



Optimização

Aula 26



Programação Não Linear

Aula 26: Programação Não-Linear - Funções de Uma única variável (Prática)

- Método da Bisseccção;
- Método de Newton.



Problema 26.1

Considere o seguinte problema

$$\text{Maximizar } f(x) = x^4 + 40x + x^2 - x^7 - 2x^5 + x^3$$

- Aplique o método de Bisseção para resolver aproximadamente esse problema. Use uma tolerância de erro $\varepsilon = 0,02$ e limites iniciais [0 e 5]
- Aplique o método de Newton, com $\varepsilon = 0,0001$ e $x_1 = 5$ a este problema



Método da Bissecção

Inicialização: Seleccione a tolerância, encontre um limite inferior actual e um limite superior actual. Seleccione uma solução experimental inicial

$$x' = \frac{x + \bar{x}}{2}$$

Iteração :

1. *calcular* $\frac{df(x)}{dx}$ em $x = x'$

2. *se* $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ *reinicialize* $\underline{x} = x'$



Método da Bissecção

3. *se* $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$ *reinicialize* $\bar{x} = x'$

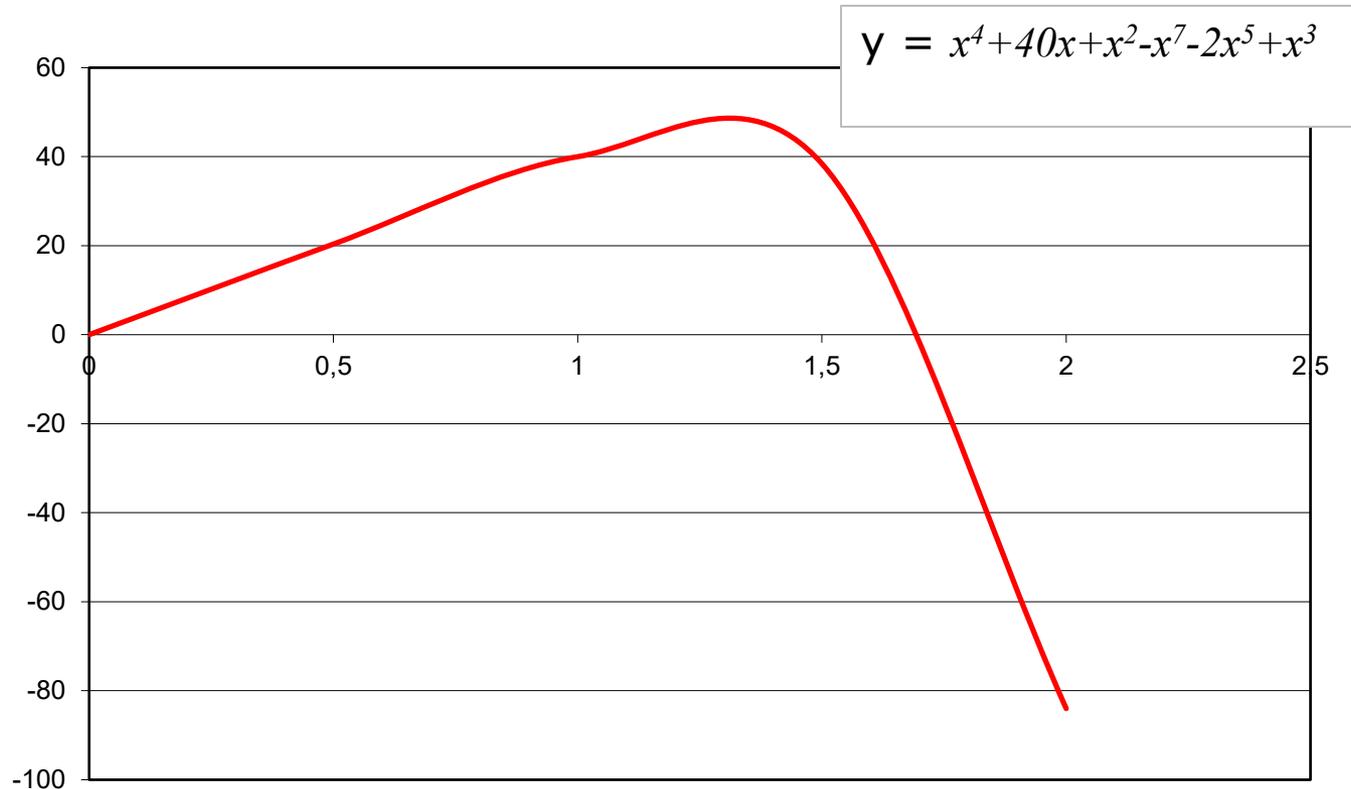
4. *Selecione uma nova* $x' = \frac{x + \bar{x}}{2}$

