Optimização

Aula 23

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

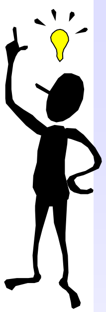
Programação Dinâmica

Aula 23: Programação Dinâmica

- Programação Dinâmica Determinística; e
- Programação Dinâmica Probabilística.

Programação Dinâmica

O que é a Programação Dinâmica?



A Programação Dinâmica é uma técnica matemática útil para criar uma sequencia de decisões inter-relacionadas. Ela fornece um procedimento sistemático para determinar a combinação de decisões óptimas. Ao contrário da Programação Linear, não existe uma formulação matemática padrão do problema de programação dinâmica. Em vez disso a programação dinâmica é um tipo genérico de metodologia para a resolução de problemas e as equações particulares usadas têm que ser desenvolvidas para cada situação.

Programação Dinâmica

Que tipos de problemas de Programação Dinâmica existem?

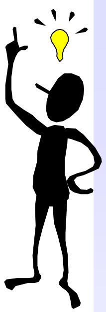
Os problemas de Programação Dinâmica podem se dividir em de:

Programação Dinâmica Determinística; e

Programação Dinâmica Probabilística.

Programação Dinâmica

Quais são as características básicas da Programação Dinâmica?



1. O problema pode ser dividido em estágios, nos quais uma decisão sobre a política a ser adoptada é necessária a cada estágio.

2. Cada estágio possui um número de estados associados ao início desse estágio.

3. O efeito da decisão sobre a política a ser adoptada em cada estágio é o de transformar o estado actual em um estado associado ao início do estágio seguinte.

Programação Dinâmica

4. O procedimento de resolução é desenhado para encontrar uma política óptima para o problema como um todo, isto é, estender a fórmula de decisão sobre a política óptima em cada estágio para cada um dos estágios possíveis.

5. Dado o estado actual uma política óptima para os estágios restantes é independente das decisões sobre as políticas adoptadas nos estágios anteriores. Portanto a decisão imediata óptima depende somente do estado actual e não de como se chegou lá. Esse é o principio da optimalidade para a programação dinâmica.

Programação Dinâmica

6. O procedimento de resolução começa encontrando a política óptima para o último estágio. A política óptima para o último estágio prescreve a decisão sobre a política óptima para cada um dos possíveis estados naquele estágio.

7. Há uma relação recursiva que identifica a política óptima para o estágio n, dada a política óptima para o estágio n+1 ao início desse estágio.

8. A forma precisa da relação recursiva difere um pouco entre os problemas de programação dinâmica. Entretanto uma notação comum pode ser usada, como se sintetiza a seguir:

Notação (I)

- $n \rightarrow$, *designa o número* ***do Estágio Actual****.*

- $N \rightarrow$, *designa o* ***Número de Estágios****.*

- $s_n \rightarrow$, *designa o* ***Estado actual do Estágio n****.*

- $x_n \rightarrow$, *designa a variável de decisão para o* ***Estágio n****.*

- $x_n^* \rightarrow$, *designa o valor óptimo da variável de decisão (dado* s_n*).*

Notação (II)

$f_n(s_n,x_n)\rightarrow$, **Função de Transição** *(contribuição dos Estágios* $n, n+1, \ldots, N$ *para a função objectivo se o sistema começa no Estado* s_n *no Estágio n, a decisão imediata é* x_n *e as decisões óptimas são tomadas dai para frente)*

$f_n^*(s_n)=f_n^*(s_n,x_n^*)\rightarrow$, *Valor da Política Óptima para cada **Estágio**.*

Notação (III)

A relação Recursiva é dada por →

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n}\{f_n(s_n, x_n)\} \ ou \ f_n^*(s_n) = \min_{x_n}\{f_n(s_n, x_n)\}$$

$\boldsymbol{C_{SXn}}$→, *Valor dos encargos de transição entre* ***Estados****.*

