Optimização

Aula 27

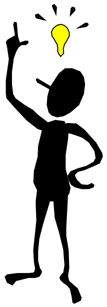
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Não Linear

Aula 27: Programação Não-Linear - Funções de Várias variáveis

- Vector Gradiente;
- Matriz Hessiana;
- Convexidade de Funções e de Conjuntos;
- Condições óptimas de funções irrestritas;
- Método de Busca por Gradiente.

Programação Não Linear



Considere-se o problema de maximização de uma função $f(x)$ com variáveis múltiplas $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ quando não existe nenhuma restrição sobre os valores viáveis. A condição de optimalidade consegue-se igualando as primeira e segunda derivada a zero.

Como a função agora tem várias variáveis, a primeira e segunda derivadas alcança-se introduzindo o conceito de vector Gradiente e matriz Hessiana.

Vector Gradiente

O que é o vector gradiente?

Chama-se gradiente de f no ponto x a um vector cujas componentes são as derivadas parciais de f em x. Pode representar-se por ***grad f(x),*** ou por $\nabla f(x)$, em que ∇ (lê-se *nabla*) e é o operador diferencial definido por:

$$\nabla f\left(x^*\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\left[\dfrac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_1}\dfrac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_n}\right]^T$$

Matriz Hessiana

O que é a matriz Hessiana?

Chama-se Matriz Hessiana de uma função de n variáveis a matriz quadrada n X n das derivadas parciais de segunda ordem da função:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

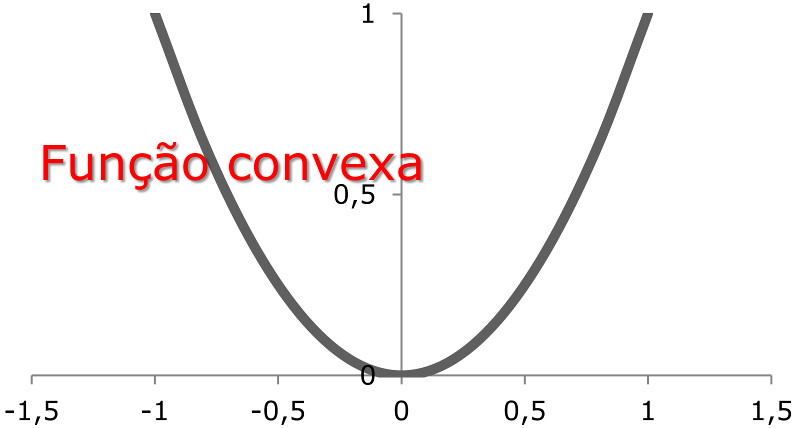
Convexidade

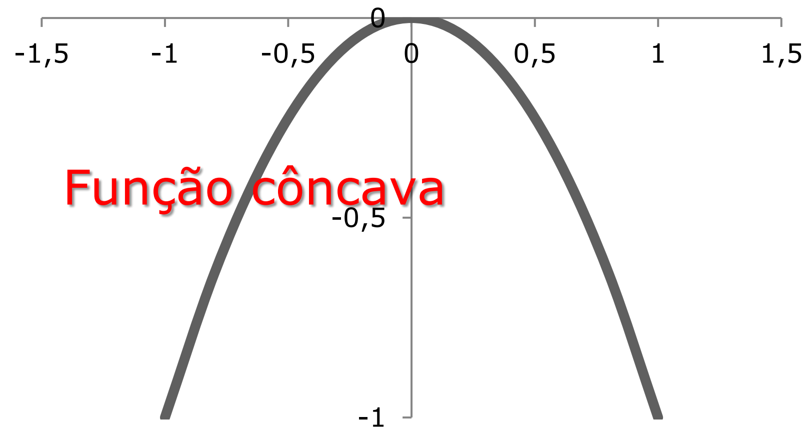
O que é a Convexidade de uma função com uma única variável?

