Optimização

Aula 19

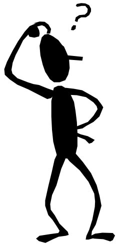
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Redes

Aula 19: Modelos de Optimização de Redes

- O Problema do Caminho Mais Curto.
- O Problema do Fluxo Máximo.
- O Problema do Fluxo de Custo Mínimo.

Modelos de Optimização de Redes

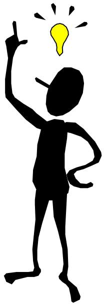


O que são redes em (IO)?

As redes surgiram em diversos ambientes e de muitas formas distintas. Redes de transporte, eléctricas e de comunicação são uma constante no nosso dia-a-dia. As representações em forma de rede são amplamente usadas em áreas tão diversas como ***produção, distribuição, planeamento de projectos, posicionamento de instalações administração de recursos e planeamento financeiro.***

Modelos de Optimização de Redes

Que tipos de problemas de redes existem?



Existem muitos problemas de redes, aqui serão abordados os seguintes:

O problema do caminho mais curto;

O problema do fluxo máximo;

O problema do fluxo do custo mínimo.

Exemplo do Protótipo

O Parque de Gorongoza foi reservado para visita e excursões limitadas. Não é permitido o ingresso de carros no parque, porém há um esquema de estradas estreitas e tortuosas por onde podem trafegar pequenos carros eléctricos e jipes dirigidos pelos guardas florestais. Esse sistema de estradas é apresentado sem as curvas na figura, na qual o lugar O é da entrada e as outras letras designam os lugares dos postos dos guardas florestais e outras instalações. Os números fornecem as distâncias em Quilómetros dessas estradas tortuosas.

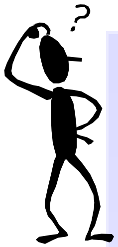
O parque tem uma vista panorâmica de destaque no ponto T. Um pequeno número de carrinhos é usado para levar e trazer visitantes da entrada do parque até ao ponto T.

A gestão do parque está a deparar actualmente com três problemas:

Exemplo do Protótipo

Determinar que rota da entrada do parque até ao ponto **T** tem a menor distância total para a operação dos carrinhos (este é o exemplo de caminho mais curto que será discutido).

Exemplo do Protótipo

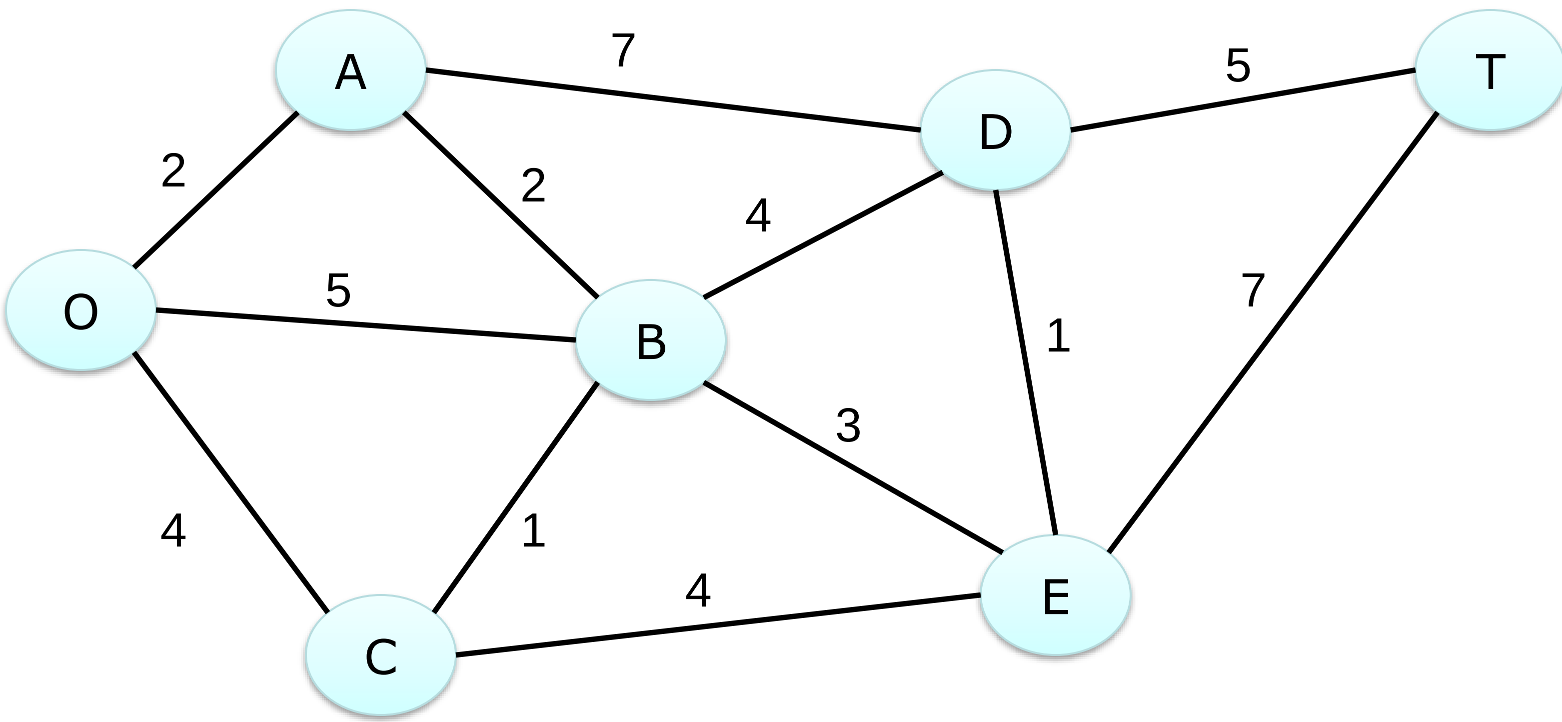


O segundo problema é que as linhas telefónicas que têm que ser instaladas sobre as vias para estabelecer comunicação telefónica em todos os postos inclusive na entrada do parque. Pelo facto da instalação ser cara e também prejudicial ao meio ambiente, as linhas serão somente instaladas num número de estradas suficientes para permitir uma conexão entre cada par de postos. A questão é onde as linhas deverão ser instaladas para que atendam a um total mínimo de quilómetros de linha instalada (este é o exemplo de problema de árvore de expansão mínima).

Exemplo do Protótipo

O terceiro problema é que um número maior de pessoas desejam utilizar o serviço de transporte do parque do que o que pode ser atendido durante a época de visita, o problema é: que número de rotas usar de modo a maximizar as viagens que poderiam ser feitas sem violar os limites em qualquer uma das viagens individualmente (este é o exemplo de problema de fluxo máximo).

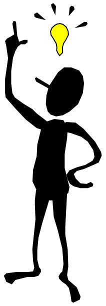
Exemplo do Protótipo



Sistema de pequenas estradas para o parque de Gorongoza

Modelos de Optimização de Redes

Como é formada uma rede ?



Uma rede é formada por um conjunto de pontos e rectas conectando certos pares de pontos:

Os pontos são chamados ***nós;***

As rectas são chamadas ***arcos;***

O arco é chamado ***arco direccionado*** se o fluxo for permitido só em um sentido e na sua extremidade adiciona-se uma seta indicando a direcção;

O arco é chamado ***arco não direccionado*** se o fluxo for permitido em ambos os sentidos.

