UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
Departamento de Mecânica

Correcção do 1º Teste de Optimização
02 de Outubro de 2024
(120 minutos)

Problema 1 (5 valores)
Uma empresa de estampagem fabrica saladeiras e tigelas de aço inoxidável. Para isso, utiliza como matéria-prima chapas de aço de tamanho único. Com cada chapa podem-se estampar uma saladeira e duas tigelas, ou então seis tigelas. A firma vende cada saladeira a 800 Meticais e cada tigela a 300 Meticais. Cada chapa custa 600 Meticais. Os restantes custos são fixos. Sabe-se por experiência passada que não se conseguem vender mais do que quatro tigelas por cada saladeira. O número total de chapas disponíveis é de 680. Deseja-se conhecer a quantidade a produzir de cada artigo de modo a maximizar o lucro. Formule e resolva o problema de programação linear pelo Método Gráfico

Passos para a formulação do problema:

Definição das variáveis:

x_1 = número de saladeiras produzidas.

x_2 = número de tigelas produzidas.

Função Objectivo:

Queremos maximizar o lucro da empresa. O lucro por chapa é obtido com base no valor de venda de saladeiras e tigelas, subtraindo o custo da chapa.

- Cada saladeira gera 800 Meticais.

- Cada tigela gera 300 Meticais.

- Cada chapa custa 600 Meticais.

Como o lucro depende da quantidade de saladeiras e tigelas que são feitas a partir das chapas, a função lucro será:

$$\text{Lucro} = 800x_1 + 300x_2 - 600 \cdot \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} \right)$$

Ou seja, a função objetivo simplificada será:

$$Z = 200x_1 + 100x_2$$

Restrições:

Para cada saladeira, podemos vender no máximo 4 tigelas, então:

$$x_2 \leq 4x_1$$

O número total de chapas disponíveis é de 680. Como cada chapa pode estampar 1 saladeira e 2 tigelas ou 6 tigelas, temos a restrição baseada no número de chapas:

$$x_1 + \frac{x_2}{2} \leq 680$$

- As quantidades de produção não podem ser negativas:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Modelo de Programação Linear:

Maximizar:

$$Z = 200x_1 + 100x_2$$

Sujeito a:

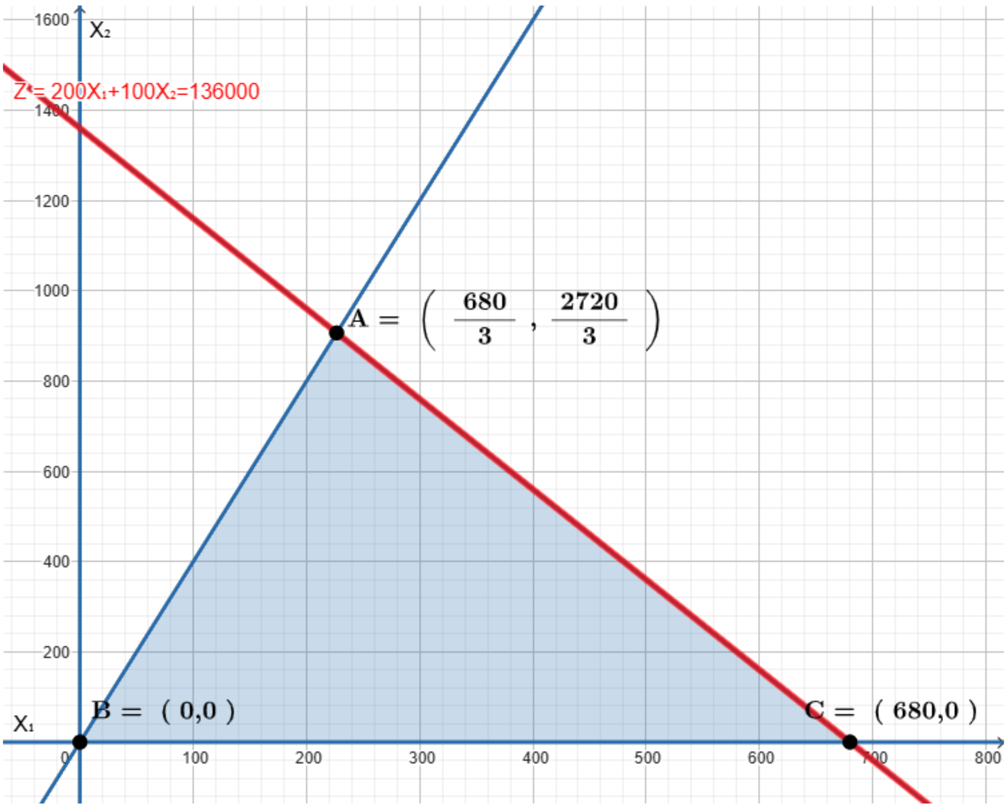
$$x_2 \leq 4x_1$$

$$x_1 + \frac{x_2}{2} \leq 680$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Método Gráfico:

Para encontrar a solução óptima:



Conclusão:

Pontos	Coordenadas	Valor da Função Objectivo $200X_1 + 100X_2$
A	**(680/3,2720/3)**	**200(680/3)+ 100(2720/3) = 136000**
B	**(0,0)**	**200(0)+ 100(0) = 0**
C	**(680,0)**	**200(680)+ 100(0) = 136000**

O lucro máximo de 136 000 Meticais é obtido ao produzir aproximadamente 226 saladeiras e 906 tigelas x_1 aproximadamente 226,67, x_2 aproximadamente 906,67, ou ao produzir somente 680 saladeiras.

Portanto, a empresa pode escolher qualquer uma dessas combinações para maximizar o seu lucro em 136,000 Meticais.

Problema 2 (5 Valores)

Uma fábrica produz dois tipos de produtos, A e B, que devem ser fabricados a partir de dois recursos diferentes, R1e R2. A quantidade disponível de cada recurso é limitada, e cada tipo de produto utiliza esses recursos em diferentes quantidades.

Dados do Problema:

- Cada unidade do **produto A** consome 2 unidades de R1 e 1 unidade de R2.
- Cada unidade do **produto B** consome 1 unidade de R1e 2 unidades de R2.
- O lucro por unidade do **produto A** é de 40 Meticais, e o lucro por unidade do **produto B** é de 50 Meticais.

A fábrica tem disponíveis:

- 100 unidades de R1.
- 80 unidades de R2.

Além disso, devido a compromissos comerciais, a fábrica é obrigada a produzir pelo menos 10 unidades de cada produto.

Resolva o problema pelo método Simplex de forma a maximizar o lucro total da fábrica, considerando as limitações de recursos e os compromissos mínimos de produção.

Maximizar o lucro:

$Z=40x_1+50x_2$

Sujeito a:

1. $2x_1+x_2\leq100$
2. $x_1+2x_2\leq80$
3. $x_1\geq10$
4. $x_2\geq10$
5. $x_1\geq0$, $x_2\geq0$ (Não negatividade)

Passando a forma padrão:

$Z=40x_1+50x_2$

1. $2x_1+x_2+x_3=100$
2. $x_1+2x_2+x_4=80$
3. $x_1-x_5+x_7=10$
4. $x_2-x_6+x_8=10$
5. $x_1\geq0$, $x_2\geq0$ (Não negatividade)

Fazendo o quadro Simplex:

	Cj	0	0	0	0	0	0	1	1		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	
0	x_3	2	1	1	0	0	0	0	0	100	50
0	x_4	1	2	0	1	0	0	0	0	80	80
1	x_7	1	0	0	0	-1	0	1	0	10	10
1	x_8	0	1	0	0	0	-1	0	1	10	
	Z_j	1	1	0	0	-1	-1	1	1	20	
	C_j-Z_j	1	1	0	0	-1	-1	0	0		

	Cj	0	0	0	0	0	0	1	1		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	
0	x_3	0	1	1	0	2	0	-2	0	80	80
0	x_4	0	2	0	1	1	0	-1	0	70	35
0	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	10	
1	x_8	0	1	0	0	0	-1	0	1	10	10
	Z_j	0	1	0	0	0	-1	0	1	10	
	C_j-Z_j	0	1	0	0	0	-1	-1	0		