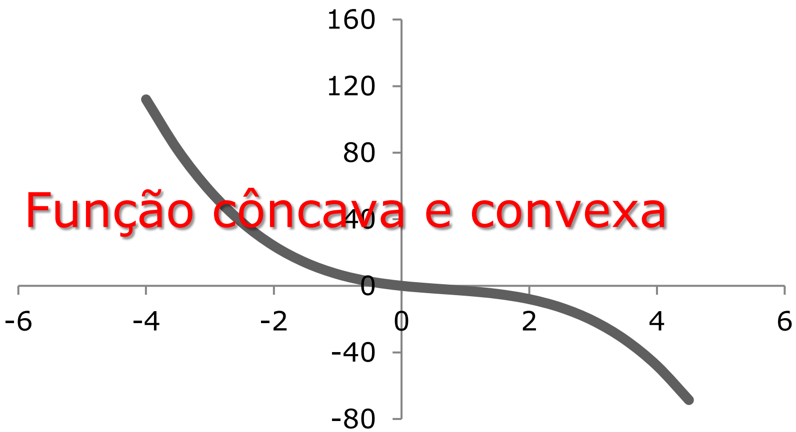
Uma função com uma única variável $f(x)$ é uma função convexa se para cada um dos pares de valores de x´e x” $(x' < x'')$ $f[\lambda x''+(1-\lambda)x'] \leq \lambda(x'')+(1-\lambda)f(x')$ para todos os valores de λ tais que $0< \lambda<1$.

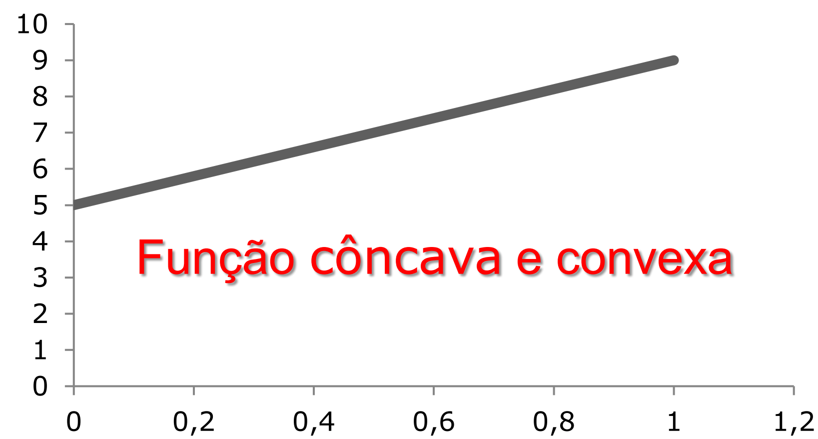
Ela será uma função estritamente convexa se $\leq$ puder ser substituído por <. Ela é uma função côncava (ou uma função estritamente côncava) se essa afirmação continuar válida quando $\leq$ for substituído por $\geq$ (ou por >)

Convexidade









Convexidade

Como se faz o teste de Convexidade de uma função com uma única variável?

Considere-se uma função com uma única variável f(x) que possui uma segunda derivada em todos os possíveis valores de x. Então f(x) é:

Convexa *se e somente se para todos os* ***x***

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \geq 0$$

Estritamente Convexa *se e somente se para todos os* ***x***

$$\frac{d^2 f}{dx^2} > 0$$

Convexidade

Côncava** se e somente se para todos os **x

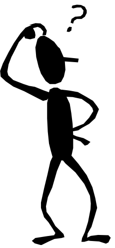
$$\frac{d^2 f}{dx^2} \leq 0$$

Estritamente Côncava** se e somente se para todos os **x

$$\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$$

É de notar que uma função estritamente convexa também é convexa, mas uma função convexa não é estritamente convexa se a segunda derivada for igual a zero para alguns valores de x. de forma similar uma função estritamente côncava é côncava porém o inverso não é necessariamente verdadeiro.

Convexidade



O que é a Convexidade de uma função com várias variáveis?

Uma função com várias variáveis $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ é uma função **convexa** se para cada pares de pontos na curva $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, o segmento de recta que une esses dois pontos cai inteiramente em cima ou sobre a curva de $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Ela é uma função **estritamente convexa** se esse segmento de recta realmente cair inteiramente acima dessa curva excepto nos pontos extremos do segmento de recta. As funções **côncavas** e **estritamente côncavas** são definidas da mesma forma, excepto pelo facto de acima ser substituído por abaixo.

Convexidade

Como se faz o teste de Convexidade de uma função com várias variáveis?