Modelos de Optimização de Redes

Uma rede que possua somente ***arcos direccionados*** é chamada ***rede direccionada;***

Uma rede que possua somente ***arcos não direccionados*** é chamada ***rede não direccionada;***

Um ***caminho*** entre dois nós é uma sequencia de arcos distintos conectando esses nós;

Um ***caminho direccionado*** do nó ***i*** para o nó ***j*** é uma sequencia de arcos conectados cuja direcção (se houver) será no sentido do nó ***j*** de modo que o fluxo do nó ***i*** para o nó ***j*** seja viável;

Um ***caminho não-direccionado*** do nó ***i*** para o nó ***j*** é uma sequencia de arcos conectados cuja direcção (se houver) pode ser tanto no sentido como afastando-se do nó ***j***;

Modelos de Optimização de Redes

Um caminho que começa e termina no mesmo nó é chamado ***ciclo;***

Dois nós são ditos ***conectados*** caso a rede contenha pelo menos um caminho não conectado entre os nós;

Uma ***rede conectada*** é uma rede na qual todo o par de nós é conectado;

Cada arco novo cria uma ***árvore*** maior que é uma rede conectada (de algum subconjunto de ***n*** nós) que não contém nenhum ciclo não direccionado;

Uma ***árvore de expansão*** é uma rede conectada de todos os ***n*** nós que não contêm nenhum ciclo não direccionado;

Modelos de Optimização de Redes

A quantidade máxima de fluxo (possivelmente infinita) que pode ser transportada num arco direccionado é conhecida como ***capacidade do arco;***

Um ***nó de suprimento*** (ou nó de origem, ou simplesmente origem) tem a propriedade que o fluxo saindo do nó excede o fluxo de entrada no nó;

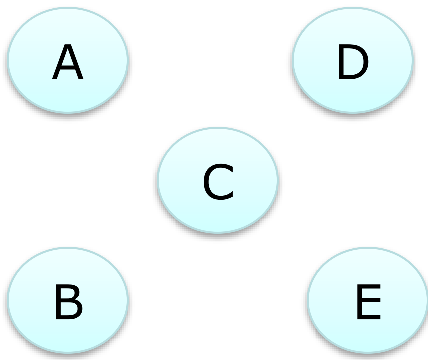
Um ***nó de demanda*** (ou nó escoador, ou simplesmente escoadouro) tem a propriedade que o fluxo que sai do nó não excede o fluxo que entra no nó;

Um ***nó transhipment*** (ou nó intermédio) satisfaz a conservação do fluxo de modo que o fluxo que entra no nó seja igual ao que sai do nó.

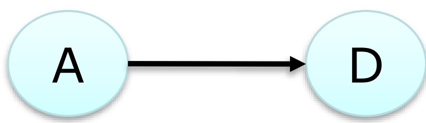
Modelos de Optimização de Redes

Nós	Arcos	Fluxo
Cruzamentos	Estradas	Carros
Aeroportos	Rotas	Aviões
Computadores	Fios / Canais	Mensagens
Estações de Elevação	Condutas	Fluidos
Postos de Trabalho	Rotas de tratamento de materiais	Tarefas

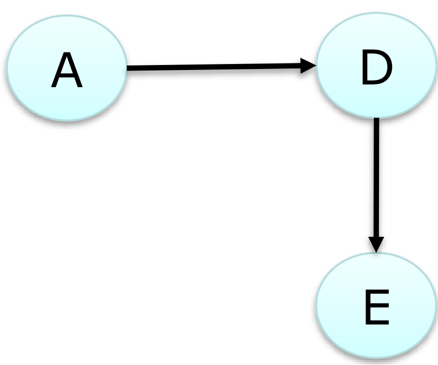
Modelos de Optimização de Redes



Nós sem arcos

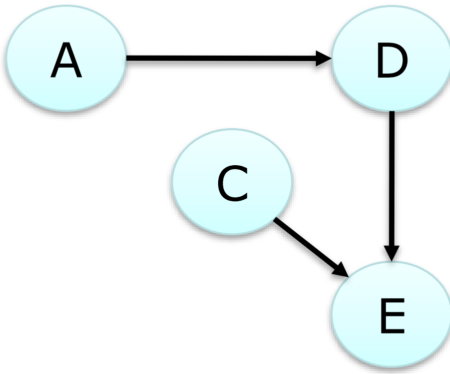


Uma árvore com um arco

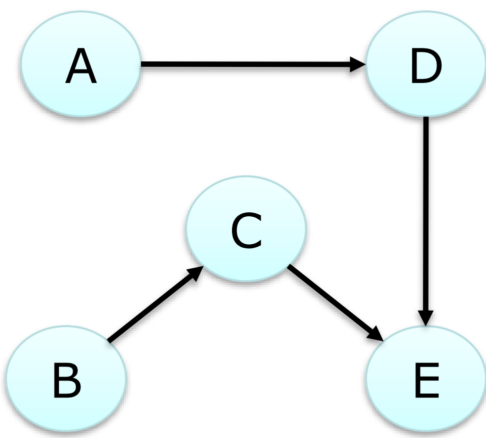


Uma árvore com dois arcos

Modelos de Optimização de Redes



Uma árvore com três arcos



Uma árvore de expansão

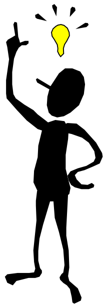
Modelos de Optimização de Redes

A essência do algoritmo é espalhar em todas as direcções a partir da origem, identificando sucessivamente o caminho mais curto para cada um dos nós da rede na ordem ascendente de suas distâncias (mais curtas) a partir da origem, e assim, solucionando o problema quando o nó de destino é atingido.

Objectivo da n-ésima iteração: encontrar o n-ésimo nó mais próximo da origem (a ser repetido para n = 1,2,… até ao n-esimo nó mais próximo ser o destino).

Entrada para a n-ésima iteração: n-1 nós mais próximos da origem (resolvido nas iterações anteriores) inclusive sua distância da origem e caminhos mais curtos. Esses nós, além da origem, serão chamados nós solucionados ; os demais serão os nós não solucionados.

Modelos de Optimização de Redes



Candidatos ao n-ésimo nó mais próximo:

cada nó solucionado que é conectado directamente por uma ligação a um ou mais nós não solucionados fornece um candidato-o nó não solucionado com a ligação de conexão mais curta. Empates fornecem candidatos adicionais.

Cálculo do n-ésimo nó mais próximo:

para cada nó assim solucionado e seu candidato, acrescente a distância entre eles e a distancia do caminho mais curto da origem até esse nó solucionado. O candidato com a menor distância total é o n-ésimo nó mais próximo (empates fornecem nós solucionados adicionais) e seu caminho mais curto é aquele gerando essa distância.

Modelos de Optimização de Redes

Algoritmo para o Problema da Árvore de Expansão Mínima:

1. Selecciona-se qualquer nó arbitrariamente e depois o conectasse (isto é, acrescenta-se uma ligação) ao nó distinto mais próximo.
2. Identifica-se o nó sem conexão que esteja mais próximo a um nó conectado e, em seguida, conectasse esses dois nós (isto é, acrescente uma ligação entre eles). Repete-se essa etapa até que todos os nós tenham sido conectados.
3. Desempate: Os empates para o nó distinto mais próximo (Passo 1) ou o nó não conectado mais próximo (Passo 2) podem ser desfeitos de forma arbitrária e o algoritmo ainda deve conduzir a uma solução óptima. Entretanto, tais empates são sinal de que podem existir (mas não necessariamente) soluções óptimas múltiplas.

