</u> (ou <u>decréscimo</u>), mantendo-se inalterados todos os restantes parâmetros do modelo.*

$\exists$ *k, k=1,…,m tal que* $b_k \rightarrow b_k + \Delta b_k$, $\Delta b_k \neq 0$

no quadro óptimo simplex fica alterada apenas a coluna $\bar{b}$

$$X^*_B \rightarrow B^{-1}b+B^{-1}\Delta_k b = X^*_B+B^{-1}\Delta_k b \text{ ,}$$
$$\Delta_k b=(0,\ldots,0,\Delta b_k ,0,\ldots,0)$$

se $X^*_B+B^{-1}\Delta_k b \geq 0$, *então a nova solução mantém a admissibilidade, logo também é óptima, e* $z^* \rightarrow z^*+ y^*_k\Delta b_k$.

caso contrário, aplica-se <u>o algoritmo dual simplex</u>, uma vez que a solução é primal não admissível e os custos reduzidos mantém-se não positivos.

Alteração dos termos independentes. Exemplo protótipo

Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se a capacidade de produção da *Secção 2* passa de 12 para 24 unidades: $b_2 \rightarrow b_2 + 12$

$$X^*_B \rightarrow X^*_B + B^{-1}\Delta b,\ \Delta b=(0,12,0)$$

X^*_B + B^{-1} x Δ b = nova

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{b} \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}_{X^*_B} + \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

<0

Quadro óptimo

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

B^{-1}

Como a nova solução é <u>primal não admissível</u> e <u>dual admissível</u> (as linhas dos custos reduzidos não sofreram alteração) então pode ser aplicado o <u>algoritmo dual simplex</u> para atingir uma solução óptima admissível.

Alteração dos termos independentes. Exemplo gráfico.

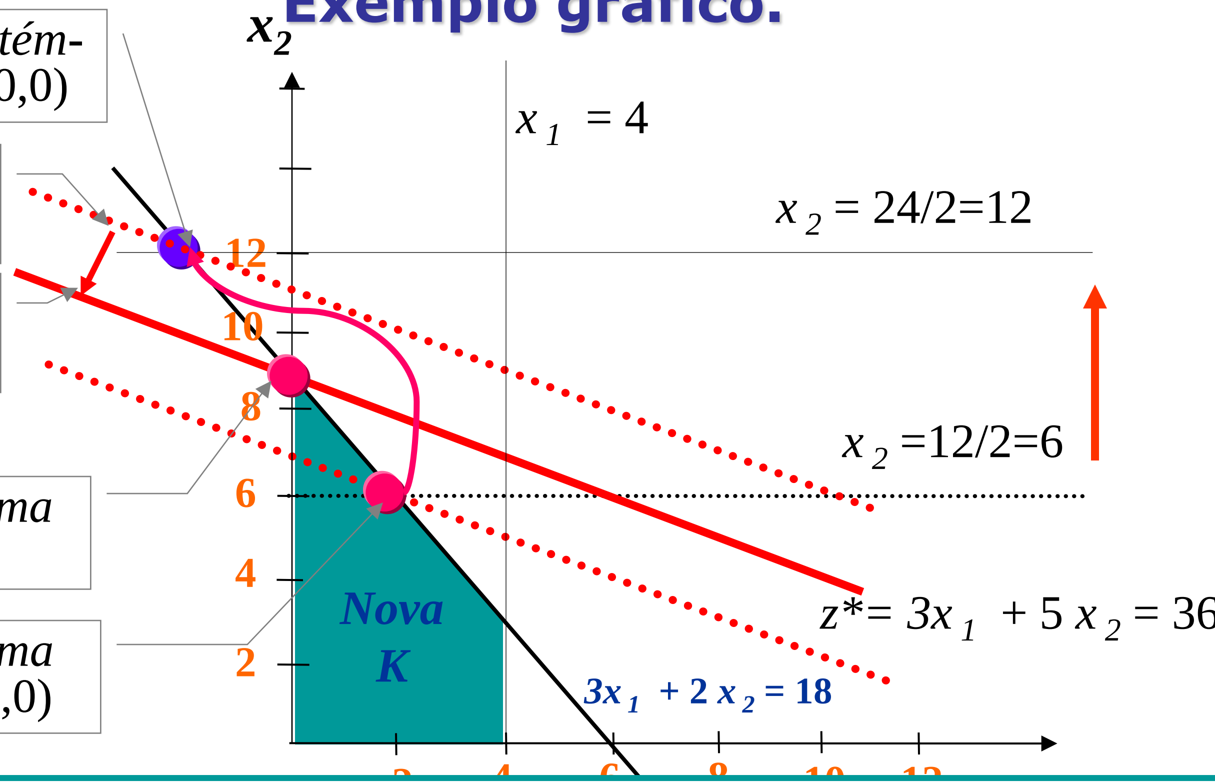
Alterando a restrição 2 obtém-se a SBNA X = (-2, 12,6,0,0)