Programação Dinâmica

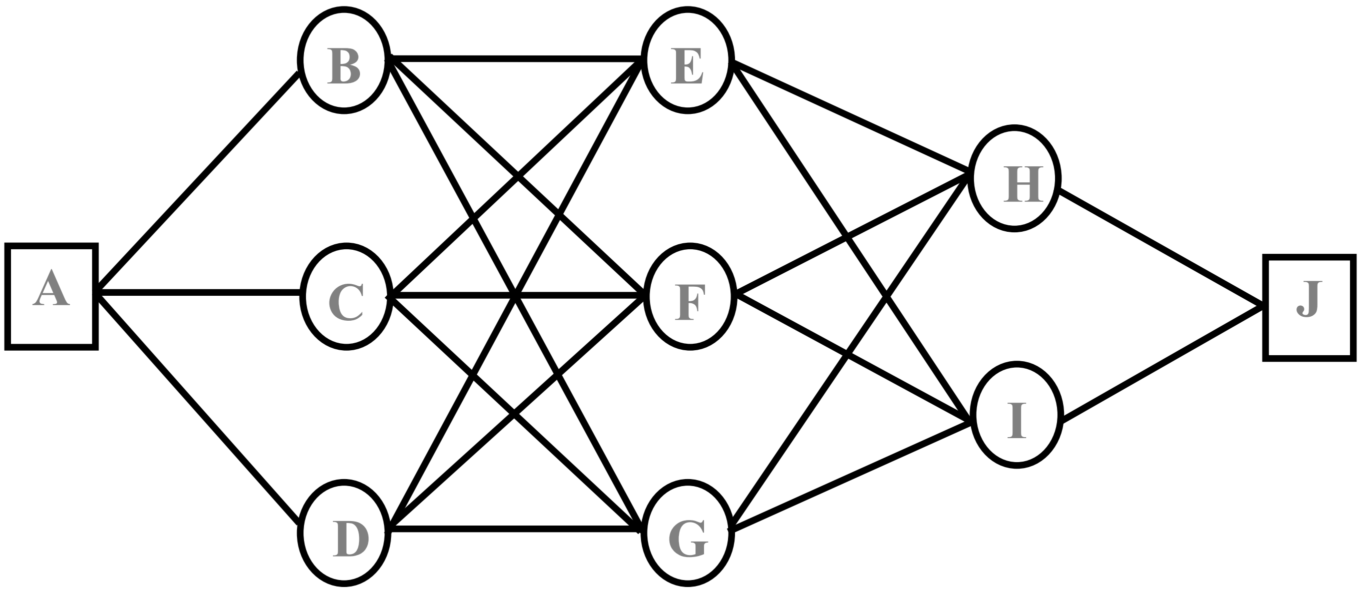
9. Quando se usa a relação recursiva o procedimento de solução começa no fim e vai voltando para trás estágio por estágio – cada vez encontrando a política óptima para aquele estágio - até ela encontrar a política óptima começando no estágio inicial.

10. Para todos os problemas de programação dinâmica uma tabela como se mostra a seguir será obtida a cada estágio:

s_n \ x_n	$f_n(s_n,x_n)=C_{SX_n}$	$f_n^*(s_n)$	x_n^*

Exemplo do Protótipo

Um aluno pretende ***minimizar*** o custo do transporte entre a sua residência e a faculdade utilizando vários meios de transporte disponíveis na rede seguinte:



O custo (*u.m.*) associado às ligações existentes traduz-se nas seguintes matrizes de transição:

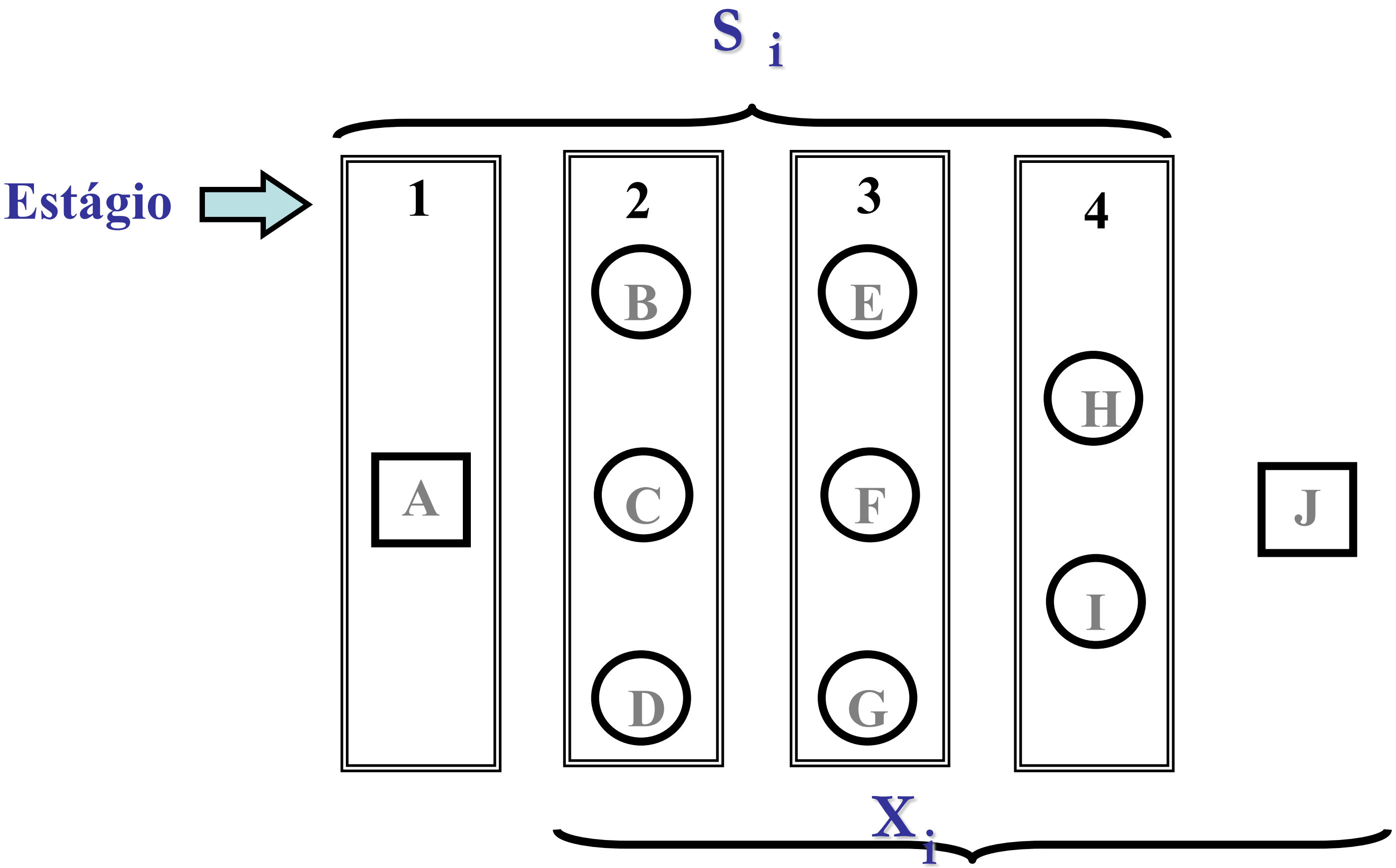
	B	C	D
A	1	3	2

	E	F	G
B	6	3	5
C	2	1	3
D	3	1	4

	H	I
E	1	3
F	5	2
G	2	2

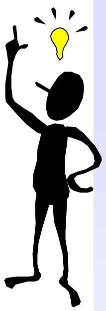
	J
H	2
I	3

Sendo a casa do aluno o ponto inicial do percurso e a faculdade o ponto final tem-se quatro estágios ($n = 4$) como mostra a figura.



Exemplo do Protótipo

Como solucionar o problema?



Observe-se primeiramente que a metodologia de visão limitada de seleccionar a viagem mais barata oferecida por estágio sucessivo não conduz necessariamente a uma solução óptima global. Seguir essa estratégia resultaria na rota $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$, a um custo total igual a 9. Entretanto, sacrificar um pouco em um estágio pode vir a permitir maiores economias mais a frente, por exemplo $A \rightarrow D \rightarrow F$ é no geral mais barato que $A \rightarrow B \rightarrow F$.

Exemplo do Protótipo

Como se faz a **formulação** do problema?

Faça-se as variáveis de decisão x_n (n=1,2,3,4) como destino imediato no estágio n (a n-ésima viagem que pode ser realizada). Logo a rota seleccionada é $A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ em que x_4=J.

Façamos ***$f_s(s, x_n)$*** o custo total da melhor rota como um todo para os estágios restantes dado que o estudante se encontra no estado **s** pronto para iniciar o **estado n** e selecciona **x_n** como seu destino imediato.

Exemplo do Protótipo

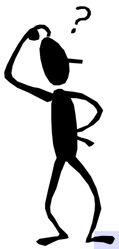
Sendo $\mathbf{c_{sxn}}$ o custo de transporte associado à decisão $\mathbf{x_n}$, quando o aluno se encontra no Estado $\mathbf{S_n}$ esta relação recursiva é da forma:

$$f_n^*(s) = \min_{x_n}\left\{C_{SX_n} + f_{n+1}^*(x_n)\right\}$$

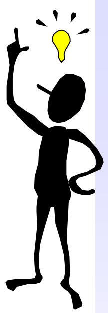
O cálculo da solução óptima é feito pela ordem:

$$f_n^*(4), f_n^*(3), f_n^*(2), f_n^*(1)$$

Exemplo do Protótipo



Qual o procedimento de **resolução** do problema?