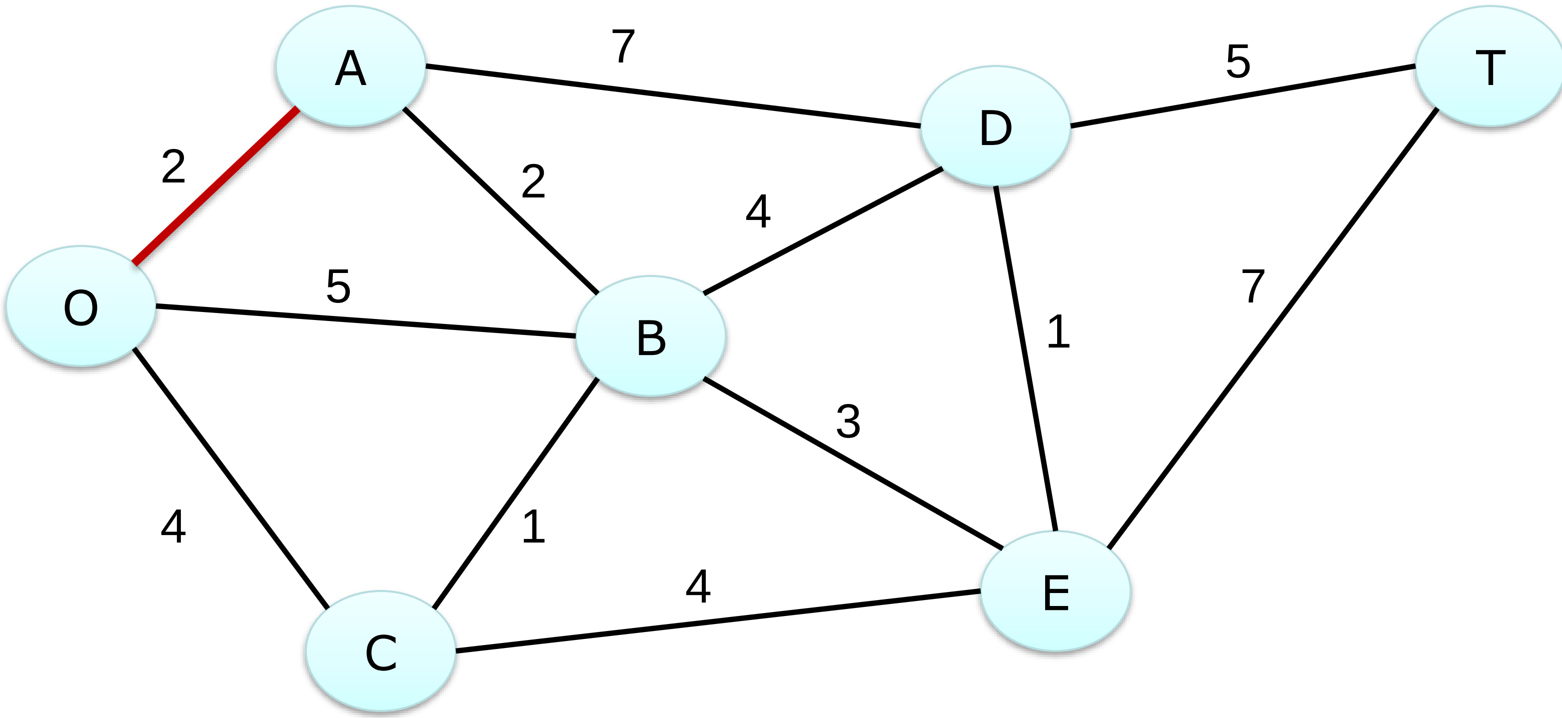
Modelos de Optimização de Redes

Algoritmo para o Problema da Árvore de Expansão Mínima:

Todas essas soluções óptimas podem ser eliminadas buscando-se todas as maneiras para se desempatar até sua conclusão. A maneira mais rápida de se executar esse algoritmo manualmente é a abordagem gráfica ilustrada a seguir. Aplicando este Algoritmo ao Problema da Árvore de Expansão Mínima do Parque de Gorongosa precisa-se determinar sob que vias as linhas telefónicas devem ser instaladas para conectar todos os postos com um comprimento total mínimo de linha. Usando-se os dados fornecidos na figura, descreve-se a solução passo a passo para esse problema. Nós e distâncias para o problema são sintetizados a seguir, em que as linhas finas representam. no momento, ligações potenciais.

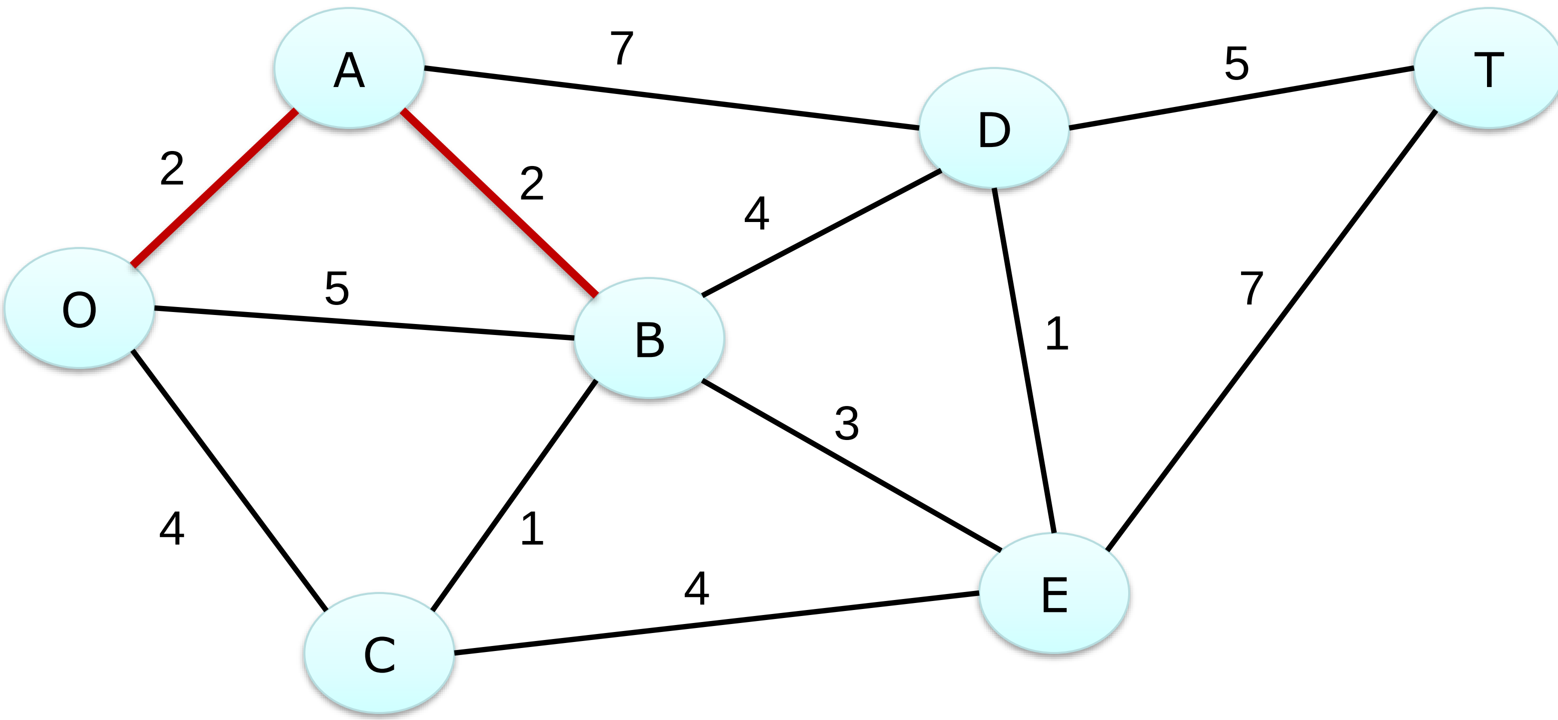
Exemplo do Protótipo

Começando arbitrariamente pelo nó O, o nó não conectado mais próximo do O é o nó A. Conecte-se o nó A ao nó O.