Uma função de n variáveis $f(x_1,x_2,...x_n)$ definida num conjunto convexo **S** é:

Convexa *se e somente se a matriz Hessiana da função for positiva semi-definida em todos os pontos do conjunto* ***S****.*

Estritamente Convexa *se e somente se a matriz Hessiana da função for positiva definida em todos os pontos do conjunto* ***S****.*

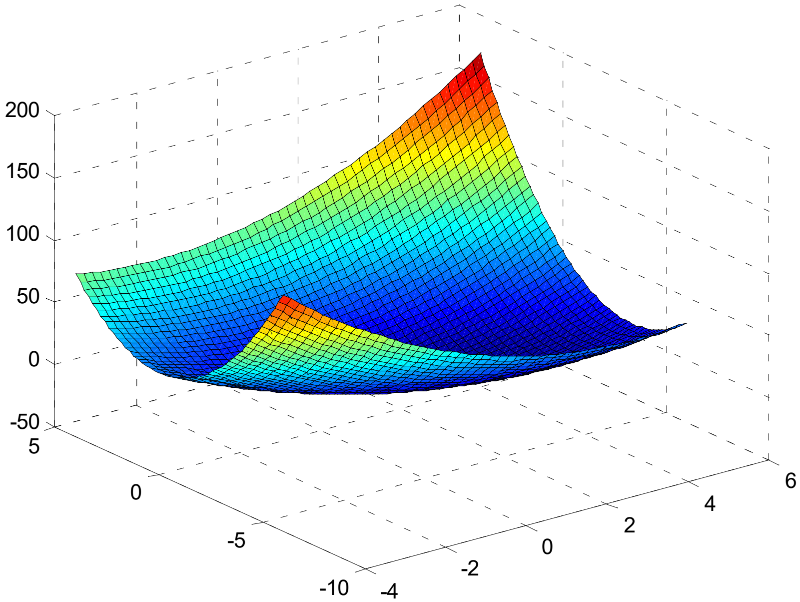
Convexidade

Concava *se e somente se a matriz Hessiana da função for negativa semi-definida em todos os pontos do conjunto* ***S****.*

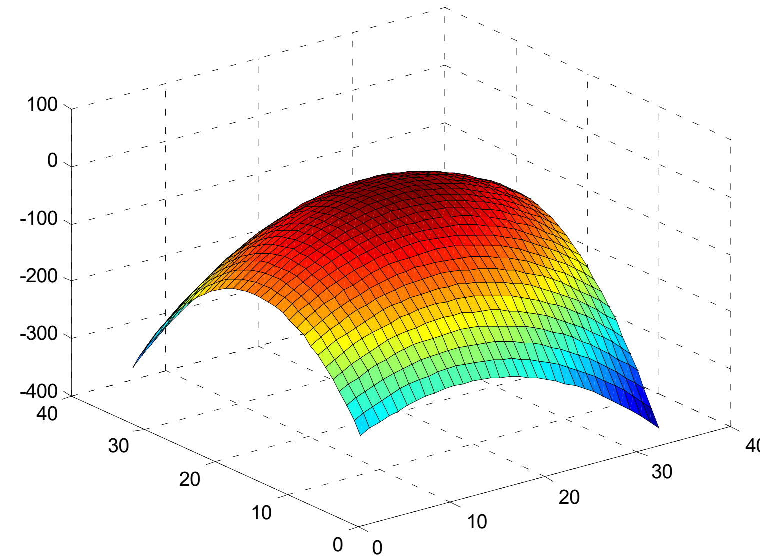
Estritamente Concava *se e somente se a matriz Hessiana da função for negativa definida em todos os pontos do conjunto* ***S****.*

Convexidade

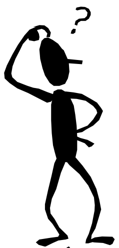
Função convexa



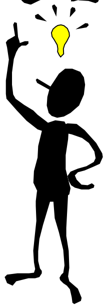
Função côncava



Convexidade



O que um conjunto convexo?

