Optimização

Aula 26

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Não Linear

Aula 26: Programação Não-Linear - Funções de Uma única variável (Prática)

- Método da Bissecção;
- Método de Newton.

Problema 26.1

Considere o seguinte problema

Maximizar $f(x)=x^4+40x+x^2-x^7-2x^5+x^3$

a) Aplique o método de Bissecção para resolver aproximadamente esse problema. Use uma tolerância de erro $\varepsilon=0{,}02$ e limites iniciais [0 e 5]

b) Aplique o método de Newton, com $\varepsilon=0{,}0001$ e $x_1=5$ a este problema

Método da Bissecção

Inicialização: Seleccione a tolerância, encontre um limite inferior actual e um limite superior actual. Seleccione uma solução experimental inicial

$$x' = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$$

$$Iteração:$$

$$1.\ calcular\ \frac{df(x)}{dx}\ em\ x = x'$$

$$2.\ se\ \frac{df(x)}{dx} \geq 0\ reinicialize\ \underline{x} = x'$$

Método da Bissecção

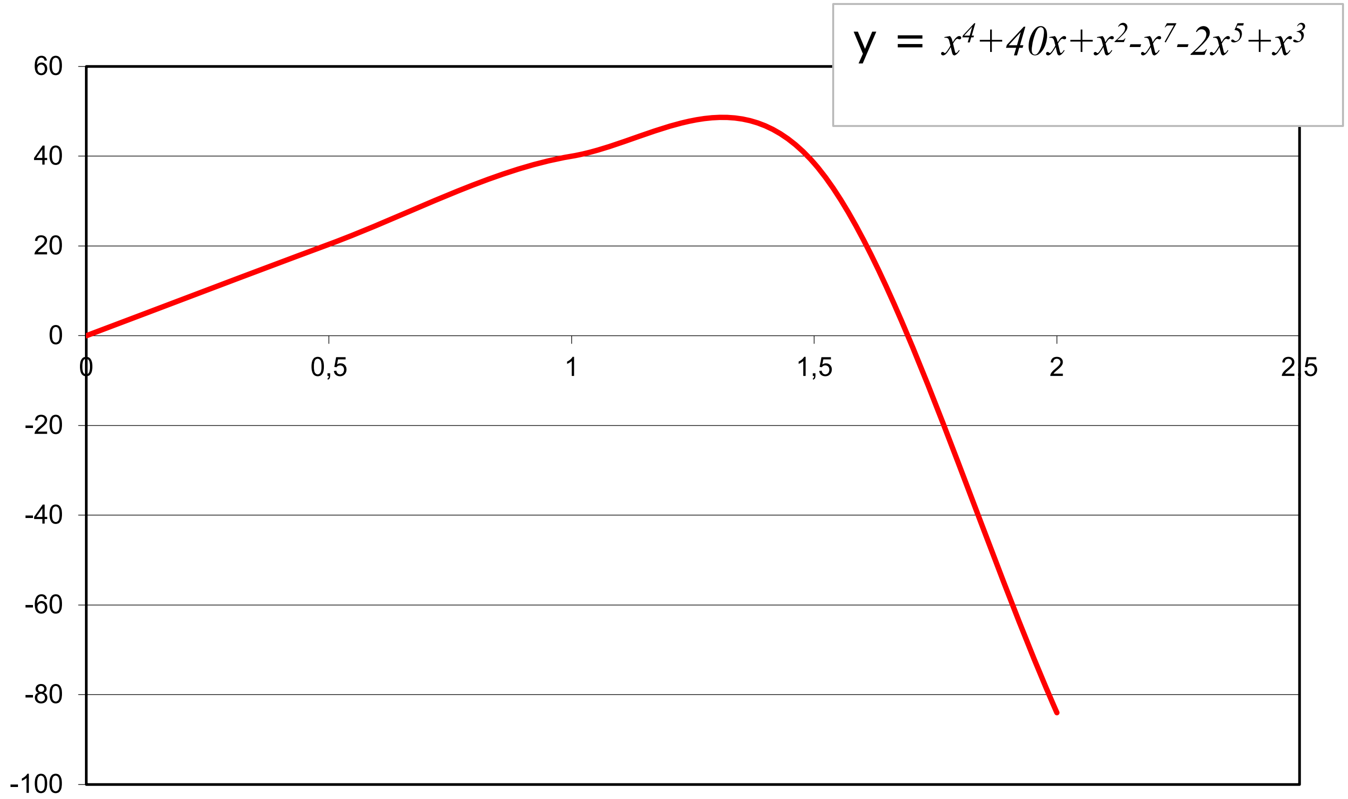
$$3.\ se \frac{df(x)}{dx} \leq 0\ reinicialize\ \overline{x} = x'$$

$$4.\ Selecione\ uma\ nova\ x' = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$$

Regra de Paragem: $Se\ \overline{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon,$

de modo que o novo **x´** deva estar dentro da tolerância **ε** de **x***, pare. Caso contrário executa-se nova iteração.