super-óptima
$z^* = 3x_1 + 5x_2 = 54$

óptima
$z = 3x_1 + 5x_2 = 45$

Nova solução óptima
X*=(0, 9,4,6,0)

Solução óptima
X*=(2, 6,2,0,0)



Ao ser incrementada a capacidade de produção da secção 2 em 12 unid., obtém-se uma nova solução super-óptima, **X = (-2, 12,6,0,0)**, **primal não admissível**.
Neste caso, pode-se aplicar **<u>o algoritmo dual simplex</u>**
para atingir uma solução primal admissível, logo óptima.
A solução **X*=(0, 9,4,6,0)** é a nova solução óptima
com um valor óptimo de 45 U.M..

Alteração dos termos independentes. Algoritmo Dual Simplex

$X^* = (\ 0,\ 9,\ 4,\ 6,\ 0\ )$

$Y^* = (\ 0,\ 0,\ 5/2,\ 9/2,\ 0\ )$

$x_1 \cdot y_3 = 0 \times 9/2 = 0$

$x_3 \cdot y_1 = 4 \times 0 = 0$

$x_2 \cdot y_4 = 9 \times 0 = 0$

$x_4 \cdot y_2 = 6 \times 0 = 0$

$x_5 \cdot y_3 = 0 \times 5/2 = 0$

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	6
5	x_2	0	1	0	1/2	0	12
3	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	-2
	z_j	3	5	0	3/2	1	54
	$c_j - z_j$	0	0	0	-3/2	-1	
0	x_3	1	0	1	0	0	4
5	x_2	3/2	1	0	0	1/2	9
0	x_4	-3	0	0	1	-1	6
	z_j	15/2	5	0	0	5/2	45
	$c_j - z_j$	-9/2	0	0	0	-5/2	

Alteração dos termos independentes. Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$, $z^*=36$
$Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

A capacidade de produção da secção 2 passa de 12 *para* 24 unidades

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (0, 9, 4, 6, 0)$, $z^*=45$
$Y^* = (0, 0, 5/2, 9/2, 0)$

• Referente à produção:

Ao incrementar a capacidade de produção da secção 2 de 12 para 24 unidades por minuto, o novo plano óptimo:

- **não contempla a produção de portas**

  a perda de oportunidade da produção duma porta é igual a 4.5 U.M **($y_4=9/2$)**

- **serão produzidas 9 janelas por minuto**

  evidentemente a perda de oportunidade da produção duma janela é nula **($y_5=0$)**

•**Economicamente é** vantajoso **este incremento da capacidade de produção da secção 2 em 12 unidades por minuto, pois obtém-se um incremento de 9 U.M. no lucro total (45 = 36 + 9).**

Alteração dos termos independentes. Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$, $z^*=36$
$Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

A capacidade de produção da secção 2 passa de 12 para 24 unidades

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (0, 9, 4, 6, 0)$, $z^*=45$
$Y^* = (0, 0, 5/2, 9/2, 0)$