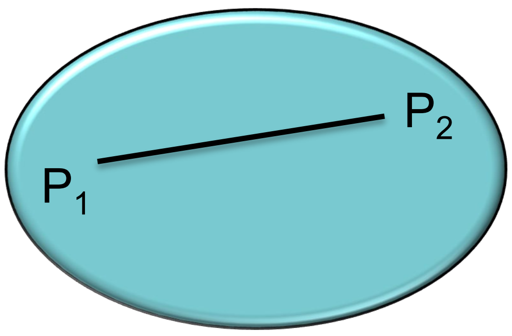


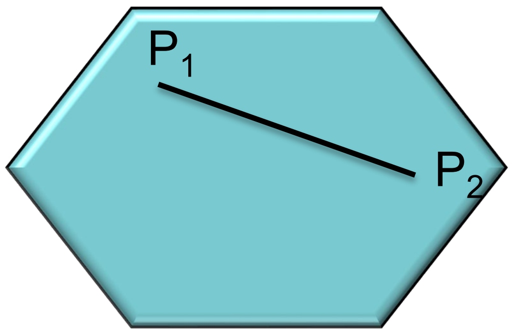
Um conjunto convexo é um conjunto de pontos tal que, para cada par de pontos no conjunto, todo o segmento de recta que une esses dois pontos também se encontra no conjunto.

As figuras mostram alguns casos de conjuntos convexos e não convexos.

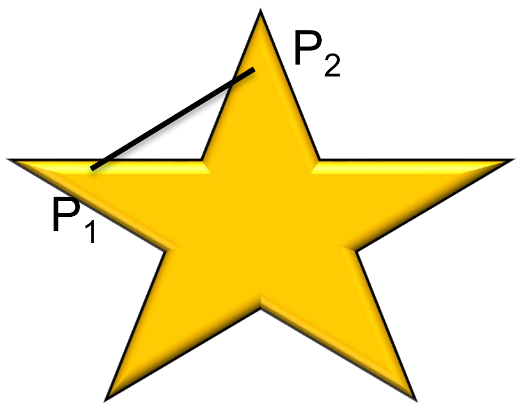
Convexidade

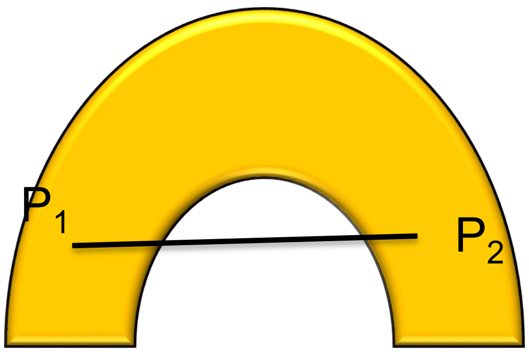
Conjuntos Convexos





Conjuntos não convexos





Condições Óptimas para Funções de várias Variáveis sem restrições

Seja $\boldsymbol{x}^*$ um ponto mínimo local da função $\boldsymbol{f(x)}$. Para investigar a sua vizinhança, seja **x** um ponto perto de $\boldsymbol{x}^*$. Escrevendo a Série de Taylor em notação matricial obtém-se:

$$f(x) = f\left(x^*\right) + \nabla f\left(x^*\right)^T d + \tfrac{1}{2} d^T H\left(x^*\right) d + R$$

Defina-se o incremento $\boldsymbol{\Delta f}$ em em $\boldsymbol{f(x^*)}$ como:

$$\Delta f = \nabla f\left(x^*\right)^T d + \tfrac{1}{2} d^T H\left(x^*\right) d + R$$

Condições Óptimas para Funções de várias Variáveis sem restrições

Se assumir-se um mínimo local em *x** daí Δf não deve ser negativo, isto é $\Delta f \geq 0$. Concentrando-se só nos termos de primeira ordem observa-se como antes que Δf pode ser não negativo para todos os d possíveis quando:

$$\nabla f\left(x^*\right)^T d = 0$$

Isto é o gradiente da função no ponto x* tem de ser zero. Esta condição pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1 \ldots n$$

Condições Óptimas para Funções de várias Variáveis sem restrições

Os pontos que satisfazem a equação anterior são chamados pontos estacionários. Considerando o segundo termo na equação de Taylor avaliado para um ponto estacionário, a positividade de Δf está assegurada se:

$$d^T H\left(x^*\right)d > 0$$

para todos os $d \neq 0$. Isso será verdadeiro se a Hessiana $H(x^*)$ for uma matriz positiva definida que será a condição suficiente para um mínimo local de $f(x)$ no ponto x^*.

Condições Óptimas para Funções de várias Variáveis sem restrições

Teorema: Condições necessárias e suficientes para que haja um mínimo local**.** Se ***f(x)*** for um mínimo local no ponto ***x**** então:

$$\frac{\partial f\left(x^{*}\right)}{\partial x_i} = 0 \qquad\qquad para \quad i = 1 \ldots n$$

Condições necessárias de segunda ordem.