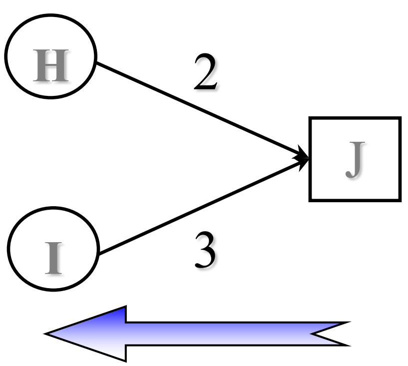


Quando estudante tiver apenas mais uma etapa a cumprir (n=4), daí em diante sua rota é determinada inteiramente pelo seu estado actual **s** (H ou então I) e seu destino final x_4=J. de modo que a rota final para a viagem do estudante seja s $\rightarrow$ J. Consequentemente já que $f_4^* = f_4(s, J) = c_{s,J}$

A solução imediata para o problema n=4 toma então o seguinte aspecto:

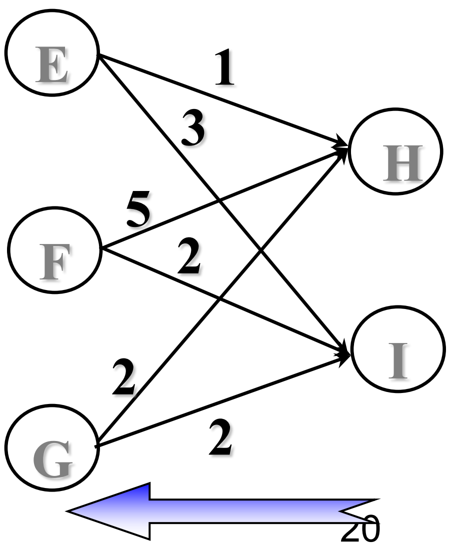
O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 4**:

S \ X_4	$f_4(S, X_4) = C_{SX_4}$	$f_4^*(S)$	X_4^*
	J		
H	**2**	**2**	**J**
I	**3**	**3**	**J**



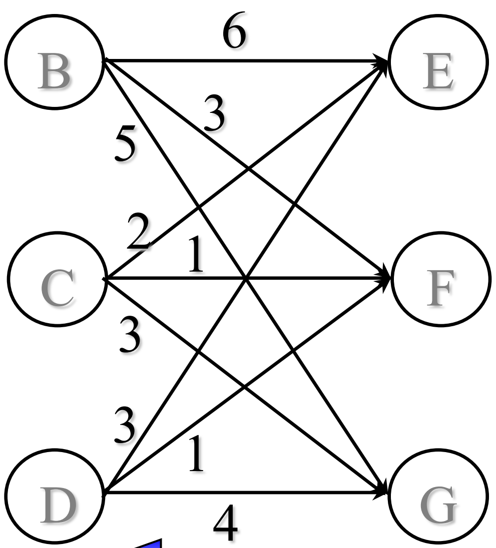
O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 3**:

$S \backslash X_3$	$f_3(S, X_3) = C_{SX_3} + f_4^*(S)$		$f_3^*(S)$	X_3^*
	H	**I**		
E	**1+2=3**	**3+3=6**	**3**	**H**
F	**5+2=7**	**2+3=5**	**5**	**I**
G	**2+2=4**	**2+3=5**	**4**	**H**

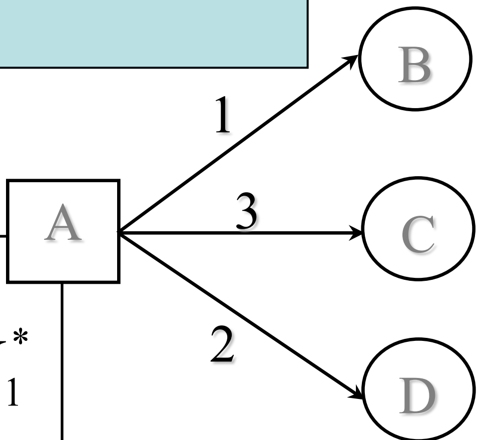


O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 2**:

$S \backslash X_2$	$f_2(S,X_2)=C_{SX_2}+f_3^*(S)$			$f_2^*(S)$	X_2^*
	E	**F**	**G**		
B	**6+3=9**	**3+5=8**	**5+4=9**	**8**	**F**
C	**2+3=5**	**1+5=6**	**3+4=7**	**5**	**E**
D	**3+3=6**	**1+5=6**	**4+4=8**	**6**	**E/F**