- Referente aos recursos:
  - **O** recurso 1 **continua sendo um** *recurso abundante* **pelo que o seu preço sombra mantém-se nulo ($x_3=4$, $y_1=0$).** ***Como o novo plano não inclui a produção de portas, a capacidade de produção não utilizada da secção 1 é igual ao seu valor máximo disponível*** **($x_3=4$).**
  - **O** recurso 2 **passa de** *recurso escasso* **para** *recurso abundante* **pelo que o seu preço sombra é agora nulo ($x_4=6$, $y_2=0$).**
    No novo plano sobram 6 unidades do recurso 2, e o seu preço sombra cai de 3/2 até zero ($y_2=3/2 \rightarrow y_2=0$).
  - **O** recurso 3 **continua sendo um** *recurso escasso* **e o seu preço sombra aumenta de 1 para 2,5 U.M. ($x_5=0$, $y_3=5/2$).**
    Como a capacidade de produção da secção 3 é a única que fica esgotada, sendo utilizada ao seu nível máximo disponível para a produção das 9 janelas **($3 \cdot 0 + 2 \cdot 9 = 18$),** ***o seu preço sombra é positivo e igual a*** **2,5** ***U.M.***
    O lucro total $z^* = c_2 x_2 = 5 \cdot 9 = 45$ U.M. $= b_3 y_3 = 18 \cdot 2{,}5 = w^*$

Alteração dos coeficientes da função objectivo

Um coeficiente c_l *sofre <u>um acréscimo</u> (ou <u>decréscimo</u>),*
mantendo-se todos os restantes parâmetros do modelo inalterados.

- $\exists\ l,\ l=1,\dots,n$ *tal que* $c_l \rightarrow c_l + \Delta c_l,\ \Delta c_l \neq 0$

- *no quadro óptimo simplex é alterada a linha dos custos reduzidos*

- *a admissibilidade da solução primal mantém-se, mas pode deixar de ser óptima*

- *a solução dual complementar pode deixar de ser admissível.*

Alteração dos coeficientes da função objectivo

Um coeficiente c_l *sofre* *<u>um acréscimo</u>* *(ou* *<u>decréscimo</u>*),
mantendo-se todos os restantes parâmetros do modelo inalterados.

$\exists\ l,\ l=1,\dots,n$ tal que $c_l \rightarrow c_l + \Delta c_l,\ \Delta c_l \neq 0$

<u>Caso 1:</u> *o coeficiente c_l corresponde a uma variável não básica.*

fica alterado apenas o custo reduzido correspondente a esta variável não básica: $c_l - z_l$

se $c_l - z_l \rightarrow (c_l + \Delta c_l) - z_l \leq 0$, *a solução primal mantém a optimalidade, o valor da f.o. não fica alterado*

caso contrário: $c_l - z_l \rightarrow (c_l + \Delta c_l) - z_l > 0$
aplica-se <u>o algoritmo primal simplex</u> para atingir uma nova solução óptima.

Alteração dos coeficientes da função objectivo

Um coeficiente c_l *sofre* *um acréscimo* *(ou* *decréscimo*),
mantendo-se todos os restantes parâmetros do modelo inalterados.

$\exists$ *l, l=1,…,n tal que* $c_l \rightarrow c_l + \Delta c_l$, $\Delta c_l \neq 0$

Caso 2: ***o coeficiente*** c_l ***corresponde a uma variável básica.***

todos os custos reduzidos ficam afectados (exceptuando evidentemente os correspondentes às variáveis básicas que são sempre nulos)

se $\forall$ *j:* $c_j - z_j \leq 0$, *então a solução primal mantém a optimalidade e o valor da f.o. fica alterado:* $z^* \rightarrow z^* + \Delta c_l x_l$

caso contrário: $\exists$ *j:* $c_j - z_j > 0$
aplica-se *o algoritmo primal simplex* *para atingir uma nova solução óptima.*

Alteração dos coeficientes da f.o. Exemplo protótipo

Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se o lucro unitário do produto 1 passa de 3 a 8 mil Meticais

$$c_1 \to c_1 + \Delta c_1 = 3 + 5 = 8$$

Foi alterado o lucro unitário duma variável básica

Quadro óptimo

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

	c_j	8	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
5	x_2	0	1	0	1/2	0	6
8	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
	z_j	8	5	0	-1/6	8/3	46
	$c_j - z_j$	0	0	0	1/6	-8/3	

Como a solução deixa de ser óptima (existe um custo reduzido positivo), então pode ser aplicado ***o algoritmo primal simplex*** *para determinar uma nova solução óptima .*