Se *f(x)* for um mínimo local no ponto *x**, daí a matriz Hessiana:

$$H\left(x^{*}\right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{(nxn)}$$

terá de ser semi-definida positiva ou definida positiva

no ponto x*

Condições Óptimas para Funções de várias Variáveis sem restrições

Condições suficientes de segunda ordem: Se a matriz *H(x*)* for definida positiva no ponto estacionário ***x**** , daí ***x**** é um ponto mínimo local para a função ***f(x)***.

Nota: As condições envolvem a derivada de *f(x)* e não o valor da função.

Forma da matriz (I)

Teorema: Forma da matriz através de autovalores

Seja λ_i, $i = 1$ até n, autovalores de uma matriz simétrica H $n \times n$, associada à forma quadrática pode-se determinar a partir dos seguintes resultados da forma quadrática ou da matriz A.

Forma da matriz (II)

F(x)** é **positiva definida** se e somente se, todos os autovalores de **H** forem positivos, isto é:* $\boldsymbol{\lambda_i > 0}$, i = 1** até **n**.*

F(x)** é **positiva semi-definida** se e só se os autovalores de **H** forem não negativos, isto é:* $\boldsymbol{\lambda_i \geq 0}$, i = 1** até **n**.*

***F(x)** é **negativa definida** se e somente se todos os autovalores de **H** forem negativos isto é:* $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$.

***F(x)** é **negativa semi-definida** se e somente se todos os autovalores de **H** forem não positivos, isto é:* $\boldsymbol{\lambda_i \leq 0}$.

***F(x)** é **indefinida** se alguns valores* $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ *e outros valores* $\boldsymbol{\lambda_i > 0}$.

Condições para que uma matriz seja Definida Positiva

*Uma matriz é **definida positiva** se e só se puder ser reduzida a uma matriz triangular superior, utilizando somente as operações elementares sobre linhas (adição a qualquer linha elemento por elemento de uma outra linha multiplicada por um escalar).*

*Uma matriz é **definida positiva** se e só se todos os seus menores principais forem positivos.*

*Uma matriz é **definida positiva** se e só se os seu valores próprios (autovalores) forem positivos.*

Autovalores e autovectores

Dada uma matriz a de n x n, qualquer vector x de valores diferentes de zero satisfaz a equação:

$$Ax = \lambda x$$

Onde λ é um factor de escala, chamado autovector e os escalares λ são chamados autovalores. Desde que $x \neq 0$, vê-se que λ dá as raízes da equação característica:

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

A última equação dá-nos o grau do polinómio de λ

Autovalores e autovectores

Depois da determinação dos autovalores, os autovectores podem ser determinados pela equação:

$$Ax = \lambda x$$

Os coeficientes da matriz A tanto podem ser simétricos como também assimétricos. Em muitas das aplicações A é uma matriz simétrica.

•Os autovalores e autovectores de uma matriz real são reais. Eles podem ser imaginários para matrizes reais não simétricas

•Os autovectores correspondentes a distintos autovalores de matrizes reais simétricas, são ortogonais

Autovalores e autovectores
Exemplo 27.1

Calcule os autovalores e os autovectores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores do problema são definidos como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A característica polinomial é dada por:

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

Autovalores e autovectores Exemplo 27.1

Então:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

As raízes deste polinómio são: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, daí os autovalores são 3 e 1

Os autovectores para $\lambda_1 = 3$,dados pela primeira equação são:

$$\begin{bmatrix} (2-3) & 1 \\ 1 & (2-3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$x^{(1)} = \left(1/\sqrt{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e autovectores
Exemplo 27.1

Os autovectores para $\lambda_2 = 1$,dados pela primeira equação são:

$$\begin{bmatrix} (2-1) & 1 \\ 1 & (2-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$x^{(2)} = \left(1/\sqrt{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Método da matriz triangular
Exemplo 27.2

Dada a matriz A de dimensão 3 x 3 determine a sua forma.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Método da matriz triangular
Exemplo 27.2

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 16/3 & -4/3 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Adicionando a primeira linha multiplicada por -1/3 à segunda

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 16/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & 28/3 \end{bmatrix}$$

Adicionando a primeira linha multiplicada por 1/3 à terceira

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 16/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 27/3 \end{bmatrix}$$