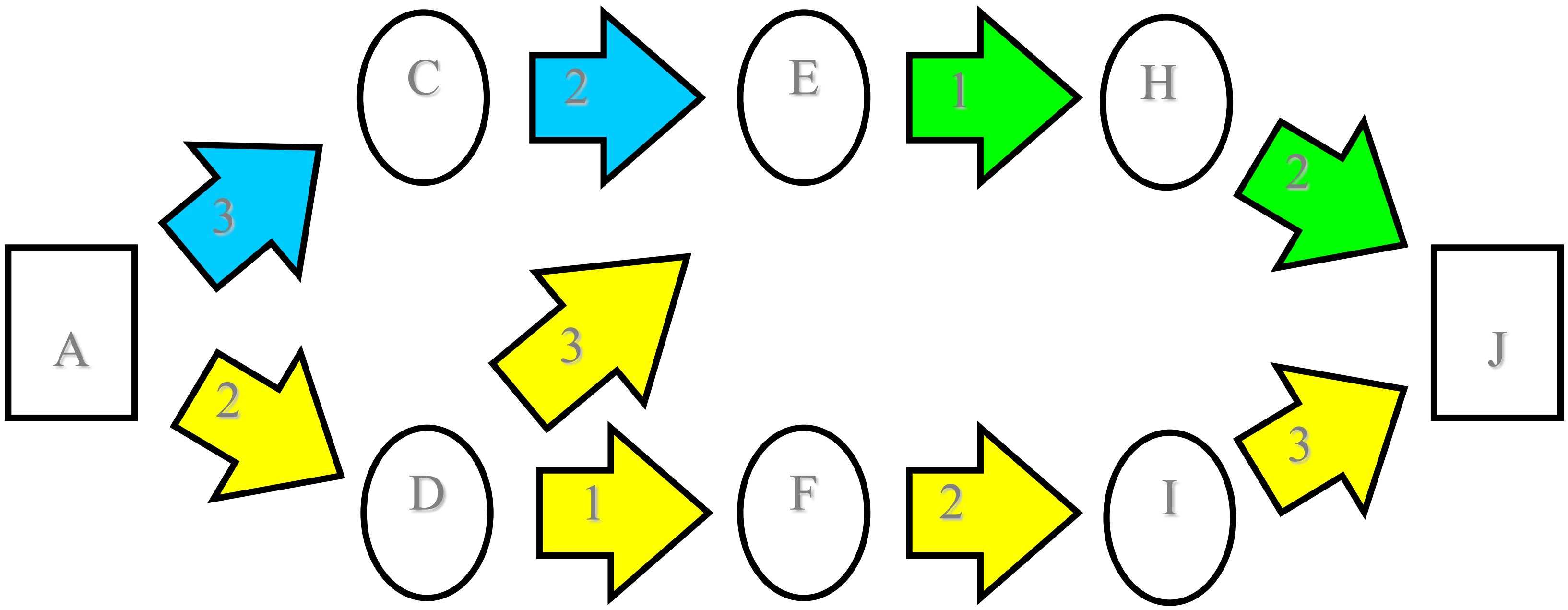
O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 1**:



S \ X_1	$f_1(S,X_1)=C_{SX_1}+f_2^*(S)$			$f_1^*(S)$	X_1^*
	B	**C**	**D**		
A	**1+8=9**	**3+5=8**	**2+6=8**	**8**	**C/D**

Podemos então concluir que a política óptima tem um custo total mínimo de = 8 *u.m.*

Problema com múltiplas soluções. Existem três caminhos distintos com o mesmo valor óptimo (com custo = 8 *u.m.*)



Problema de afectação múltipla (PD determinística e discreta)

- Um aluno está prestes a iniciar a sua época de exames em três cadeiras sendo de 3 dias o tempo disponível para preparação. Adicionalmente, o aluno durante um dia só estuda para um dos exames, por uma questão de método, e quer estar presente em todos eles.

•A previsão do aluno para a classificação em cada uma das cadeiras, em função do tempo (dias) de preparação para cada uma delas é a seguinte:

Dias \ Cadeiras	1	2	3
0	8	7	8
1	10	11	11
2	13	12	13
3	16	15	17

•O aluno pretende saber qual o plano de estudo (dias de estudo/cadeira) que ***maximizará*** a média das classificações dos exames.