Regra de Paragem: *Se* $\bar{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon$,

de modo que o novo \mathbf{x}' deva estar dentro da tolerância ε de \mathbf{x}^* , pare. Caso contrário executa-se nova iteração.



Problema 26.1 (Resolução I)





Problema 26.1 (Resolução II) **Método da Bissecção**

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x$$

Pelo facto da segunda derivada ser não positiva em qualquer ponto, $f(x)$ é uma função côncava e portanto o método da bissecção pode ser aplicado tranquilamente para encontrar o seu máximo global (supondo-se que exista um máximo global).



Problema 26.1 (Resolução III)

Método da Bissecção

<i>Iteração</i>	$f'(x)$	\underline{x}	\bar{x}	<i>novo x</i>	$f(x)$	
0		0	5	2,5	-644,727	continuar
1	-1973,36	0	2,5	1,25	45,08514	continuar
2	3,883057	1,25	2,5	1,875	-30,3536	continuar
3	-347,095	1,25	1,875	1,5625	33,35275	continuar
4	-95,76	1,25	1,5625	1,40625	43,04517	continuar
5	-33,3722	1,25	1,40625	1,328125	44,78928	continuar
6	-12,2129	1,25	1,328125	1,289063	45,0942	continuar
7	-3,59817	1,25	1,289063	1,269531	45,12619	parar



Método de Newton

Inicialização: Seleccione uma solução inicial experimental x_i , por inspecção. Faça que $i=1$.

Iteração i :

1. calcular $\frac{df(x_i)}{dx}$ e $\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2}$ calcular $f(x_i)$ é opcional

2. configure $x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$

Regra da Paragem: se $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$ pare x_{i+1} é essencialmente a solução óptima. Caso contrário, reinicialize $i=i+1$ e execute uma outra iteração.



Problema 26.1 (Resolução IV) Método de Newton

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x$$

Portanto, a fórmula para calcular a nova solução experimental (x_{i+1}) a partir da actual x_i é:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} = x_i - \frac{4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2}{12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x}$$



Problema 26.1 (Resolução V)

Método de Newton

Após seleccionar-se $\varepsilon=0,001$, e escolher-se $x_i=5$ como solução experimental inicial pode-se ver na tabela seguinte as soluções restantes:

Iteração	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	x_{i+1}	$(x_{i+1}-x_i) \leq \varepsilon$
1	5	-83400	-115000	-135918	4,153902	continuar
2	4,153902	-23260,6	-38551,8	-54576,4	3,447519	continuar
3	3,447519	-6430,23	-12918,9	-21927,9	2,858366	continuar
4	2,858366	-1727,92	-4321,62	-8830,75	2,368983	continuar
5	2,368983	-422,793	-1437,49	-3581,95	1,96767	continuar
6	1,96767	-68,0044	-470,145	-1483,29	1,650708	continuar
7	1,650708	22,76782	-146,398	-650,07	1,425504	continuar
8	1,425504	42,34429	-39,4953	-328,155	1,305149	continuar
9	1,305149	45,00921	-7,00132	-217,712	1,27299	continuar
10	1,27299	45,12599	-0,38973	-193,834	1,270979	continuar
11	1,270979	45,12639	-0,00143	-192,411	1,270972	parar