Adicionando a segunda linha multiplicada por 1/4 à terceira

Os *pivots* **6**, **16/3** e **27/3** são todos positivos a matriz é definida positiva

Método dos determinantes
Exemplo 27.2

Os menores principais de A são:

$$\det[6] = 6$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 288$$

Como todos os três menores principais são positivos, a matriz é definida positiva

Método da matriz triangular
Exemplo 27.3

Dada a matriz A de dimensão 3 x 3 determine a sua forma:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Método da matriz triangular
Exemplo 27.3

Adicionando a primeira linha multiplicada por (-5) à segunda linha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 0 & -45 & 18 \\ -2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Como o segundo pivot, -45 é negativo, A não e definida positiva nem semi-definida positiva, pode-se pôr de parte que A seja definida negativa ou semi-definida negativa, porque o primeiro pivot 2 não é negativo.

Método da matriz triangular
Exemplo 27.4

Dada a matriz A de dimensão 4 x 4 determine a sua forma:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 & 8 \\ -3 & 11 & -5 & -8 \\ 5 & -5 & 19 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Método da matriz triangular
Exemplo 27.4

Utilizando somente operações elementares sobre linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 112/111 & -40/11 & -112/11 \\ 0 & 0 & 108/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como nem todos os pivots, 11, 112/11, 108/7 e 0 são positivos, a matriz não é definida positiva. No entanto estes pivots são não negativos; assim A é semi-definida positiva.

Condições Óptimas para Funções de várias Variáveis sem restrições. Exemplo 27.5

Procurar o mínimo local para a seguinte função de duas variáveis:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 8$$

Solução: As condições necessárias do problema dão:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \begin{bmatrix} (2x_1 + 2x_2 - 2) \\ (2x_1 + 4x_2 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta equação é linear em relação as variáveis x_1 e x_2. Se este sistema tiver solução, esta será única. Resolvendo o sistema em simultâneo obtém-se os pontos estacionários :

$$x^* = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

Condições Óptimas para Funções de várias Variáveis sem restrições. Exemplo 27.5

Para saber se o ponto estacionário é um mínimo local é necessário
Avaliar a Hessiana no ponto x^*

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

H é positiva definida no ponto estacionário x^*, dai é um ponto mínimo local com $f(x) = 4.75$

Método de Busca por Gradiente

Inicialização: Seleccione a tolerância ε e uma solução experimental inicial x´ qualquer. Vá primeiramente para a regra de paragem.

Iteração:

1. Expresse $f\left(x' + t\nabla f\left(x'\right)\right)$ em função de t fazendo que :

$$x_j = x'_j + t\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x=x'} \qquad para\ j = 1,2,\ldots n.$$

e depois substitua essa expressão em $f\left(x\right)$

Método de Busca por Gradiente

2. Use um procedimento de busca para optimização irrestrita de uma variável (ou cálculo) para encontra $t = t^*$ que maximize $f\left(x' + t\nabla f\left(x'\right)\right)$ ao longo de $t \geq 0$.

3. Reinicialize $x' = x' + t^* \nabla f\left(x'\right)$. A seguir vá para a regra de paragem

Regra de Paragem: calcule $\nabla f\left(x'\right)$ *em* $x = x'$. Verifique se

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \leq \varepsilon \qquad \text{para todo o} \quad j = 1, 2, \ldots n$$

Caso positivo pare no x' e aceite-o como solução, caso contrário realize mais uma iteração.

Método de Busca por Gradiente

Maximizar a função $f(x)=2x_1x_2+2x_2-x_1^2-2x_2^2$

As derivadas em função de x_1 e x_2 são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx_1} = 2x_2 - 2x_1$$

$$\frac{df(x)}{dx_2} = 2x_1 + 2 - 4x_2$$

Para iniciar o método de busca por gradiente, depois de escolher um valor adequadamente pequeno para ε (normalmente bem abaixo de 0,1) suponha que x= 0 seja seleccionado como solução experimental inicial.

Método de Busca por Gradiente

Pelo facto das respectivas derivadas parciais serem 0 e 2 nesse ponto o gradiente fica:

$$\nabla f(0,0) = (0,2)$$

Como ε ≤ 2, a regra de paragem diz para realizar mais uma iteração.