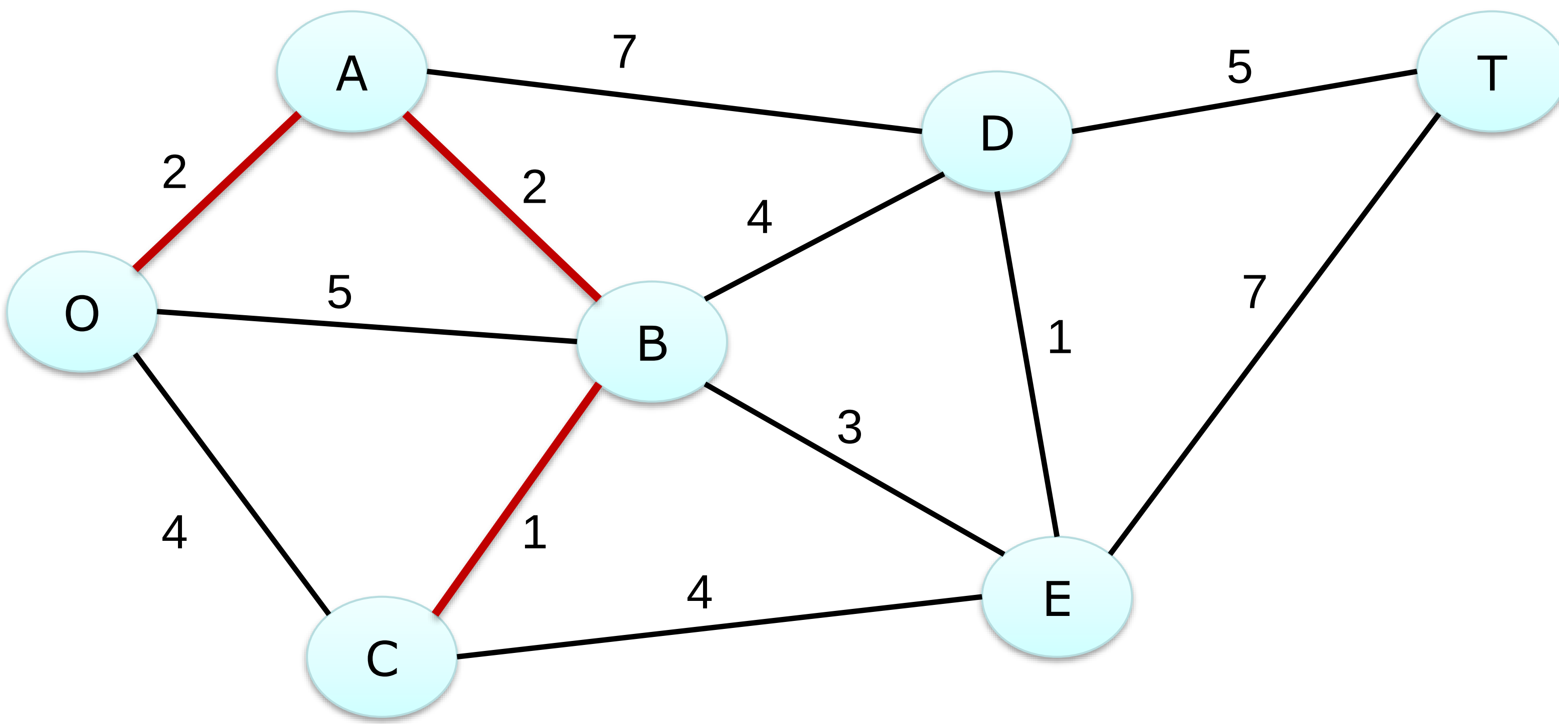
Exemplo do Protótipo

O nó não conectado mais próximo ao nó O ou nó A é o nó B (mais próximo de A) conecte-se o nó B.



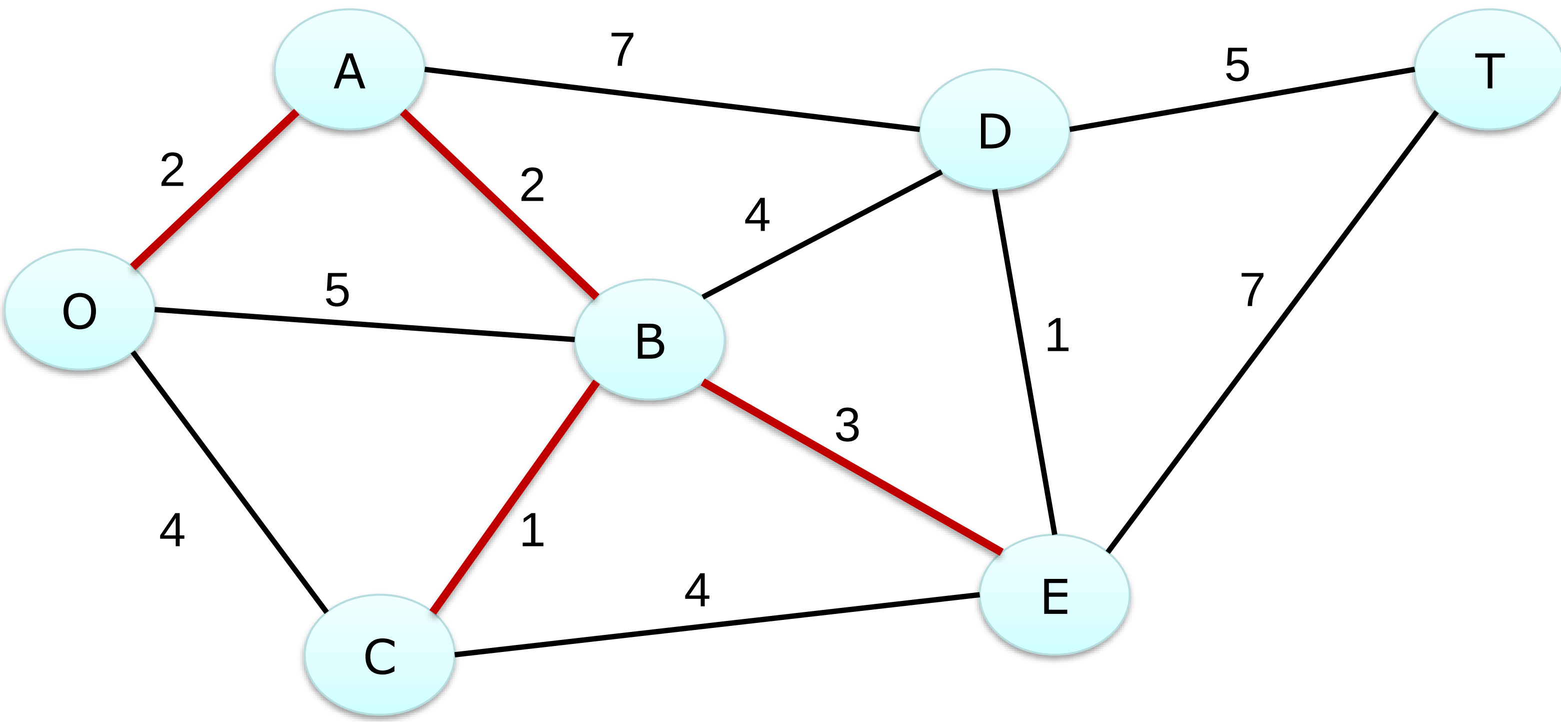
Exemplo do Protótipo

O nó não conectado mais próximo aos nós O, A ou B é o nó C (mais próximo de B) conecte-se o nó C ao nó B.



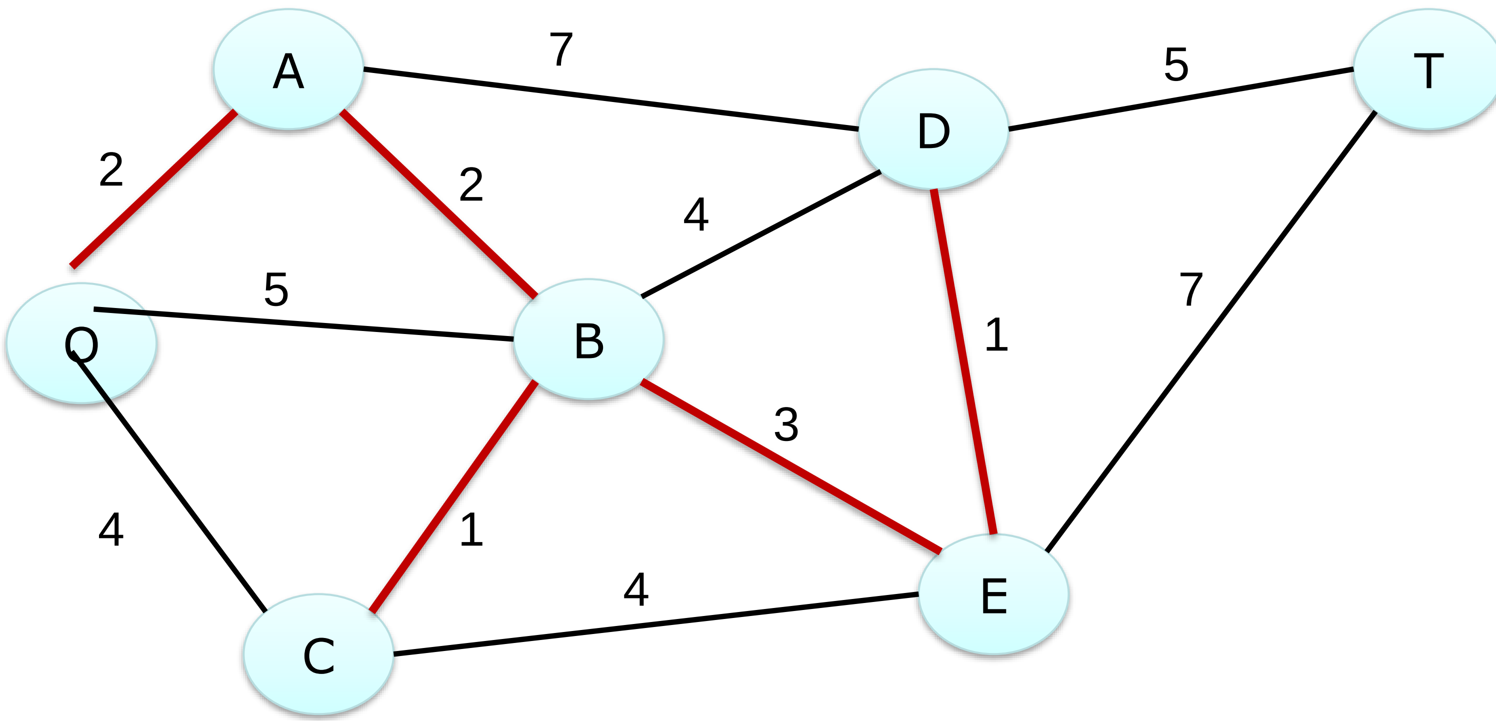
Exemplo do Protótipo

O nó não conectado mais próximo aos nós O, A, B ou C é o nó E (mais próximo de B) conecte-se o nó E ao nó B.