Problema 26.1 (Resolução I)



Problema 26.1 (Resolução II)
Método da Bissecção

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x$$

Pelo facto da segunda derivada ser não positiva em qualquer ponto, ***f(x)*** é uma função côncava e portanto o método da bissecção pode ser aplicado tranquilamente para encontrar o seu máximo global (supondo-se que exista um máximo global).

Problema 26.1 (Resolução III)
Método da Bissecção

Iteração	$f'(x)$	$\underline{x}$	$\overline{x}$	*novo* x	$f(x)$	
0		0	5	2,5	-644,727	continuar
1	-1973,36	0	2,5	1,25	45,08514	continuar
2	3,883057	1,25	2,5	1,875	-30,3536	continuar
3	-347,095	1,25	1,875	1,5625	33,35275	continuar
4	-95,76	1,25	1,5625	1,40625	43,04517	continuar
5	-33,3722	1,25	1,40625	1,328125	44,78928	continuar
6	-12,2129	1,25	1,328125	1,289063	45,0942	continuar
7	-3,59817	1,25	1,289063	1,269531	45,12619	parar

Método de Newton

Inicialização: Seleccione uma solução inicial experimental x_i, por inspecção. Faça que i=1.

$$Iteração\ i:$$

$$1.\ calcular\ \frac{df(x_i)}{dx}\ e\ \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2}\ calcular\ f(x_i)\ é\ opcional$$

$$2.\ configure\ x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

Regra da Paragem: se $|x_{i+1}-x_i| \leq \varepsilon$ **pare** x_{i+1} é essencialmente a solução óptima. Caso contrário, reinicialize $i=i+1$ e execute uma outra iteração.

Problema 26.1 (Resolução IV)
Método de Newton

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x$$

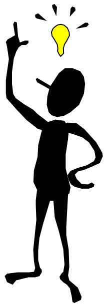
Portanto, a fórmula para calcular a nova solução experimental (x_{i+1}) *a partir da actual* x_i *é:*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} = x_i - \frac{4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2}{12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x}$$

Problema 26.1 (Resolução V)
Método de Newton

Após seleccionar-se $\varepsilon=0,001$, e escolher-se $x_i=5$ como solução experimental inicial pode-se ver na tabela seguinte as soluções restantes:

Iteração	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	x_i+1	$(x_i+1-x_i)<=\varepsilon$
1	5	-83400	-115000	-135918	4,153902	continuar
2	4,153902	-23260,6	-38551,8	-54576,4	3,447519	continuar
3	3,447519	-6430,23	-12918,9	-21927,9	2,858366	continuar
4	2,858366	-1727,92	-4321,62	-8830,75	2,368983	continuar
5	2,368983	-422,793	-1437,49	-3581,95	1,96767	continuar
6	1,96767	-68,0044	-470,145	-1483,29	1,650708	continuar
7	1,650708	22,76782	-146,398	-650,07	1,425504	continuar
8	1,425504	42,34429	-39,4953	-328,155	1,305149	continuar
9	1,305149	45,00921	-7,00132	-217,712	1,27299	continuar
10	1,27299	45,12599	-0,38973	-193,834	1,270979	continuar
11	1,270979	45,12639	-0,00143	-192,411	1,270972	parar