Iteração 1 : Com valores iguais a 0 e 2 para as respectivas derivadas parciais a primeira iteração começa fazendo com que:

$$x_1 = 0 + t(0) = 0,$$

$$x_2 = 0 + t(2) = 2t$$

Método de Busca por Gradiente

E depois substituindo essas expressões em f(x) para obter:

$$f\left(x' + t\nabla f\left(x'\right)\right) = f\left(0,2t\right)$$

$$= 2\left(0\right)\left(2t\right) + 2\left(2t\right) - 0^2 - 2\left(2t\right)^2$$

$$= 4t - 8t^2$$

como:

$$f\left(0,2t^*\right) = \max_{t\geq 0} f\left(0,2t\right) = \max_{t\geq 0}\left(4t - 8t^2\right)$$

$$e\ \frac{d}{dt}\left(4t - 8t^2\right) = 4 - 16t = 0 \Rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

Reinicialize $x' = \left(0,0\right) + \frac{1}{4}\left(0,2\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right)$

Método de Busca por Gradiente

Para essa nova solução experimental o gradiente é:

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{2}\right) = (1, 0)$$

Como ε ≤ 1, a regra de paragem diz para realizar mais uma iteração.

Iteração 2: Com valores iguais a 1 e 0 para as respectivas derivadas parciais a primeira iteração começa fazendo que

$$x_1 = 0 + t(1) = t,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + t(0) = \frac{1}{2}$$

Método de Busca por Gradiente

E depois substituindo essas expressões em f(x) para obter:

$$f\left(x' + t\nabla f\left(x'\right)\right) = f\left(0 + t, \frac{1}{2} + 0t\right)$$

$$= 2\left(t\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) - t^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= t - t^2 + \frac{1}{2}$$

como:

$$f\left(t^*, \frac{1}{2}\right) = \max_{t\geq 0} f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \max_{t\geq 0}\left(t - t^2 + \frac{1}{2}\right)$$

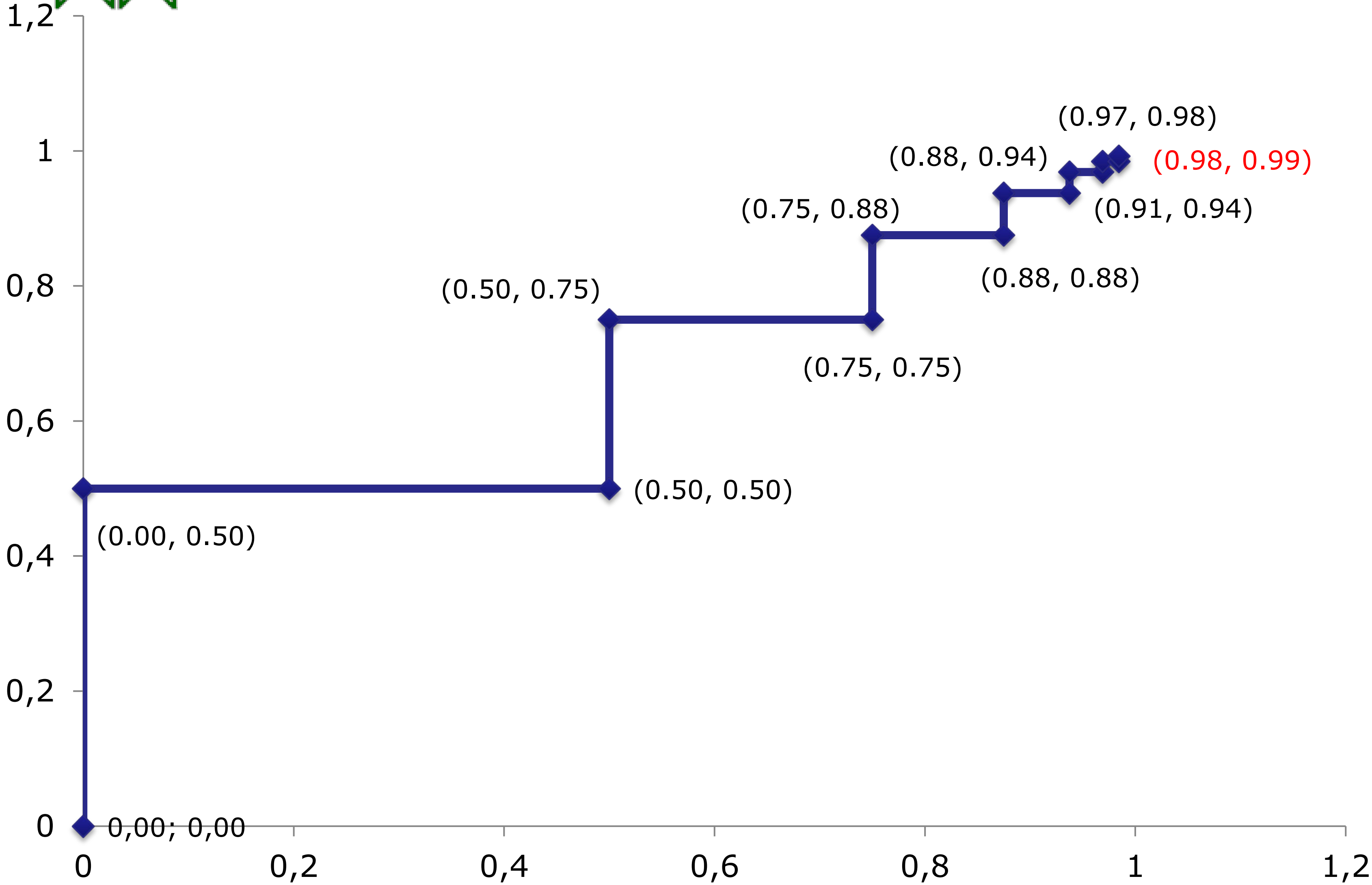
$$e \ \frac{d}{dt}\left(t - t^2 + \frac{1}{2}\right) = 1 - 2t = 0 \Rightarrow t^* = \frac{1}{2}$$