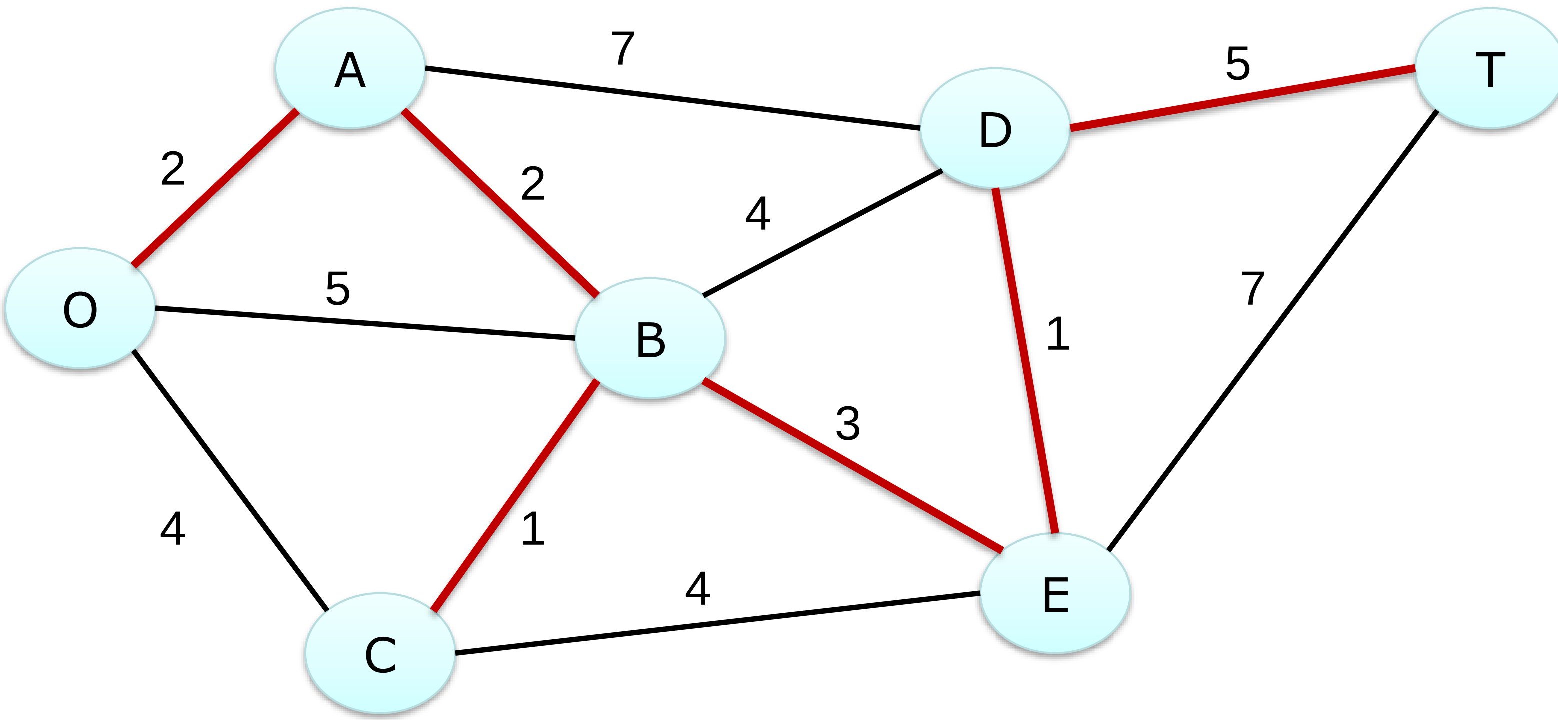
Exemplo do Protótipo

O nó não conectado mais próximo aos nós O, A, B, C ou E é o nó D (mais próximo de E) conecte-se o nó E ao nó D.



Exemplo do Protótipo

O único nó não conectado remanescente é o T. Ele se encontra mais próximo de D. Conecte-se o nó T ao D.



Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

O Problema do Caminho Mais Curto

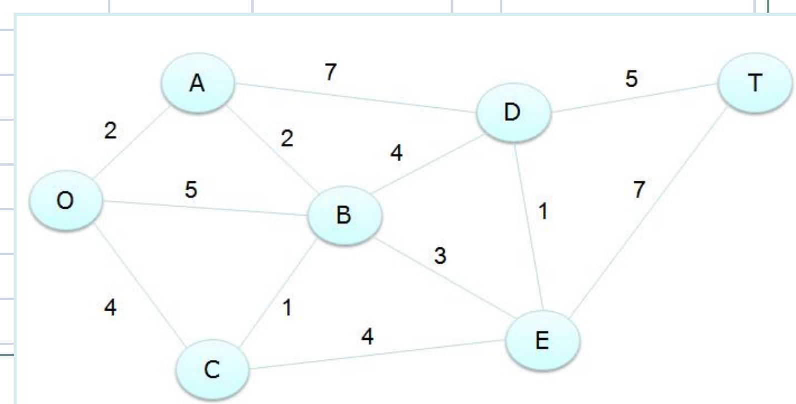
n	Nós solucionados Directamente conectados a Nós Não Solucionados	Nó Não Solucionado Conectado mais próximo	Distância Total Envolvida	N-esimo Nó Mais	Distância Mínima	Última Conexão
1	O	A	2	A	2	OA
2,3	O	C	4	C	4	OC
	A	B	2+2=4	B	4	AB
4	A	D	2+7=9	E	7	BE
	B	E	4+3=7			
	C	E	4+4=8			
5	A	D	2+7=9			
	B	D	4+4=8	D	8	BD
	E	D	7+1=8	D	8	ED
6	D	T	8+5=13	T	13	DT
	E	T	7+7=14			

O Problema do Caminho Mais Curto

Distância	E4:E17
De	B4:B17
FluxoLiquido	H4:H10
Nos	G4:G10
NaRota	D4:D17
OfertaDemanda	J4:J10
Para	C4:C17
DistânciaTotal	D19

	De	Para	Na Rota	Distância
3	De	Para	Na Rota	Distância
4	O	A		2
5	O	B		5
6	O	C		4
7	A	B		2
8	A	D		7
9	B	C		1
10	B	D		4
11	B	E		3
12	C	B		1
13	C	E		4
14	D	E		1
15	D	T		5
16	E	D		1
17	E	T		7
18				
19	Distância Total		0	

Nós	Fluxo Líquido		Oferta/Demanda
O	0	=	1
A	0	=	0
B	0	=	0
C	0	=	0
D	0	=	0
E	0	=	0
T	0	=	-1



O Problema do C

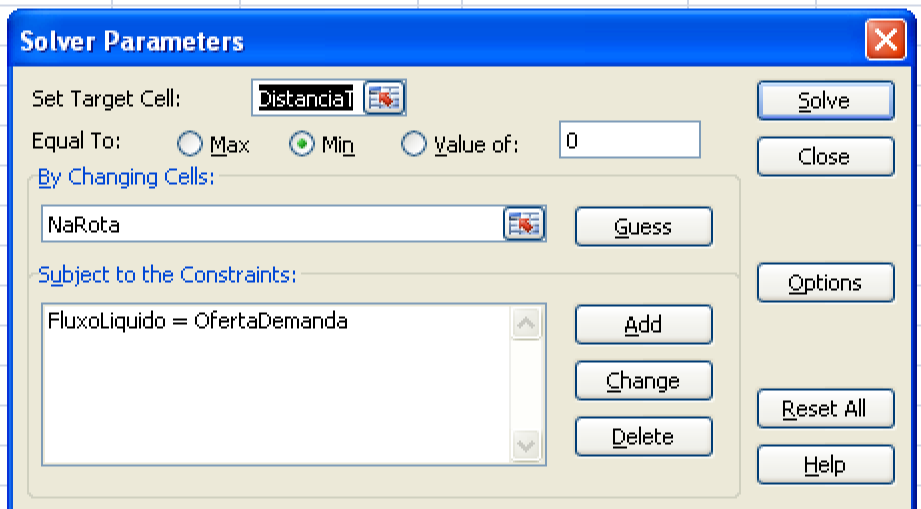
	De	Para	Na Rota	Distância
4	O	A		2
5	O	B		5
6	O	C		4
7	A	B		2
8	A	D		7
9	B	C		1
10	B	D		4
11	B	E		3
12	C	B		1
13	C	E		4
14	D	E		1
15				5
16				1
17	E			7