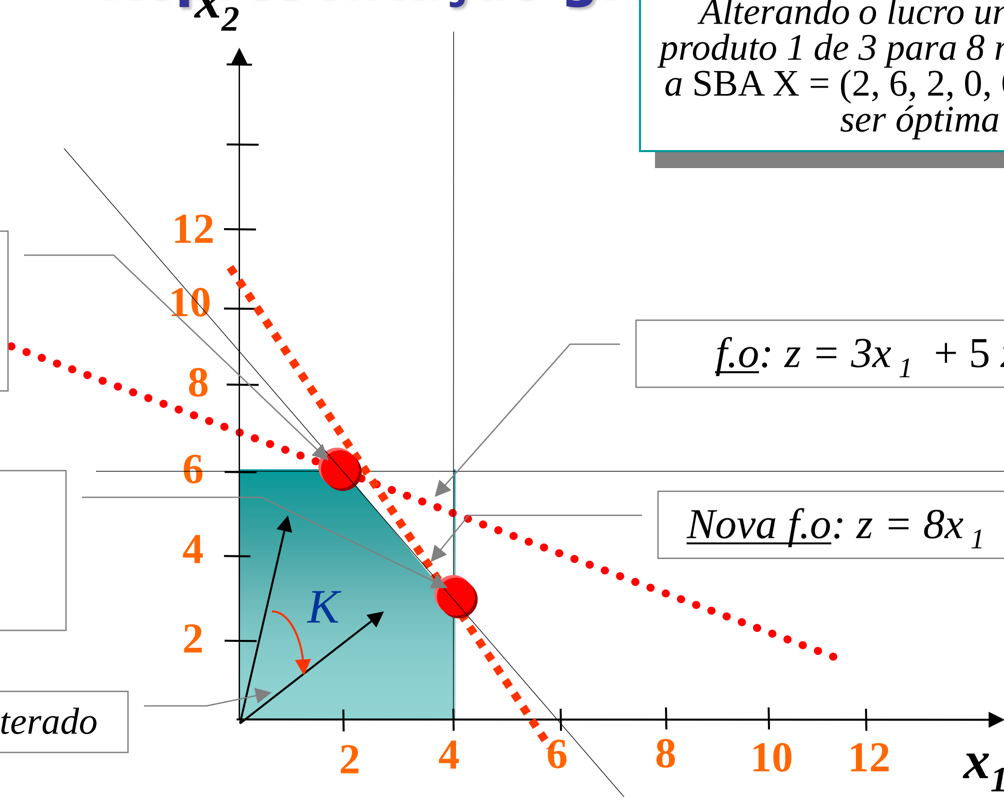
Alteração dos coeficientes da f.o. Representação gráfica

Alterando o lucro unitário do produto 1 de 3 para 8 mil Meticais a SBA X = (2, 6, 2, 0, 0) deixa de ser óptima

Solução óptima:
$X^* = (\mathbf{2}, \mathbf{6}, 2, 0, 0)$
$z^*=36$

Nova solução óptima
$X^* = (\mathbf{4}, \mathbf{3}, 0, 6, 0)$
$z^*=47$

O gradiente da f.o. foi alterado



f.o: $z = 3x_1 + 5x_2$

Nova f.o: $z = 8x_1 + 5x_2$

Ao ser alterado o gradiente da função objectivo a solução X*=(2, 6, 2, 0, 0) *deixa de ser óptima. Neste caso para obter a solução óptima pode-se aplicar o* ***algoritmo primal simplex.*** *A solução* X*=(4,3,0,6, 0) *é a nova solução óptima com um valor de 47 U.M. para o lucro total.*

Alteração dos coeficientes da f.o. Exemplo protótipo. Algoritmo Primal Simplex.