	Cj	0	0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
0	x_3	0	0	1	0	2	1	-2	-1	70
0	x_4	0	0	0	1	1	2	-1	-2	50
0	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	10
0	x_2	0	1	0	0	0	-1	0	1	10
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	0	0	0	0	0	0	-1	-1	

	Cj	40	50	0	0	0	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	
0	x_3	0	0	1	0	2	1	-2	-1	70	-70
0	x_4	0	0	0	1	1	2	-1	-2	50	-25
40	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	10	
50	x_2	0	1	0	0	0	-1	0	1	10	10
	Z_j	40	50	0	0	-40	-50	40	50	900	
	C_j-Z_j	0	0	0	0	40	50	-40	-50		

	Cj	40	50	0	0	0	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	
0	x_3	0	0	1	0	2	1	-2	-1	70	70
0	x_4	0	0	0	1	1	2	-1	-2	50	25
40	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	10	
50	x_2	0	1	0	0	0	-1	0	1	10	-10
	Z_j	40	50	0	0	-40	-50	40	50	900	
	C_j-Z_j	0	0	0	0	40	50	-40	-50		

	Cj	40	50	0	0	0	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	
0	x_3	0	0	1	-0,5	1,5	0	-1,5	0	45	30
0	x_6	0	0	0	0,5	0,5	1	-0,5	-1	25	50
40	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	10	-10
50	x_2	0	1	0	0,5	0,5	0	-0,5	0	35	70
	Z_j	40	50	0	25	-15	0	15	0	2150	
	C_j-Z_j	0	0	0	-25	15	0	-15	0		

	Cj	40	50	0	0	0	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
0	x_5	0	0	0,67	-0,33	1	0	-1	0	30
0	x_6	0	0	-0,33	0,67	0	1	0	-1	10
40	x_1	1	0	0,67	-0,33	0	0	0	0	40
50	x_2	0	1	-0,33	0,67	0	0	0	0	20
	Z_j	40	50	10	20	0	0	0	0	2600
	C_j-Z_j	0	0	-10	-20	0	0	0	0	

A solução óptima do problema é:

- Produzir 40 unidades do produto A.
- Produzir 20 unidades do produto B.

O lucro máximo que a fábrica pode obter é de **2.600 Meticais**.

Esta solução satisfaz todas as restrições impostas, incluindo o consumo de recursos e a produção mínima de 10 unidades de cada produto.

Problema 3 (5 valores)

Problema Primal

Variáveis de decisão:

- x_1: Quantidade de ração R1 a ser produzida (toneladas)
- x_2: Quantidade de ração R2 a ser produzida (toneladas)

Função Objectivo: O objectivo é maximizar o lucro total:

$Z=1000x_1+1500x_2$

onde 1000 e 1500 são os lucros por tonelada de R1 e R2, respectivamente.

Restrições de disponibilidade de ingredientes:

- **Milho:** Cada tonelada de R1 requer 2 toneladas de milho, e cada tonelada de R2 requer 1 tonelada de milho. O total disponível é 400 toneladas:

$2x_1+x_2\leq 400$

- **Farelo de soja:** Cada tonelada de R1 requer 1 tonelada de farelo de soja, e cada tonelada de R2 requer 3 toneladas de farelo de soja. O total disponível é 300 toneladas:

$x_1+3x_2\leq 300$

- Não negatividade:

$x_1\geq 0, x_2\geq 0$

Problema Dual

Agora, formulamos o **problema dual**, que nos ajudará a interpretar o valor econômico dos recursos disponíveis (milho e farelo de soja).

Variáveis de decisão (dual):

- y_1: Preço sombra associado à restrição de milho.
- y_2: Preço sombra associado à restrição de farelo de soja.

Função Objectivo (dual): O objectivo é minimizar o valor económico dos recursos:

$W=400y_1+300y_2$

Restrições (dual): Cada restrição do primal se torna uma inequação no dual. A relação entre as quantidades de ração e o lucro define essas inequações:

- Para R1: O custo dos recursos necessários para produzir R1 (2 toneladas de milho e 1 tonelada de farelo de soja) deve ser no máximo 1000 (lucro de R1):

$2y_1+y_2\geq 1000$

Para R2: O custo dos recursos necessários para produzir R2 (1 tonelada de milho e 3 toneladas de farelo de soja) deve ser no máximo 1500 (lucro de R2):

$y_1+3y_2 \geq 1500$

Não negatividade:

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

Resolução (Primal e Dual)

Usaremos um método de solução padrão, como o **Simplex**, para resolver o problema primal e dual.