Problema 26.2

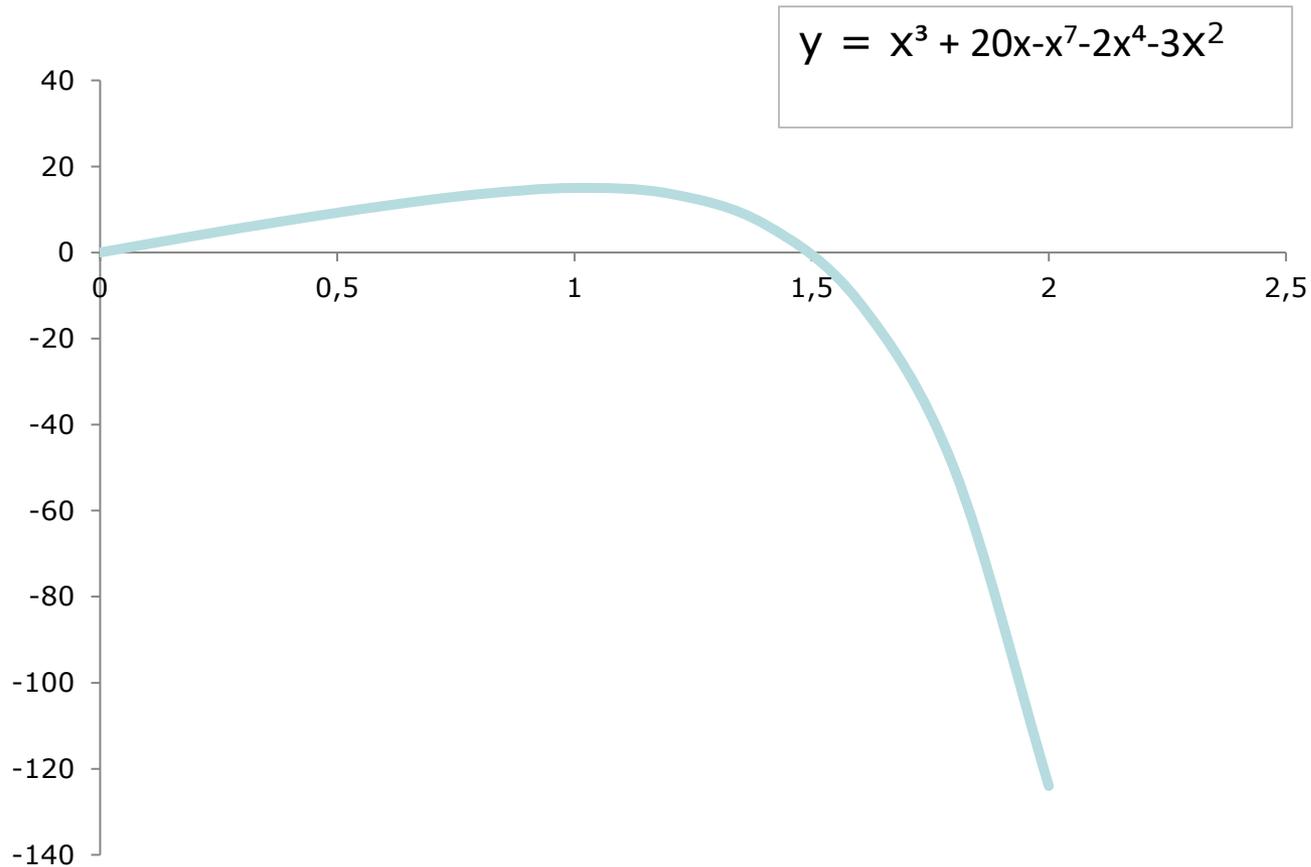
Considere o seguinte problema

$$\text{Maximizar } f(x) = x^3 + 20x - x^7 - 2x^4 - 3x^2$$

- a) Aplique o método de Bisseção para resolver aproximadamente esse problema. Use a tolerância de erro $\varepsilon = 0,007$ e os limites iniciais $[0 \text{ e } 2]$
- b) Aplique o método de Newton, com $\varepsilon = 0,001$ e $x_1 = 1$ a este problema