$X^* = (4, 3, 0, 6, 0)$

$Y^* = (1/2, 0, 5/2, 0, 0)$

$x_1 \cdot y_3 = 4 \times 0 = 0$

$x_3 \cdot y_1 = 0 \times 1/2 = 0$

$x_2 \cdot y_4 = 3 \times 0 = 0$

$x_4 \cdot y_2 = 6 \times 0 = 0$

$x_5 \cdot y_3 = 0 \times 5/2 = 0$

	c_j	8	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
5	x_2	0	1	0	1/2	0	6
8	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
	z_j	8	5	0	-1/6	8/3	**46**
	$c_j - z_j$	0	0	0	**1/6**	-8/3	
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
5	x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3
8	x_1	1	0	1	0	1/3	4
	z_j	8	5	1/2	0	5/2	**47**
	$c_j - z_j$	0	0	**-1/2**	0	**-5/2**	

Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$, $z^*=36$
$Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

O lucro unitário do produto 1 *passa de* 3 *para* 8 mil Meticais

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (4, 3, 0, 6, 0)$, $z^*=47$
$Y^* = (1/2, 0, 5/2, 0, 0)$

•Referente à produção:

Ao incrementar o lucro unitário do produto 1 de 3 U.M. para 8 U.M., o novo plano óptimo vai incluir:

– **a produção de 4 portas por minuto (em lugar das 2 portas)**

evidentemente a perda de oportunidade da produção duma porta é nula **(y_4=0)**

– **a produção de 3 janelas por minuto (em lugar das 6 janelas)**

evidentemente a perda de oportunidade da produção duma janela é nula **(y_5=0)**

•**Economicamente é** vantajoso **este incremento do lucro unitário do produto 1, pois obtém-se um incremento de** 11 U.M. **no lucro total (47 = 36 + 11).**

Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$, $z^*=36$
$Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

O lucro unitário do produto 1 *passa de* 3 *para* 8 U.M.

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (4, 3, 0, 6, 0)$, $z^*=47$
$Y^* = (1/2, 0, 5/2, 0, 0)$

- Referente aos recursos:
  - **O** recurso 1 **passa a ser um** *recurso escasso* **pelo que o seu preço sombra aumenta de 0 para 0,5 U.M.** $(x_3=0, y_1=1/2)$.

    no novo plano de produção a capacidade de produção da secção 1 fica esgotada.
  - **O** recurso 2 **passa de** *recurso escasso* **para** *recurso abundante* **pelo que o seu preço sombra é agora nulo** $(x_4=6, y_2=0)$.

    no novo plano sobram 6 unidades do recurso 2 e o seu preço sombra cai de 3/2 até zero $(y_2=3/2 \rightarrow y_2=0)$.
  - **O** recurso 3 **continua sendo um** *recurso escasso* **e o seu preço sombra aumenta de 1 para 2,5 U.M.** $(x_5=0, y_3=5/2)$.

    como a capacidade de produção da secção 3 fica esgotada, o seu preço sombra é positivo e igual a 2,5 U.M.

  O lucro total: $z^* = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 47 = b_1 y_1 + b_3 y_3 = 4 \cdot 0{,}5 + 18 \cdot 2{,}5 = w^*$

Pós-Optimização. Exemplo.

Num laboratório farmacêutico são manufacturados 3 produtos, passando por 3 operações diferentes.
O tempo (em horas) requerido por cada unidade de cada produto, a capacidade diária de cada operação (em h/dia) e o lucro unitário por unidade vendida de cada produto (em milhares de Meticais) são os seguintes:

	Tempo por unidade Produtos			
Operação Nº	**1**	**2**	**3**	***Capacidade operativa***
1	2	3	1	**5**
2	4	1	2	**11**
3	3	4	2	**8**
Lucro unitário (mil. de Meticais)	**5**	**4**	**3**	

Pós-Optimização. Exemplo.

P_2- produção diária do produto 2

P_4 - não utilização da capacidade diária da operação 1

Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

P_1- produção diária do produto 1

sujeito a

$$x_1\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\11\\8\end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

P_3- produção diária do produto 3

P_5- não utilização da capacidade diária da operação 2

P_6 - não utilização da capacidade diária da operação 3

Pós-Optimização. Exemplo. Soluções óptimas primal e dual.

a) Descreva as soluções óptimas primal e dual e justifique-as, economicamente, utilizando a complementaridade de slacks

$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$x_1 . y_4 = 2 \times 0 = 0$ | $x_4 . y_1 = 0 \times 1 = 0$

$x_2 . y_5 = 0 \times 3 = 0$ | $x_5 . y_2 = 1 \times 0 = 0$

$x_3 . y_6 = 1 \times 0 = 0$ | $x_6 . y_3 = 0 \times 1 = 0$

B^{-1}

	c_j	5	4	3	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

valores simétricos dos valores das variáveis de folga duais

Valores simétricos dos valores das variáveis de decisão duais

Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (1).