Problema 26.2

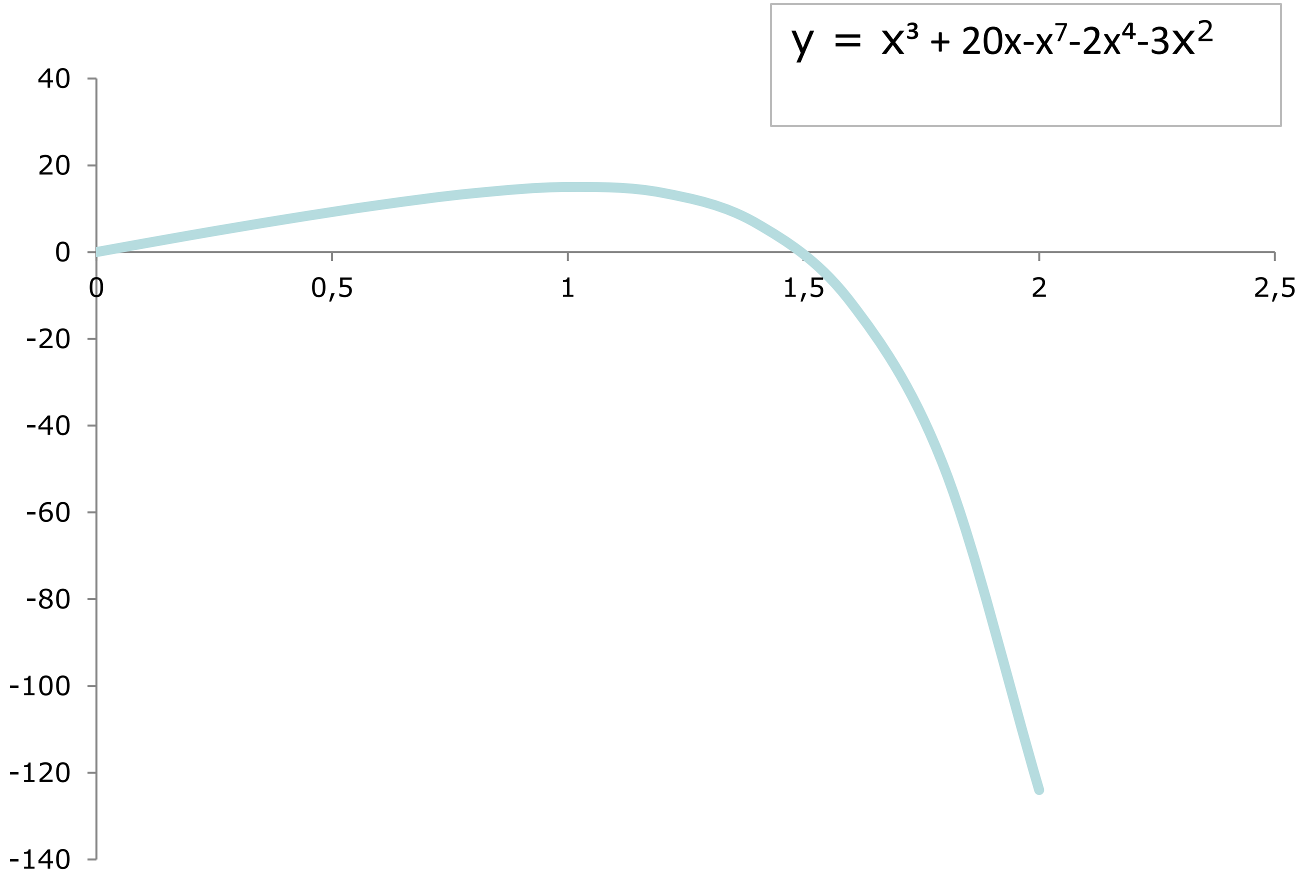
Considere o seguinte problema

Maximizar $f(x)=x^3+20x-x^7-2x^4-3x^2$

a) Aplique o método de Bissecção para resolver aproximadamente esse problema. Use a tolerância de erro $\varepsilon=0{,}007$ e os limites iniciais [0 e 2]

b) Aplique o método de Newton, com $\varepsilon=0{,}001$ e $x_1=1$ a este problema

Problema 26.2 (Resolução I)



Problema 26.2 (ResoluçãoII)
Método da Bissecção

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 6x - 42x^5 - 24x^2 - 6$$

Pelo facto da segunda derivada ser não positiva em qualquer ponto, ***f(x)*** é uma função côncava e portanto o método da bissecção pode ser aplicado tranquilamente para encontrar o seu máximo global (supondo-se que exista um máximo global).