- $x_n\left(n=1,2,3\right)$, as variáveis de decisão que representam o número de dias a estudar para cada estágio (exame) n;

- $s_n =$ número de dias de estudo disponíveis para o estágio (exame) n, que pode ser 0, 1, 2 ou 3;

- $c_i\left(x_i\right) =$ nota obtida à cadeira i com um estudo de x_i dias;

Objectivo do problema:

- escolher x_1, x_2, x_3 de forma a maximizar $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} c_i\left(x_i\right)$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 3$$

com $x_i \geq 0$ e inteiro

A contribuição dos estágios n, $n + 1$, … , N para a função objectivo é dada por:

$$f_n(s_n, x_n) = c_n(x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{N} c_i(x_i)$$

em que N representa o número de estágios (no nosso caso $N = 3$) com $\sum_{i=n}^{3} x_i = s_n$

e,

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n = 0,1,\ldots,s_n} f_n(s_n, x_n)$$

portanto,

$$f_n(s_n, x_n) = c_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$

Consequentemente a relação recursiva relativa às funções $f_1^*, f_2^*\ e\ f_3^*$ para este problema é

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\ldots,s_n} \{c_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\},\ para\ n = 1,2$$

Para o último estágio ($n = 3$) temos,

$$f_3^* = \max_{x_3=0,1,\ldots,s_3} c_3(x_3)$$

•O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 3 (cadeira 3)**:

$s_3 \backslash x_3$	$f_3(s_3, x_3) = C_3(x_3)$	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	**8**	**8**	**0**
1	**11**	**11**	**1**
2	**13**	**13**	**2**
3	**17**	**17**	**3**

•O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 2 (cadeira 2)**:

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = c_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2)$				$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	0	**1**	**2**	**3**		
0	$7+8=15$				**15**	**0**
1	$7+11=18$	$11+8=19$			**19**	**1**
2	$7+13=20$	$11+11=22$	$12+8=20$		**22**	**1**
3	$7+17=24$	$11+13=24$	$12+11=23$	$15+8=23$	**24**	**0 ou 1**

O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 1 (cadeira 1)**:

De notar que neste Estágio há 3 dias disponíveis

$S_1 = 3$

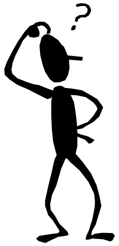
s_1 \ x_1	$f_1(s_1, x_1) = c_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1)$				$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	0	**1**	**2**	**3**		
3	$8 + 24 = 32$	$10 + 22 = 32$	$13 + 19 = 32$	$16 + 15 = 31$	**32**	**0 ou 1 ou 2**

•No quadro seguinte indicam-se as soluções óptimas de 32 valores acumulados:

Solução	Cadeira 1 (Dias)	Cadeira 2 (Dias)	Cadeira 3 (Dias)	Classificação Acumulada
I	0	0	3	8+7+17=32
II	0	1	2	8+11+13=32
III	1	1	1	10+11+11=32
IV	2	1	0	13+11+8=32

A política óptima é a que permite acumular 32 valores a que corresponde a média de $32/3 \approx 10,67$ valores.