Primal: $X^*=(2, 0, 1, 0, 1, 0)$

Dual: $Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$x_1^* \cdot y_4^* = 0$ ⟺ $2 \cdot 0 = 0$

Referente à produção do Produto 1:

Devem ser manufacturadas 2 unidades do produto 1 diariamente,
sendo a valorização interna atribuída às horas gastas nas operações para produzir uma unidade do produto 1
igual ao seu lucro unitário,
pelo que *a perda de oportunidade* da produção
de uma unidade do produto 1 é *nula*.

Caso a perda de oportunidade fosse positiva, a produção deste produto não seria contemplada

Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das *slacks* (2).

Primal: $X^*=(2, \mathbf{0}, 1, 0, 1, 0)$

Dual: $Y^* = (1, 0, 1, 0, \mathbf{3}, 0)$

$x_2^* \cdot y_5^* = 0$ ⟺ $0 \cdot 3 = 0$

Referente à produção do Produto 2:

A produção do Produto 2 não é contemplada,
pois a valorização interna atribuída às horas que seriam gastas
nas operações para produzir uma unidade do Produto 2
é maior do que o seu lucro unitário, i.e.,
a produção de uma unidade do produto 2 implicaria
uma redução de 3 mil Meticais no lucro total, pelo que
a perda de oportunidade da produção
de uma unidade do Produto 2 é de 3 mil Meticais.

Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (3).

Primal: $X^*=(2, 0, \mathbf{1}, 0, 1, 0)$

Dual: $Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, \mathbf{0})$

$x_3^* \cdot y_6^* = 0$ ⟺ $1 \cdot 0 = 0$

Referente à produção do Produto 3:

Deve ser manufacturada 1 unidade do Produto 3 diariamente, sendo a valorização interna atribuída às horas gastas nas operações para produzir uma unidade do Produto 3 igual ao seu lucro unitário, pelo que *a perda de oportunidade* da produção de uma unidade do Produto 3 é *nula*.

Caso a perda de oportunidade fosse positiva, a produção deste produto não seria contemplada.

Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (4).

Primal: X^*=(2, 0, 1, 0, 1, 0)

Dual: Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)

$x_4^* \cdot y_1^* = 0$ ⟺ $0 \cdot 1 = 0$

Referente ao Recurso 1:

O *preço sombra* (valorização interna)

de uma hora por dia na operação 1 é positivo e igual a mil Meticais,

pelo facto deste ser *um recurso escasso*, do qual não há sobras, i.e., a capacidade diária para a operação 1 (5 h/dia) está esgotada.

A disponibilidade adicional de 1 hora diária na operação 1 possibilitaria um incremento de mil Meticais no valor do lucro total.

Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (5).

Primal: X^*=(2, 0, 1, 0, 1, 0)

Dual: Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)

$x_5^* \cdot y_2^* = 0$ ⟺ $1 \cdot 0 = 0$

Referente ao recurso 2:

O *preço sombra* (valorização interna)

de uma hora por dia na operação 2 é *nulo*,

pelo facto deste ser *um recurso abundante*,

do qual sobra 1 hora diária do total das horas disponíveis

para esta operação (11 h/dia).

O tempo diário não utilizado na operação 2 é de 1 hora.

Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (6).

Primal: $X^* = (2, 0, 1, 0, 1, \mathbf{0})$

Dual: $Y^* = (1, 0, \mathbf{1}, 0, 3, 0)$

$x_6^* \cdot y_3^* = 0$ ⟺ $0 \cdot 1 = 0$

Referente ao Recurso 3:

O *preço sombra* (valorização interna)

de uma hora por dia na operação 3 é positivo e igual a mil Meticais,

pelo facto deste ser *um recurso escasso*, do qual não há sobras, i.e., a capacidade diária para a operação 3 (8 h/dia) está esgotada.