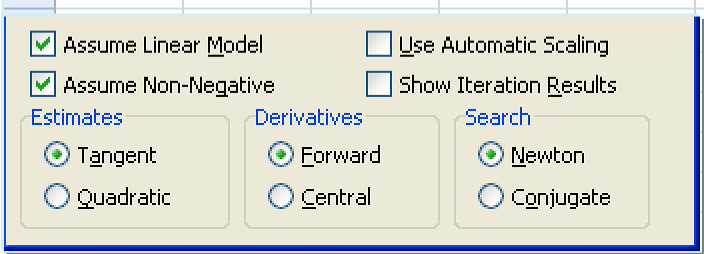
Distância Total	

=SUMPRODUCT(D4:D17,E4:E17)

Nós	Fluxo Lí		
O			1
A		=	0
B		=	0
C		=	0
D		=	0
E		=	0
T		=	-1

=SUMIF(De,G4,NaRota)-SUMIF(Para,G4,NaRota)
=SUMIF(De,G5,NaRota)-SUMIF(Para,G5,NaRota)
=SUMIF(De,G6,NaRota)-SUMIF(Para,G6,NaRota)
=SUMIF(De,G7,NaRota)-SUMIF(Para,G7,NaRota)
=SUMIF(De,G8,NaRota)-SUMIF(Para,G8,NaRota)
=SUMIF(De,G9,NaRota)-SUMIF(Para,G9,NaRota)
=SUMIF(De,G10,NaRota)-SUMIF(Para,G10,NaRota)





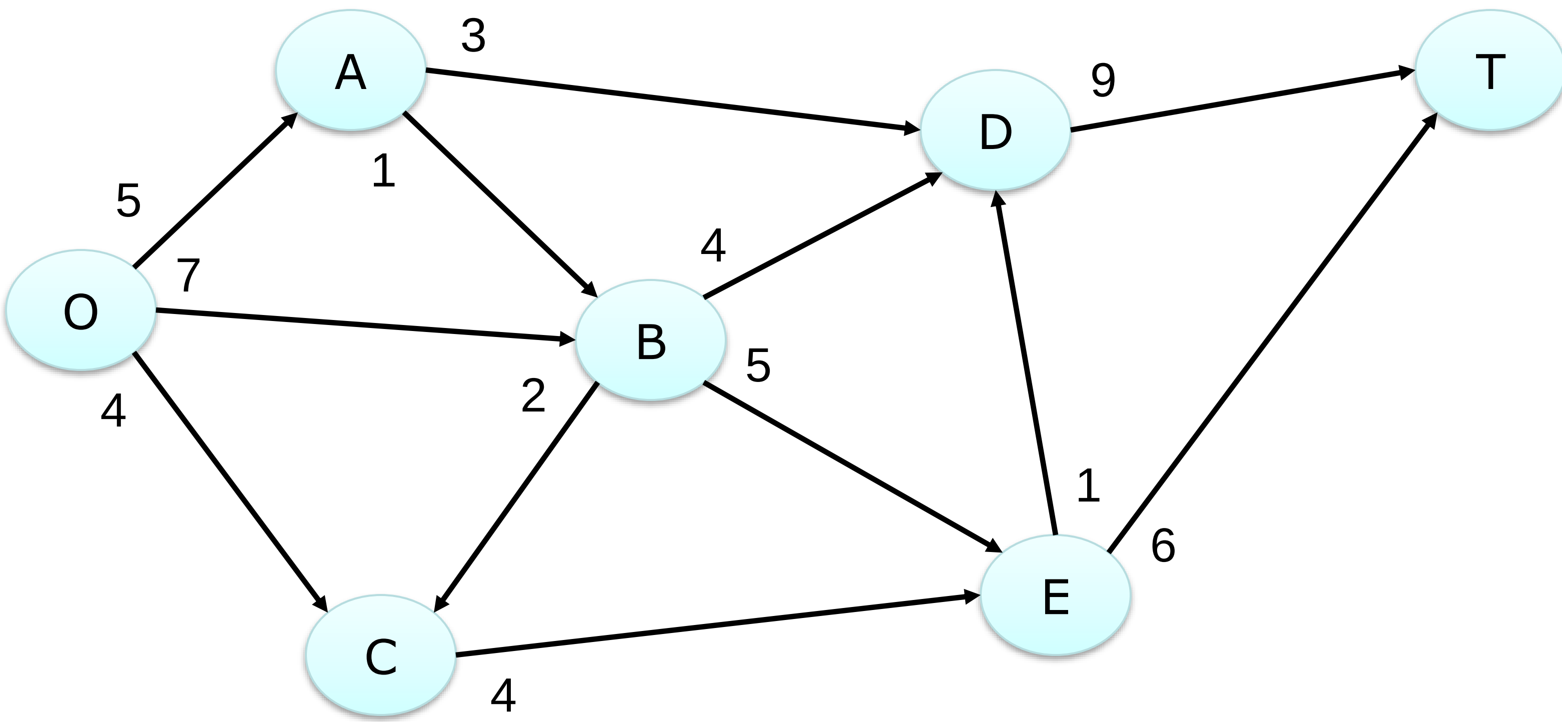
O Problema do Caminho Mais Curto

De	Para	Na Rota	Distância
O	A	1	2
O	B	0	5
O	C	0	4
A	B	1	2
A	D	0	7
B	C	0	1
B	D	1	4
B	E	0	3
C	B	0	1
C	E	0	4
D	E	0	1
D	T	1	5
E	D	0	1
E	T	0	7

Distância Total	13

Nós	Fluxo Líquido		Oferta/Demanda
O	1	=	1
A	0	=	0
B	0	=	0
C	0	=	0
D	0	=	0
E	0	=	0
T	-1	=	-1

Exemplo do Protótipo



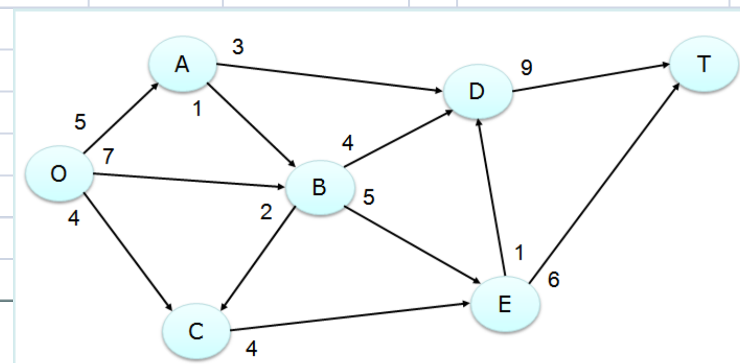
Sistema de pequenas estradas para o parque de Gorongoza

O Problema do Fluxo Máximo

De	Para	Fluxo		Capacidade
O	A		≤	5
O	B		≤	7
O	C		≤	4
A	B		≤	1
A	D		≤	3
B	C		≤	2
B	D		≤	4
B	E		≤	5
C	E		≤	4
D	T		≤	9
E	D		≤	1
E	T		≤	6

Fluxo Máximo	0

Nós	Fluxo Líquido		Oferta/Demandane
O	0		
A	0	=	0
B	0	=	0
C	0	=	0
D	0	=	0
E	0	=	0
T	0		



O Problema do Fluxo Máximo

Capacidade	F4:F15
De	B4:B15
Fluxo	D4:D15
FluxoMax	D17
FluxoLiquido	I4:I10
Nos	H4:H10
OfertaDemanda	K5:K9
Para	C4:C15