Problema 26.2 (Resolução III)
Método da Bissecção

Iteração	*df/dx*	$\underline{x}$	$\overline{x}$	*Novo x*	*f(x)*
0		0	2	1	15
1	2	1	2	1,5	-0.58594
2	-88,9844	1	1,5	1,25	12.61444
3	-25,1404	1	1,25	1,125	14.64264
4	-8,53476	1	1,125	1,0625	14.98525
5	-2,65496	1	1,0625	1,03125	15.02896
6	-0,19016	1	1,03125	1,015625	15.02303
7	0,937417	1,015625	1,03125	1,023438	15.0282
8	0,381974	1,023438	1,03125	1,027344	15.02913

Problema 26.2 (Resolução IV)
Método de Newton

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 20 - 7x6 - 8x^3 - 6x$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 6x - 42x^5 - 24x^2 - 6$$

Portanto, a fórmula para calcular a nova solução experimental (x_{i+1}) a partir da actual x_i é:

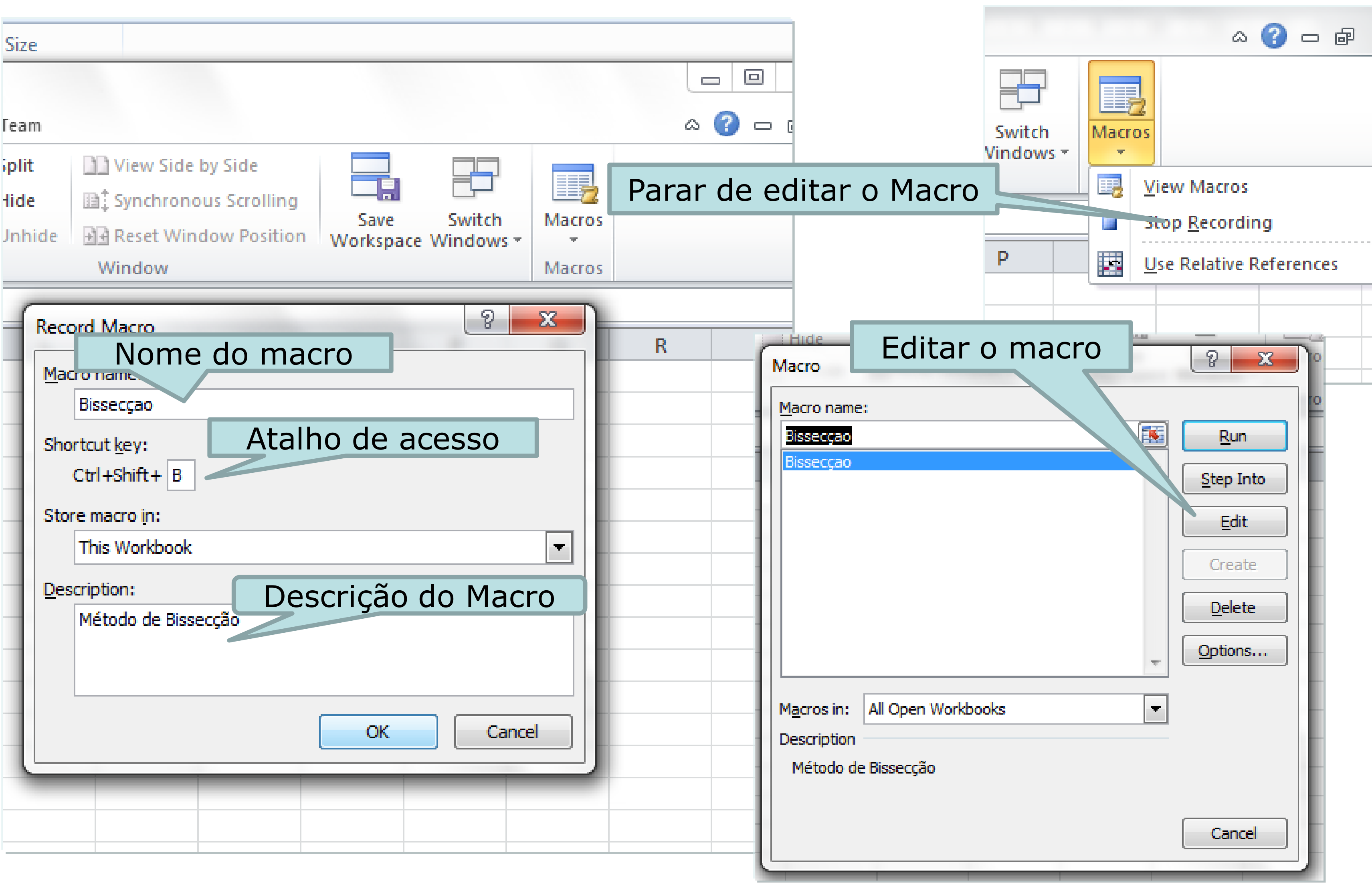
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} = x_i - \frac{3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x}{6x - 42x^5 - 24x^2 - 6}$$