A disponibilidade adicional de 1 hora diária na operação 1 possibilitaria um incremento de mil Meticais no valor do lucro total.

Pós-Optimização. Exemplo.
Alteração dos termos independentes.

b) Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se a capacidade diária da operação 3 passar de 8 h/dia para 12 h/dia.

$$X^*_B \rightarrow X^*_B + B^{-1}\Delta b,\quad \Delta b=(0,0,4)$$

X^*_B + B^{-1} x Δ b = nova X^*_B

$$\begin{pmatrix}\bar{b}\\ 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{b}\\ -2\\ 1\\ 9\end{pmatrix}$$

<0

C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
	c_j	5	4	3	0	0	0	
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

B^{-1}

Como a nova solução é <u>primal não admissível</u> e <u>dual admissível</u> (as linhas dos custos reduzidos não sofreram alteração) pode ser aplicado o <u>algoritmo dual simplex</u> para atingir uma solução óptima admissível.

Pós-Optimização. Exemplo.
Alteração dos termos independentes.

$X^* = (\ 0,\ 0,\ 5,\ 0,\ 1,\ 2\ )$

$Y^* = (\ 3,\ 0,\ 0,\ 1,\ 5,\ 0\ )$

$x_1 \cdot y_4 = 0 \times 1 = 0$	$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 3 = 0$
$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 5 = 0$	$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$
$x_3 \cdot y_6 = 5 \times 0 = 0$	$x_6 \cdot y_3 = 2 \times 0 = 0$

	c_j	5	4	3	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	-2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	9
	z_j	5	7	3	1	0	1	17
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	
0	x_6	-1	- 2	0	- 2	0	1	2
0	x_5	0	-5	0	- 2	1	0	1
3	x_3	2	3	1	1	0	0	5
	z_j	6	9	3	3	0	0	15
	$c_j - z_j$	-1	-5	0	-3	0	0	

Exemplo. Alteração dos termos independentes. Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$, $z^*=13$
$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

A capacidade diária da operação 3 passa de 8 h/dia *para* 12 h/dia.

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (0, 0, 5, 0, 1, 2)$, $z^*=15$
$Y^* = (3, 0, 0, 1, 5, 0)$

•Referente à produção:

•**Ao ser incrementada a capacidade diária da** operação 3 **de 8 h/dia para 12 h/dia, o novo plano óptimo:**

- **não contempla agora a produção do produto 1**
  a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 1 passa a ser igual a 1 mil Meticais **(y_4=1)**
- **continua sem contemplar a produção do produto 2**
  a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 2 é igual a 5 mil Meticais **(y_5=5)**
- **aumenta a produção diária do produto 3 (de 1 para 5 unidades)**
  a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 3 continua nula **(y_6=0)**

•**Economicamente é** vantajoso **este incremento da capacidade de produção da operação 3 em 4 h/dia, pois obtém-se um incremento de 2 mil Meticais no lucro total diário (15 = 13 + 2).**

Exemplo. Alteração dos termos independentes. Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$, $z^* = 13$
$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

A capacidade diária da operação 3 passa de 8 h/dia *para* 12 h/dia.

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (0, 0, 5, 0, 1, 2)$, $z^* = 15$
$Y^* = (3, 0, 0, 1, 5, 0)$

• Referente aos recursos:

– **O** Recurso 1 **continua sendo um** *recurso escasso* **e o seu preço sombra aumenta de 1 para 3 mil Meticais por h/dia** ($x_4=0$, $y_1=3$).
a capacidade de produção da operação 1 mantém-se esgotada, sendo utilizada ao seu nível máximo disponível para a produção de um único produto: o produto 3 (1 h/dia * 5 unidades do produto 3 =5 h/dia)

– **O** Recurso 2 **continua sendo um** *recurso abundante* **pelo que o seu preço sombra continua nulo** ($x_5=1$, $y_2=0$).
no novo plano também sobra 1 hora da Operação 2

– **O** Recurso 3 **passa de** *recurso escasso* **para** *recurso abundante* **pelo que o seu preço sombra cai até zero** ($x_6=2$, $y_3=0$).
No novo plano sobram agora 2 horas da Operação 3, e o seu preço sombra cai de 1 ***até zero*** ($y_3=1 \rightarrow y_3=0$)