Programação Dinâmica Probabilística

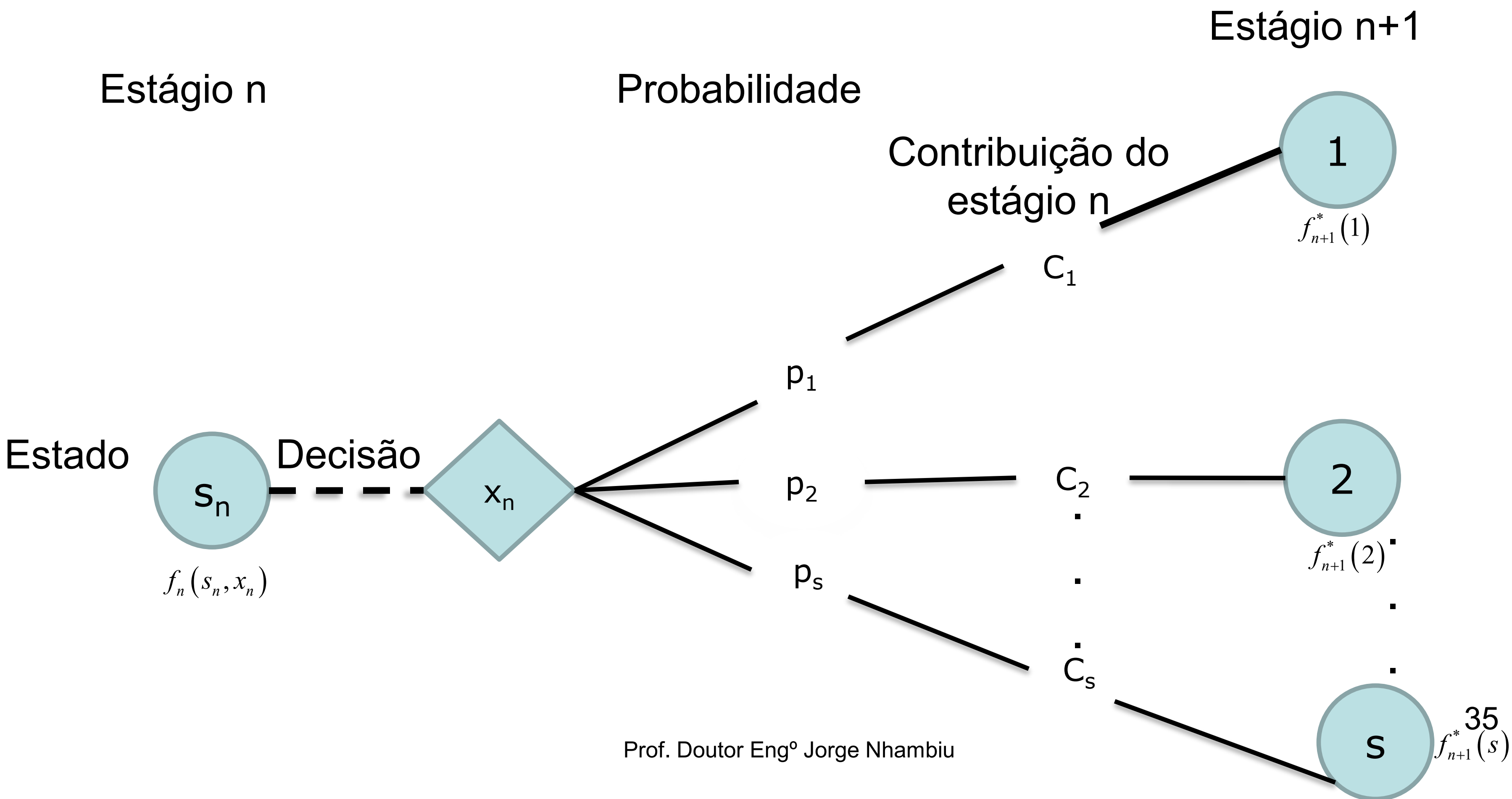


Em que difere a Programação Dinâmica Probabilística da Determinística?

A programação dinâmica probabilística difere da programação dinâmica determinística pelo facto do estado no estágio seguinte não ser completamente determinado pelo estado e pela decisão sobre a política a ser adoptada no estado actual. Em vez disso, há uma distribuição probabilística para qual deva ser o estado seguinte. Entretanto essa distribuição de probabilidades ainda é completamente determinada pelo estado e pela decisão sobre a política a ser adoptada do estágio actual.

Programação Dinâmica Probabilística

A estrutura básica resultante para a programação dinâmica probabilística é descrita em forma de diagrama na figura seguinte:



Programação Dinâmica Probabilística

No diagrama, S representa o número de estágios possíveis no estágio n+1 e designou-se esses estados do lado direito por 1,2,…,S. O sistema vai para o estágio i com a probabilidade p_i (i=1,2,…,S) dado o estado s_n e a decisão x_n . Se o sistema for para o estado i , C_i será a contribuição do estágio n à função objectivo.

Programação Dinâmica Probabilística

Para fins ilustrativos, suponhamos que o objectivo seja minimizar a soma esperada das contribuições de cada um dos estágios. Nesse caso, $f_n(s_n,x_n)$ representa a soma mínima esperada do estágio n em diante, dado que o estado e a decisão sobre a política a ser adoptada no estágio n sejam, respectivamente s_n e x_n, consequentemente:

$$f_n\left(s_n, x_n\right) = \sum_{i=1}^{S} p_i \left[C_i + f_{n+1}^*\left(i\right) \right]$$

com

$$f_{n+1}^*\left(i\right) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}\left(i, x_{n+1}\right)$$

Em que essa minimização é extraída dos valores viáveis de x_{n+1}

Problema de afectação múltipla (PD probabilística e discreta)

- Uma conhecida marca de automóveis pretende distribuir 5 viaturas por 3 vendedores da marca. A procura de automóveis em cada um dos concessionários é aleatória, de acordo com as seguintes distribuições de probabilidades:

Procura \ Vend.	1	2	3
0	0,3	0,2	0,5
1	0,4	0,3	0,2
2	0,2	0,2	0,1
3	0,1	0,3	0,2
Lucro (x 100 Dólares)	**200**	**210**	**220**

Objectivo do problema:

- Distribuir os veículos de forma a ***maximizar*** o lucro.
- $x_n(n = 1,2,3)$, as variáveis de decisão que representam o número de automóveis a distribuir por cada estágio (concessionário) *n*;
- **s_n=** número de automóveis disponíveis para o estágio (concessionário) *n*, que pode ser 0, 1, 2, 3, 4 ou 5;
- $c_i(x_i) =$ lucro esperado no concessionário *i* com uma atribuição de x_i veículos.