$$\text{Reinicialize } x' = \left(0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Método de Busca por Gradiente

Uma maneira interessante de se organizar o trabalho é como se apresenta na tabela a seguir:

Iteração	x_1	x_2	df/dx_1	df/dx_2	$f(x_1,x_2)$	t*	x_1'	x_2'
1	0	0	0	2	0	0,25	0	0,5
2	0	0,5	1	0	0,5	0,5	0,5	0,5
3	0,5	0,5	0	1	0,75	0,25	0,5	0,75
4	0,5	0,75	0,5	0	0,875	0,5	0,75	0,75
5	0,75	0,75	0	0,5	0,9375	0,25	0,75	0,875
6	0,75	0,875	0,25	0	0,96875	0,5	0,875	0,875
7	0,875	0,875	0	0,25	0,984375	0,25	0,875	0,9375
8	0,875	0,9375	0,125	0	0,992188	0,5	0,9375	0,9375
9	0,9375	0,9375	0	0,125	0,996094	0,25	0,9375	0,96875
10	0,9375	0,96875	0,0625	0	0,998047	0,5	0,96875	0,96875
11	0,96875	0,96875	0	0,0625	0,999023	0,25	0,96875	0,984375
12	0,96875	0,984375	0,03125	0	0,999512	0,5	0,984375	0,984375
13	0,984375	0,984375	0	0,03125	0,999756	0,25	0,984375	0,992188
14	0,984375	0,9921875	0,015625	0	0,999878	0,5	0,992188	0,992188


1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
(0.97, 0.98)
(0.88, 0.94)
(0.98, 0.99)
(0.75, 0.88)
(0.91, 0.94)
(0.88, 0.88)
(0.50, 0.75)
(0.75, 0.75)
(0.50, 0.50)
(0.00, 0.50)
0,00; 0,00

Método de Busca por Gradiente

Se $f(x)$ não fosse uma função côncava o método de busca por gradiente ainda convergiria para um máximo local. A única alteração na descrição do procedimento para esse caso é que t^* agora corresponderia ao primeiro máximo local de $f(x' + t\nabla f(x'))$ à medida que t for incrementado a partir de 0.

Se, ao contrário, o objectivo fosse minimizar $f(x)$, uma alteração no procedimento seria mover-se na direcção oposta do gradiente a cada iteração. Em outras palavras, a regra para obter o ponto seguinte seria:

Método de Busca por Gradiente

Reinicialize $x' = x' - t^* \nabla f\left(x'\right)$. A seguir vá para a regra, a única aletaração é que t* seria o valor não negativo de t que minimiza $f\left(x' - t\nabla f\left(x'\right)\right)$ isto é:

$$f\left(x' - t^* \nabla f\left(x'\right)\right) = \min_{t \geq 0} f\left(x' - t\nabla f\left(x'\right)\right)$$