O lucro total $z^* = c_3 x_3 = 3 \cdot 5 =$ 15 mil Meticais $= b_1 y_1 = 5 \cdot 3 = w^*$

Pós-Optimização. Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o.

c) Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se o lucro unitário do Produto 1 passa de 5 a 7 mil Meticais.

$$c_1 \rightarrow c_1 + \Delta c_1 = 5 + 2 = 7$$

	c_j	5	4	3	0	0	0	
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

	c_j	7	4	3	0	0	0	
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
7	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-7	0	-5	0	$\boxed{1}$	17

Como a solução admissível primal deixa de ser óptima (existe um custo reduzido positivo) pode ser aplicado <u>o algoritmo primal Simplex</u> para determinar uma nova solução óptima .

Pós-Optimização. Exemplo.
Alteração dos coeficientes da f.o.

$X^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2)$

$Y^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$

$x_1 . y_4 = 5/2 \times 1 = 0$	$x_4 . y_1 = 0 \times 7/2 = 0$
$x_2 . y_5 = 0 \times 13/2 = 0$	$x_5 . y_2 = 1 \times 0 = 0$
$x_3 . y_6 = 0 \times 1/2 = 0$	$x_6 . y_3 = 1/2 \times 0 = 0$

	c_j	7	4	3	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
7	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	z_j	7	11	3	5	0	-1	17
	$c_j - z_j$	0	-7	0	-5	0	1	
7	x_1	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2
0	x_5	0	-5	0	- 2	1	0	1
0	x_6	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2
	z_j	7	21/2	7/2	7/2	0	0	35/2
	$c_j - z_j$	0	-13/2	-1/2	-7/2	0	0	

Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$, $z^*=13$
$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

O lucro unitário do produto 1 passa de 5 *para* 7 mil Meticais

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2)$, $z^*=17{,}5$
$Y^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$

• Referente à produção:

Ao incrementar o lucro unitário do produto 1 de 5 mil Meticais para 7 mil Meticais, o novo plano óptimo:

– **contempla a produção diária de 2,5 unidades do produto 1**
evidentemente a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 1 é nula **($y_4=0$)**

– **não contempla a produção dos produtos 2 e 3**
as perdas de oportunidade da produção duma unidade do produto 2 e do produto 3 são positivas e iguais a 6,5 mil Meticais e 0,5 mil Meticais respectivamente **($y_5=13/2$, $y_5=1/2$).**

Economicamente é vantajoso **este incremento do lucro unitário do produto 1, pois obtém-se um incremento de** 4,5 mil Meticais **no lucro total diário.**

Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$, $z^*=13$
$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

O lucro unitário do produto 1 passa de 5 *para* 7 mil Meticais

Plano óptimo depois do incremento

$X^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2)$, $z^*=17{,}5$
$Y^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$

- Referente aos recursos:
  - **O** recurso 1 **continua sendo um** *recurso escasso* **e o seu preço sombra aumenta de 1 para 3,5 mil Meticais por h/dia (x_4=0, y_1=7/2).**
    a capacidade de produção da operação 1 mantém-se esgotada, sendo utilizada ao seu nível máximo disponível para a produção de um único produto: o produto 1 (2 h/dia * 2,5 unidades do produto 3 =5 h/dia)
  - **O** recurso 2 **continua sendo um** *recurso abundante* **pelo que o seu preço sombra continua nulo (x_5=1, y_2=0).**
    no novo plano também sobra 1 hora da operação 2
  - **O** recurso 3 **passa de** *recurso escasso* **para** *recurso abundante* **pelo que o seu preço sombra é agora nulo (x_6=1/2, y_3=0).**
    no novo plano sobram agora 0,5 horas da operação 3, e o seu preço sombra cai de 1 ***até zero*** ($y_3=1 \rightarrow y_3=0$)

O lucro total $z^* = c_1 x_1 = 7 \cdot 2{,}5 =$ 17,5 mil Meticais $= b_1 y_1 = 5 \cdot 3{,}5 = w^*$