- Atendendo às probabilidades do quadro anterior, os valores dos lucros esperados são:

Automóveis \ Vendedores	1	2	3
0	0	0	0
1	140	168	110
2	200	189	176
3	220	336	220
4	220	336	220
5	220	336	220

Objectivo do problema:

- escolher x_1, x_2, x_3 de forma a maximizar $\sum_{i=1}^{3} c_i(x_i)$
- Sujeito a $$\sum_{i=1}^{3} x_i = 5$$
- com $x_i \geq 0$ e inteiro

Solução

Concessionário 1 (unidades)	Concessionário 2 (unidades)	Concessionário 3 (unidades)	Lucro Acumulado ($\times$100 euros)
1	3	1	$140+336+110=586$

Para x_1 * tem-se s_2=5-1=4, consultando o quadro do Estágio 2 para s_2=4 tem-se x_2* =3 . Considerando x_2*=3 obtém-se s_3= 4-3=1, que no quadro do Estágio 3 corresponde a x_3*=1. Portanto, esta solução traduz-se na distribuição de 1, 3 e 1 automóveis para os concessionários 1, 2 e 3, respectivamente, onde se obterão lucros de 140, 336 e 110 (×100 Dólares), respectivamente.

Problema de Programação Linear (PD determinística e contínua)

$$Max\ f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

s.a. $x_1 \leq 4$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Estágios
  - 1 – destinado a decidir o valor de x_1
  - 2 – destinado a decidir os valor de x_2

- Estados – dizem respeito à quantidade de recurso disponível para as restantes actividades.

Estágio 2

$$s_2 = \begin{bmatrix} 4 - x_1 \\ 12 \\ 18 - 3x_1 \end{bmatrix}$$

Estágio 1

$$s_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Função de Transição

•Num Estágio *n* o valor óptimo da função de transição será:

$$f_n^*\left(b_1, b_2, b_3\right) = \underset{x_n}{Max}\, f_n\left(b_1, b_2, b_3, x_n\right)$$

No estágio 2 (estágio inicial do cálculo) tem-se:

$$f_2^*\left(b_1, b_2, b_3\right) = \underset{\substack{2x_2 \le b_2 \\ 2x_2 \le b_3 \\ x_2 \ge 0}}{Max} \left(5x_2\right)$$

Função de Transição

No estágio 1 (estágio final do cálculo) tem-se:

$$f_1^*(4,12,18) = \underset{s.a.}{Max} \left\{3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)\right\}$$

$$x_1 \leq 4$$
$$3x_1 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0$$

Cálculo no Estágio 2

Sendo a variável de estado

$$s_2 = \begin{bmatrix} 4 - x_1 \\ 12 \\ 18 - 3x_1 \end{bmatrix}$$

então x_2^* deve satisfazer simultaneamente:

$$\begin{cases} 2x_2 \leq 12 \\ 2x_2 \leq 18 - 3x_1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pelo que o valor máximo de x_2 é igual a

$$Min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}$$

O quadro deste estágio é então:

Recursos restantes	$f_2^*(recursos\ restantes)$	x_2^*
$12 \geq 0$ $18-3x_1 \geq 0$	$5\times Min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}$	$Min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}$

Cálculo no Estágio 1

$$f_1^*(4,12,18) = \underset{\substack{x_1 \le 4 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1 \ge 0}}{Max} \left\{ \underbrace{3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)} \right\}$$

$$f_1^*(4,12,18) = \underset{\substack{x_1 \le 4 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0}}{Max} \left\{ \overbrace{3x_1 + 5 \times Min\left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}} \right\}$$

$$x_1 \leq 4$$

$$Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\} = \begin{cases} 6 \quad para \;\; 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 9-\frac{3}{2}x_1 \quad para \;\; 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$f_1^*(4,12,18) = \begin{cases} 3x_1 + 30 \quad para \;\; 0 \leq x_1 \leq 2 \rightarrow valor\ máximo = 36\ com\ x_1 = 2 \\ 45-\frac{9}{2}x_1 \quad para \;\; 2 \leq x_1 \leq 4 \rightarrow valor\ máximo = 36\ com\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$$f_1^* = 36 \qquad x_1^* = 2 \qquad x_2^* = Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\} = 6$$

Aplicações

- Caixeiro viajante
- Mochila
- Programação Linear e Não Linear
- Afectação Múltipla
- …