Problema 26.2 (Resolução I)





Problema 26.2 (ResoluçãoII) **Método da Bissecção**

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 6x - 42x^5 - 24x^2 - 6$$

Pelo facto da segunda derivada ser não positiva em qualquer ponto, $f(x)$ é uma função côncava e portanto o método da bissecção pode ser aplicado tranquilamente para encontrar o seu máximo global (supondo-se que exista um máximo global).



Problema 26.2 (Resolução III)

Método da Bissecção

<i>Iteração</i>	<i>df/dx</i>	\underline{x}	\bar{x}	<i>Novo x</i>	<i>f(x)</i>
0		0	2	1	15
1	2	1	2	1,5	-0.58594
2	-88,9844	1	1,5	1,25	12.61444
3	-25,1404	1	1,25	1,125	14.64264
4	-8,53476	1	1,125	1,0625	14.98525
5	-2,65496	1	1,0625	1,03125	15.02896
6	-0,19016	1	1,03125	1,015625	15.02303
7	0,937417	1,015625	1,03125	1,023438	15.0282
8	0,381974	1,023438	1,03125	1,027344	15.02913



Problema 26.2 (Resolução IV) Método de Newton

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 6x - 42x^5 - 24x^2 - 6$$

Portanto, a fórmula para calcular a nova solução experimental (x_{i+1}) a partir da actual x_i é:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} = x_i - \frac{3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x}{6x - 42x^5 - 24x^2 - 6}$$



Problema 26.2 (Resolução V)

Método de Newton

Após seleccionar-se $\varepsilon=0,001$, e escolher-se $x_i=1$ como solução experimental inicial, pode-se ver na tabela seguinte as soluções restantes:

Iteração i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	x_{i+1}
1	1	15	2	-66	1,030303
2	1,030303	15,0291	-0,11991	-74,0559	1,028684
3	1,028684	15,0292	-0,00037	-73,6037	1,028679
Parar					



Macro do Excel (I)

The image shows the Microsoft Excel interface with the **Macros** ribbon selected. A callout box labeled "Parar de editar o Macro" points to the **Stop Recording** button in the ribbon's context menu. Below this, two dialog boxes are shown:

- Record Macro dialog:** Contains fields for "Macro name:" (Bisseccao), "Shortcut key:" (Ctrl+Shift+ B), "Store macro in:" (This Workbook), and "Description:" (Método de Bisseccao). Callouts identify "Nome do macro", "Atalho de acesso", and "Descrição do Macro".
- Macro dialog:** Shows the "Macro name:" list with "Bisseccao" selected. Callouts identify "Editar o macro" pointing to the list and "Run" button.



Macro do Excel (II)

The screenshot displays the Microsoft Visual Basic for Applications editor for 'Book1'. The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Format, Debug, Run, Tools, Add-Ins, Window, Help), a toolbar, and a Project Explorer on the left. The Project Explorer shows the 'VBAProject (Book1)' structure, including 'Microsoft Excel Objects' (Sheet1, Sheet2, Sheet3, ThisWorkbook) and 'Modules' (Module1). The Properties window at the bottom left shows 'Module1 Module'. The main window, 'Book1 - Module1 (Code)', displays the following VBA code:

```
Sub Bissecção ()  
|  
| Bissecção Macro  
| Método de Bissecção  
|  
| Keyboard Shortcut: Ctrl+Shift+B  
|  
End Sub
```

Annotations in the image identify two areas of the code:

- A bracket on the right side of the code block, spanning from the first line to the line before 'End Sub', is labeled "Área reservada à informação".
- A light blue box at the bottom right, labeled "Área reservada ao programa", has a line pointing to the 'End Sub' statement.