1. **Problema Primal:**
   Resolver o primal directamente nos fornece as quantidades óptimas de x_1 (ração R1) e x_2 (ração R2).

2. **Problema Dual:**
   Resolver o dual nos dá os valores de y_1 e y_2, que representam os valores económicos dos recursos milho e farelo de soja.

Vou resolver o problema primal e o dual e em seguida fornecer a solução numérica e interpretação económica.

Vou calcular isso para você.

Solução do Problema Primal:

$Z=1000x_1+1500x_2$

$2x_1+x_2 \leq 400$

$x_1+3x_2 \leq 300$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Forma padrão:

$Z=1000x_1+1500x_2$

$2x_1+x_2+x_3=400$

$x_1+3x_2+x_4=300$

$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$

Resolvendo o Simplex

	Z	1000	1500	0	0		
C_j	X	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
0	x_3	2	1	1	0	400	400
0	x_4	1	3	0	1	300	100
	Z_j	0	0	0	0	0	
	C_j-Z_j	1000	1500	0	0		

	Z	1000	1500	0	0		
C_j	X	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
0	x_3	1,67	0	1	-0,33	300	180
1500	x_2	0,33	1	0	0,33	100	300
	Z_j	500	1500	0	500	150000	
	Cj-Zj	500	0	0	-500		

	Z	1000	1500	0	0	
C_j	X	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1000	x_1	1	0	0,6	-0,2	180
1500	x_2	0	1	-0,2	0,4	40
	Z_j	1000	1500	300	400	240000
	C_j-Z_j	0	0	-300	-400	

A solução do problema primal indica que, para maximizar o lucro da fazenda, devem ser produzidas:

- x_1=180 toneladas de ração R1,
- x_2=40 toneladas de ração R2.
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 0$

O lucro total maximizado será:

Z=240000 Meticais.

Solução do Problema Dual:

Os preços sombra associados aos recursos (milho e farelo de soja) no dual são:

- y_3=0 Meticais por tonelada de milho,
- y_4=0 Meticais por tonelada de farelo de soja.
- y_1 =300
- y_2 = 400

Interpretação Económica:

1. **Primal:** A solução nos mostra que a produção de 180 toneladas de R1 e 40 toneladas de R2 esgota totalmente os recursos disponíveis (milho e farelo de soja). A função lucro é maximizada em 240 000 Meticais por mês.
2. **Dual:** Os preços sombra dos recursos milho e farelo de soja são zero. Isso significa que, dado o uso actual dos recursos, há uma folga no sistema, e o valor económico adicional de mais

uma tonelada de milho ou farelo de soja não aumentaria o lucro (isto é, os recursos não são escassos ao ponto de gerar um valor adicional).

Problema 4 (5 valores)

Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned}&Maximize\ z = 2x_1 + 4x_2\\&s.a.\\&3x_1 + 5x_2 \le 15\\&x_1 + 4x_2 \le 8\\&x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Maximize\ z = 2x_1 + 4x_2\\&s.a.\\&3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15\\&x_1 + 4x_2 + x_4 = 8\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{aligned}$$

	cj	2	4	0	0		
	xj	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**b**	
0	x3	3	5	1	0	15	3
0	x4	1	4	0	1	8	2
	z	0	0	0	0	0	
	c-z	2	4	0	0		

	c_j	2	4	0	0		
	x_j	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**b**	
0	x_3	1.75	0	1	-1.25	5	2.9
4	x_2	0.25	1	0	0.25	2	8
	z	1	4	0	1	8	
	c-z	1	0	0	-1		

cj	2	4	0	0	

	x_j	**x_1**	x_2	x_3	x_4	**b**
2	x_1	1	0	0.57	-0.71	2.86
4	x_2	0	1	-0.14	0.43	1.29
	z	2	4	0.57	0.29	10.86
	c-z	0	0	-0.57	-0.29	

Z=10,86   X=(2,86,1,29,0,0)

Os Docentes:
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu & Engª Isaura Tobela, MSc