=SUMIF(De,H4,Fluxo)-SUMIF(Para,H4,Fluxo
=SUMIF(De,H5,Fluxo)-SUMIF(Para,H5,Fluxo
=SUMIF(De,H6,Fluxo)-SUMIF(Para,H6,Fluxo
=SUMIF(De,H7,Fluxo)-SUMIF(Para,H7,Fluxo
=SUMIF(De,H8,Fluxo)-SUMIF(Para,H8,Fluxo
=SUMIF(De,H9,Fluxo)-SUMIF(Para,H9,Fluxo
=SUMIF(De,H10,Fluxo)-SUMIF(Para,H10,Flu

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
			Fluxo		Capacidade		Nós	Fluxo		
				≤	5		O			
				≤	7		A	0		
6	O	C		≤	4		B	0	=	0
7	A	B		≤	1		C	0	=	0
8	A	D		≤	3		D	0	=	0
9	B	C		≤	2		E	0	=	0
10	B	D		≤	4		T	0		
11	B	E		≤	5					
12	C	E		≤	4					
13	D	T		≤	9					
14	E	D		≤	1					
15	E	T		≤	6					
16										
17	Fluxo Máximo		=I4							
18										

Solver Parameters

Set Target Cell: FluxoMax

Equal To: (•) Max ( ) Min ( ) Value of: 0

By Changing Cells: Fluxo

Subject to the Constraints:

$I$5:$I$9 = OfertaDemanda
Fluxo <= Capacidade

Solve | Close | Guess | Options | Add | Change | Delete | Reset All | Help

[x] Assume Linear Model [ ] Use Automatic Scaling
[x] Assume Non-Negative [ ] Show Iteration Results

Estimates: (•) Tangent ( ) Quadratic
Derivatives: (•) Forward ( ) Central
Search: (•) Newton ( ) Conjugate

O Problema do Fluxo Máximo

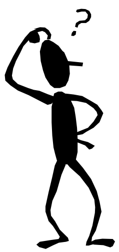
De	Para	Fluxo		Capacidade
O	A	3	≤	5
O	B	7	≤	7
O	C	4	≤	4
A	B	0	≤	1
A	D	3	≤	3
B	C	0	≤	2
B	D	4	≤	4
B	E	3	≤	5
C	E	4	≤	4
D	T	8	≤	9
E	D	1	≤	1
E	T	6	≤	6

Fluxo Máximo	14

Nós	Fluxo Líquido		Oferta/Demandane
O	14		
A	0	=	0
B	0	=	0
C	0	=	0
D	0	=	0
E	0	=	0
T	-14		

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo



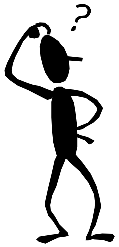
Como se descrevem os problemas do Fluxo de Custo mínimo?

1. A rede é uma rede direccionada e conectada.
2. Pelo menos um dos nós é um nó de suprimento.
3. Pelo menos um dos demais nós é um nó de demanda.
4. Todos os nós remanescentes são nós *transhipment*.
5. O fluxo através de um arco é permitido somente na direcção indicada pela seta em que a quantidade máxima do fluxo é dada pela capacidade desse arco. Se o fluxo poder ocorrer em ambas as direcções isso é representado por um par de arcos.
6. A rede tem arcos suficientes com capacidade suficiente para permitir que todo o fluxo gerado nos nós de suprimento atinjam todos os nós de demanda.
7. O custo do fluxo através de cada arco é proporcional a quantidade desse fluxo, no qual o custo por fluxo unitário é conhecido.
8. O objectivo é minimizar o custo total de enviar provisão disponível através da rede a fim de satisfazer a demanda dada.

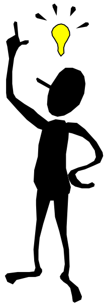
O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

Tipo de Aplicação	Nós de Suprimento	Nós *Transhipment*	Nós de Demanda
Operação de uma rede de distribuição	Origem das mercadorias	Instalações Intermediárias para armazenamento	Clientes
Controle de resíduos sólidos	Origem de resíduos sólidos	Instalações de processamento	Localizações de aterros
Operação de uma rede de suprimento	Fornecedores	Depósitos intermediários	Instalações para processamento
Coordenação de *mix* de produtos nas fábricas	Fábricas	Fabricação de um produto específico	Mercado para um produto específico
Gerenciamento do fluxo de caixa	Fontes de caixa em um determinado momento	Opções de investimento de curto prazo	Necessidades de caixa em um determinado momento

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo



Como se Formula o Modelo dos Problemas do Fluxo de Custo mínimo?



Considere-se uma rede direccionada e conectada em que os n nós incluem pelo menos um nó de suprimento e pelo menos um nó de demanda, as variáveis de decisão são:

x_{ij} = fluxo do arco i $\rightarrow$ j

e entre as informações dadas tem-se:

c_{ij} = custo por fluxo através do arco i $\rightarrow$ j

u_{ij} = capacidade do arco para o arco i $\rightarrow$ j

b_i = fluxo líquido gerado no nó i

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

O valor de b_i depende da natureza do nó i, em que

$b_i > 0$ se o nó i for um nó de suprimento

$b_i < 0$ se o nó i for um nó de demanda

$b_i = 0$ se o nó i for um nó *transhipment*

O objectivo é minimizar o custo total da remessa da oferta disponível através da rede para satisfazer a demanda dada

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

Usando a convenção de que os somatórios são considerados apenas sobre os arcos existentes a formulação da programação linear deste problema fica:

Minimizar $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a: $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = b_i$$ Para cada nó i

e

$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ -> para cada arco i -> j

O primeiro somatório nas restrições de nós representa o fluxo total que sai do nó i ao passo que o segundo somatório representa o fluxo que entra no nó i de modo que a diferença seja o fluxo líquido gerado no nó.

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

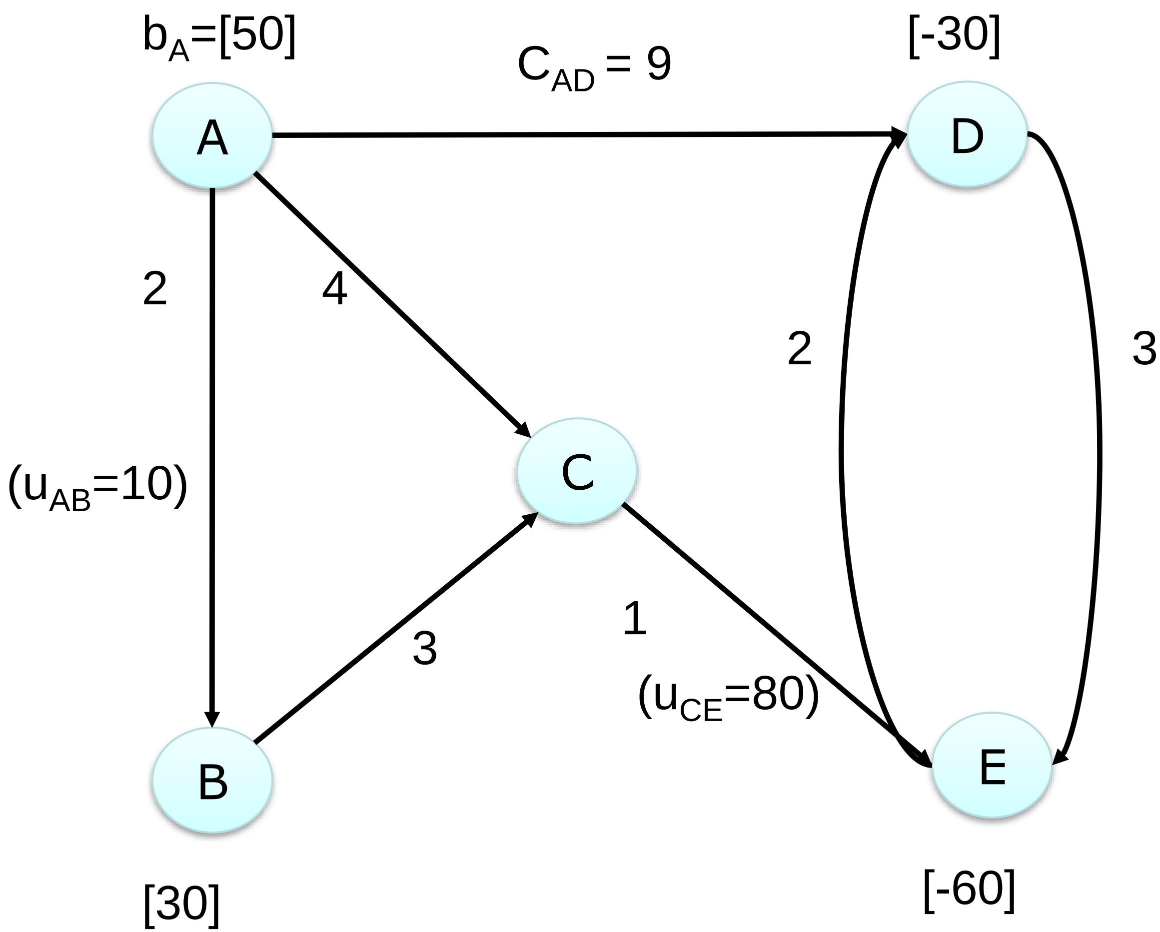
Propriedades de Soluções Viáveis: uma condição necessária para um problema do fluxo do custo mínimo ter qualquer solução viável é que:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

isto é, o fluxo total gerado no nós de fornecimento é igual ao fluxo total sendo absorvido nos nós de demanda.