Macro do Excel (III)

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)
0		0	2	1	15
1		2	1	2	1.5
2	-88.9844	1	1.5	1.25	12.61444
3	-25.1404	1	1.25	1.125	14.64264
4	-8.53476	1	1.125	1.0625	14.98525
5	-2.65496	1	1.0625	1.03125	15.02896
6	-0.19016	1	1.03125	1.015625	15.02303
7	0.937417	1.015625	1.03125	1.023438	15.0282
8	0.381974	1.023438	1.03125	1.027344	15.02913

Planilha onde se vai escrever os resultados do programa



Macro do Excel – Programa (IV)

```
Sub Bisseccao()
```

```
'
```

```
' Bisseccao Macro
```

```
' Método de Bisseccção
```

```
'
```

```
' Keyboard Shortcut: Ctrl+Shift+B
```

```
'
```

```
Dim I, Xesq, Xdir, Xnovo, dFx, Fx
```

```
I = 0
```

```
KI = 23
```

```
K = 23
```

```
Xesq = 0
```

```
Xdir = 2
```



Macro do Excel – Programa (V)

Do

K = 23 + I

Range("J" & K).Value = I

Range("L" & K).Value = Xesq

Range("M" & K).Value = Xdir

Xnovo = (Xdir + Xesq) / 2

Range("N" & K).Value = Xnovo

$Fx = Xnovo^3 + 20 * Xnovo - Xnovo^7 - 2 * Xnovo^4 - 3 *$

$Xnovo^2$

Range("O" & K).Value = Fx



Macro do Excel – Programa (VI)

I = I + 1

KI = KI + 1

$dFx = 3 * Xnovo^2 + 20 - 7 * Xnovo^6 - 8 * Xnovo^3 - 6 * Xnovo$

Range("K" & KI).Value = dFx

If dFx < 0 Then Xesq = Xesq Else Xesq = Xnovo

If dFx > 0 Then Xdir = Xdir Else Xdir = Xnovo

Loop Until (Abs((Xesq - Xdir) / 2) <= 0.0007)

End Sub



Macro do Excel (VI)

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)	
0		0	2	1	15	FALSE
1	2	1	2	1.5	-0.58594	FALSE
2	-88.9844	1	1.5	1.25	12.61444	FALSE
3	-25.1404	1	1.25	1.125	14.64264	FALSE
4	-8.53476	1	1.125	1.0625	14.98525	FALSE
5	-2.65496	1	1.0625	1.03125	15.02896	FALSE
6	-0.19016	1	1.03125	1.015625	15.02303	FALSE
7	0.937417	1.015625	1.03125	1.023438	15.0282	FALSE
8	0.381974	1.023438	1.03125	1.027344	15.02913	Parar

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)
0		0	2	1	15
1	2	1	2	1.5	-0.58594
2	-88.9844	1	1.5	1.25	12.61444
3	-25.1404	1	1.25	1.125	14.64264
4	-8.53476	1	1.125	1.0625	14.98525
5	-2.65496	1	1.0625	1.03125	15.02896
6	-0.19016	1	1.03125	1.015625	15.02303
7	0.937417	1.015625	1.03125	1.023438	15.0282
8	0.381974	1.023438	1.03125	1.027344	15.02913
9	0.09802	1.027344	1.03125	1.029297	15.02919
10	-0.04554	1.027344	1.029297	1.02832	15.0292

Resultados do programa



Trabalho Para Casa

Considere o seguinte problema

Maximizar $f(x) = 48x^5 + 42x^3 + 3,5x - 16x^6 - 61x^4 - 16,5x^2$

- Aplique o método de Bisseccção usando um Macro do Excel para resolver aproximadamente esse problema. Use uma tolerância de erro $\varepsilon = 0,0008$ e limites iniciais $[-1$ e $4]$
- Aplique o método de Newton usando um Macro do Excell, com $\varepsilon = 0,0001$ e $x_1 = 1$ a este problema

Enviar até quinta-feira dia 21 de Novembro de 2024