Problema 26.2 (Resolução V)
Método de Newton

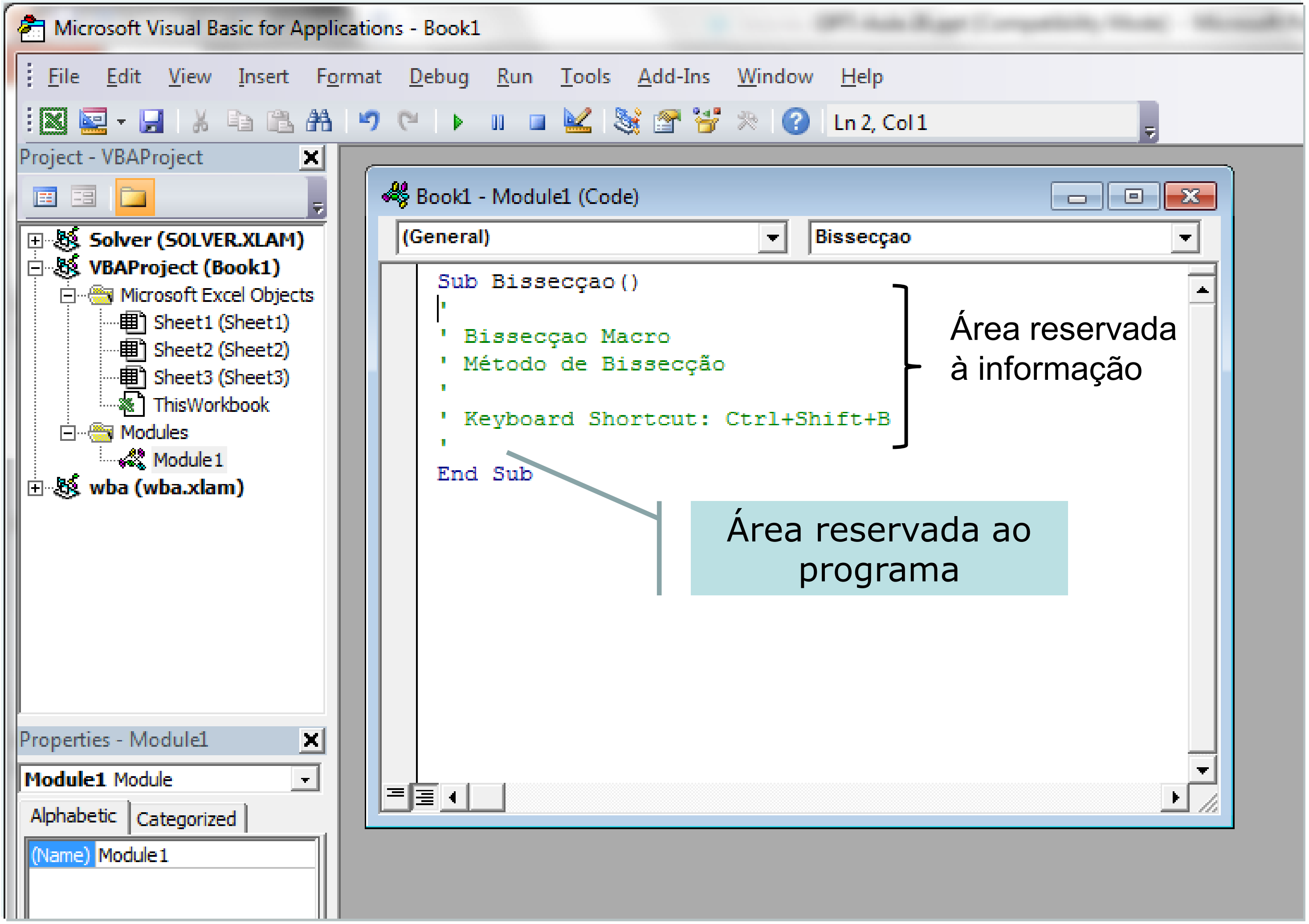
Após seleccionar-se $\varepsilon=0,001$, e escolher-se $x_i=1$ como solução experimental inicial, pode-se ver na tabela seguinte as soluções restantes:

Iteração i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	x_{i+1}
1	1	15	2	-66	1,030303
2	1,030303	15,0291	-0,11991	-74,0559	1,028684
3	1,028684	15,0292	-0,00037	-73,6037	1,028679
Parar					

Macro do Excel (I)



Macro do Excel (II)



Macro do Excel (III)

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)	
0		0	2	1	15	FALSE
1	2	1	2	1.5	-0.58594	FALSE
2	-88.9844	1	1.5	1.25	12.61444	FALSE
3	-25.1404	1	1.25	1.125	14.64264	FALSE
4	-8.53476	1	1.125	1.0625	14.98525	FALSE
5	-2.65496	1	1.0625	1.03125	15.02896	FALSE
6	-0.19016	1	1.03125	1.015625	15.02303	FALSE
7	0.937417	1.015625	1.03125	1.023438	15.0282	FALSE
8	0.381974	1.023438	1.03125	1.027344	15.02913	Parar

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)

Planilha onde se vai escrever os resultados do programa

Macro do Excel – Programa (IV)

```
Sub Bisseccao()
'
' Bisseccao Macro
' Método de Bissecção
'
' Keyboard Shortcut: Ctrl+Shift+B
'
Dim I, Xesq, Xdir, Xnovo, dFx, Fx

I = 0
KI = 23
K = 23
Xesq = 0
Xdir = 2
```

Macro do Excel – Programa (V)

```
Do
K = 23 + I
Range("J" & K).Value = I
Range("L" & K).Value = Xesq
Range("M" & K).Value = Xdir
Xnovo = (Xdir + Xesq) / 2
Range("N" & K).Value = Xnovo

Fx = Xnovo ^ 3 + 20 * Xnovo - Xnovo ^ 7 - 2 * Xnovo ^ 4 - 3 *
Xnovo ^ 2
Range("O" & K).Value = Fx
```

Macro do Excel – Programa (VI)

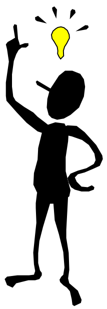
```
I = I + 1
KI = KI + 1

dFx = 3 * Xnovo ^ 2 + 20 - 7 * Xnovo ^ 6 - 8 * Xnovo ^ 3 - 6 *
Xnovo
Range("K" & KI).Value = dFx

If dFx < 0 Then Xesq = Xesq Else Xesq = Xnovo
If dFx > 0 Then Xdir = Xdir Else Xdir = Xnovo
Loop Until (Abs((Xesq - Xdir) / 2) <= 0.0007)

End Sub
```

Macro do Excel (VI)

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)	
0		0	2	1	15	FALSE
1	2	1	2	1.5	-0.58594	FALSE
2	-88.9844	1	1.5	1.25	12.61444	FALSE
3	-25.1404	1	1.25	1.125	14.64264	FALSE
4	-8.53476	1	1.125	1.0625	14.98525	FALSE
5	-2.65496	1	1.0625	1.03125	15.02896	FALSE
6	-0.19016	1	1.03125	1.015625	15.02303	FALSE
7	0.937417	1.015625	1.03125	1.023438	15.0282	FALSE
8	0.381974	1.023438	1.03125	1.027344	15.02913	Parar

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)
0		0	2	1	15
1	2	1	2	1.5	-0.58594
2	-88.9844	1	1.5	1.25	12.61444
3	-25.1404	1	1.25	1.125	14.64264
4	-8.53476	1	1.125	1.0625	14.98525
5	-2.65496	1	1.0625	1.03125	15.02896
6	-0.19016	1	1.03125	1.015625	15.02303
7	0.937417	1.015625	1.03125	1.023438	15.0282
8	0.381974	1.023438	1.03125	1.027344	15.02913
9	0.09802	1.027344	1.03125	1.029297	15.02919
10	-0.04554	1.027344	1.029297	1.02832	15.0292

Resultados do programa



Trabalho Para Casa

Considere o seguinte problema

Maximizar $f(x)=48x^5+42x^3+3,5x-16x^6-61x^4-16,5x^2$

a) Aplique o método de Bissecção usando um Macro do Excel para resolver aproximadamente esse problema. Use uma tolerância de erro ε=0,0008 e limites iniciais [-1 e 4]

b) Aplique o método de Newton usando um Macro do Excell, com ε=0,0001 e x_1=1 a este problema

Enviar até quinta-feira dia 21 de Novembro de 2024