Propriedades das Soluções Inteiras: para os problemas do fluxo do custo mínimo em que cada b_i e u_{ij} são valores inteiros, todas as variáveis básicas em cada uma das soluções básicas viáveis (BV) incluindo a solução óptima, também possuem números inteiros.

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo



Exemplo do problema de uma companhia de distribuição formulado como um problema de fluxo de custo mínimo

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

$$Maximizar \quad Z = 2x_{AB} + 4x_{AC} + 9x_{AD} + 3x_{BC} + x_{CE} + 3x_{DE} + 2x_{ED}$$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
x_{AB} & + & x_{AC} & + & x_{AD} & & & & & & & & & = & 50 \\
-x_{AB} & & & & & + & x_{BC} & & & & & & & = & 40 \\
 & - & x_{AC} & & & - & x_{BC} & + & x_{CE} & & & & & = & 0 \\
 & & & - & x_{AD} & & & & & + & x_{DE} & - & x_{ED} & = & -30 \\
 & & & & & & & - & x_{CE} & - & x_{DE} & + & x_{ED} & = & -60
\end{array}$$

e

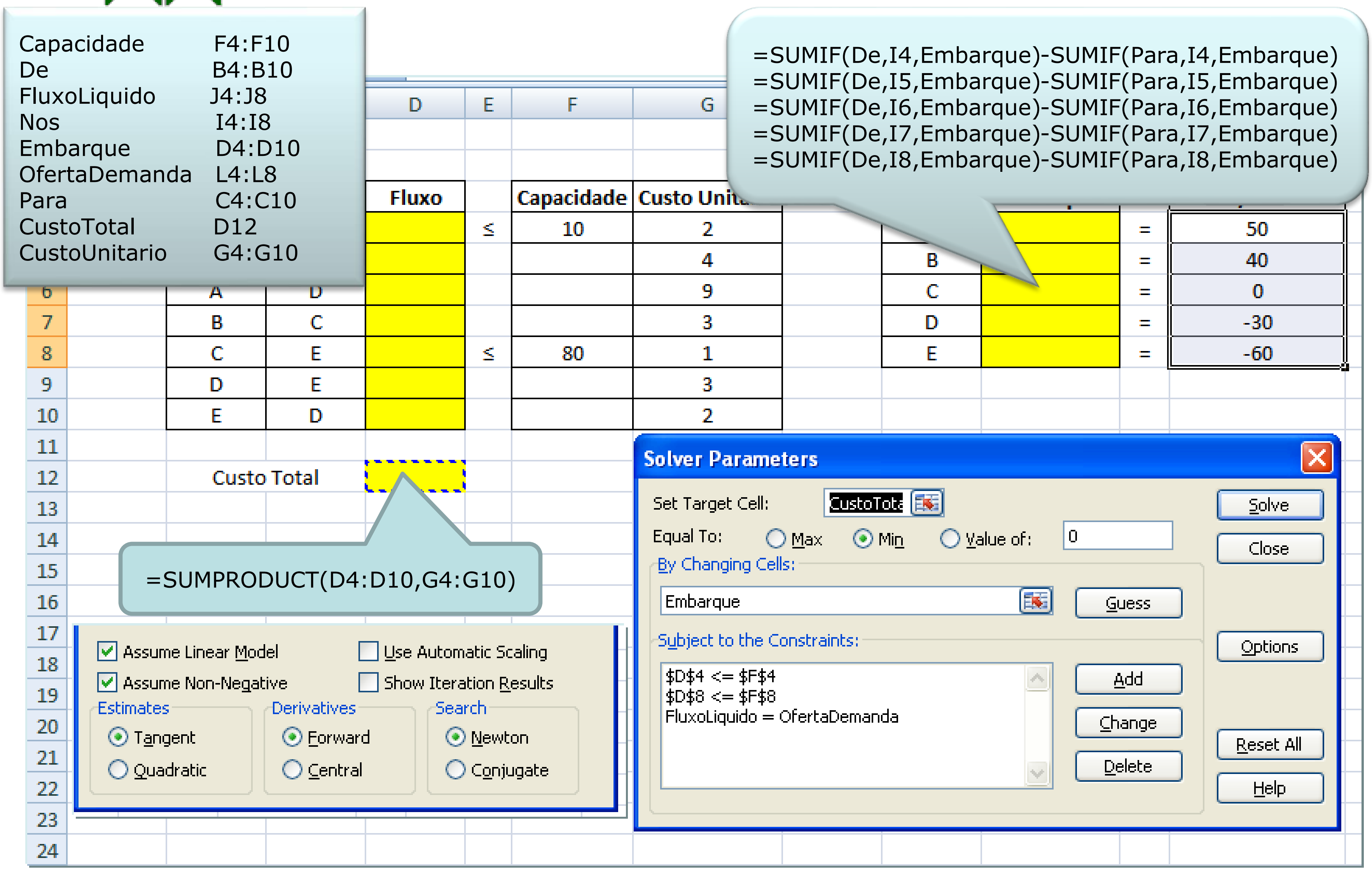
$$x_{AB} \leq 10, \quad x_{CE} \leq 80, \qquad para\ todo\ o\ x_{ij} \geq 0$$

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

De	Para	Fluxo		Capacidade	Custo Unitário
A	B		≤	10	2
A	C				4
A	D				9
B	C				3
C	E		≤	80	1
D	E				3
E	D				2

Custo Total

Nós	Fluxo Líquido		Oferta/Demanda
A		=	50
B		=	40
C		=	0
D		=	-30
E		=	-60


Capacidade F4:F10
De B4:B10
FluxoLiquido J4:J8
Nos I4:I8
Embarque D4:D10
OfertaDemanda L4:L8
Para C4:C10
CustoTotal D12
CustoUnitario G4:G10
=SUMIF(De,I4,Embarque)-SUMIF(Para,I4,Embarque)
=SUMIF(De,I5,Embarque)-SUMIF(Para,I5,Embarque)
=SUMIF(De,I6,Embarque)-SUMIF(Para,I6,Embarque)
=SUMIF(De,I7,Embarque)-SUMIF(Para,I7,Embarque)
=SUMIF(De,I8,Embarque)-SUMIF(Para,I8,Embarque)
D E F G
Fluxo
Capacidade
≤ 10 2
4
A D 9
B C 3
C E ≤ 80 1
D E 3
E D 2
B = 40
C = 0
D = -30
E = -60
= 50
Custo Total
=SUMPRODUCT(D4:D10,G4:G10)
Solver Parameters
Set Target Cell: CustoTota
Equal To: Max Min Value of: 0
By Changing Cells:
Embarque
Subject to the Constraints:
$D$4 <= $F$4
$D$8 <= $F$8
FluxoLiquido = OfertaDemanda
Solve
Close
Guess
Options
Add
Change
Delete
Reset All
Help
Assume Linear Model
Use Automatic Scaling
Assume Non-Negative
Show Iteration Results
Estimates
Tangent
Quadratic
Derivatives
Forward
Central
Search
Newton
Conjugate

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

De	Para	Fluxo		Capacidade	Custo Unitário
A	B	0	≤	10	2
A	C	40			4
A	D	10			9
B	C	40			3
C	E	80	≤	80	1
D	E	0			3
E	D	20			2

Custo Total 490

Nós	Fluxo Líquido		Oferta/Demanda
A	50	=	50
B	40	=	40
C	0	=	0
D	-30	=	-30
E	-60	=	-60