Optimização

Aula 30

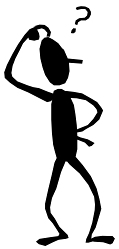
Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Não Linear com Restrições

Aula 30: Programação Não-Linear - Funções de Várias Variáveis com Restrições (Prática)

- Ponto Regular;
- Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias;
- Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K-T);
- Programação Convexa.

Problema 30.1



Encontre os pontos estacionários, com as condições K-T, para a seguinte função:

$$f\left(x_1, x_2\right) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 - 2x_1$$

$$s.a.$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

Problema 30.1 (Resolução I)

A equação de Lagrange determina-se de:

$$L(x_1,x_2,v)=3x_1^2+2x_2^2-5x_1x_2-2x_1+v(x_1+x_2-4)$$

As condições K-T dão o seguinte:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=6x_1-5x_2-2+v=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=4x_2-5x_1+v=0$$

$$x_1+x_2-4=0$$

Problema 30.1 (Resolução II)

Obtém-se um sistema de três equações com três incógnitas

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 - 2 + v = 0 \\ 4x_2 - 5x_1 + v = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Problema 30.1 (Resolução III)

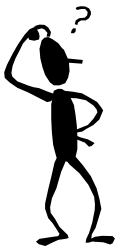
Resolvendo-o por substituição

$$\begin{cases} 24-6x_2-5x_2-2+\nu=0 \\ 4x_2-20+5x_2+\nu=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 22-11x_2+\nu=0 \\ -20+9x_2+\nu=0 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto estacionário tem as coordenadas $x_1=1,9$ e $x_2=2,1$; e o multiplicador de Lagrange $\nu=1,1$

$$\begin{cases} x_1=1,9 \\ x_2=2,1 \\ \nu=1,1 \end{cases}$$

Problema 30.2



Encontre a solução óptima do seguinte problema:

$$Maximize\ f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - x_2^3$$

$$s.a:$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$com$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema 30.2 (Resolução I)

Passando o problema para a forma padrão tem-se

$$Minimize\ \ -f\left(x_1, x_2\right) = -x_1 - 2x_2 + x_2^3$$

$$s.a:$$

$$x_1 + x_2 - 1 \leq 0$$

$$com$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema 30.2 (Resolução II)

Aplicando as condições K-T obtém-se:

$$L(x_1, x_2, u, s) = -x_1 - 2x_2 + x_2^3 + u\left(x_1 + x_2 - 1 + s^2\right)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, u, s)}{\partial x_1} = -1 + u = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, u, s)}{\partial x_2} = -2 + 3x_2^2 + u = 0$$

$$x_1 + x_2 - 1 + s^2 = 0$$

$$us = 0$$

$$u \geq 0$$

Problema 30.2 (Resolução III)

Obtém-se um sistema de quatro equações com quatro incógnitas

$$\begin{cases} -1+u=0 \\ -2+3x_2^2+u=0 \\ x_1+x_2-1+s^2=0 \\ us=0 \\ u\geq 0 \end{cases}$$

*Fazendo **u=0**, obtém-se:*

$$\begin{cases} -1=0 \Rightarrow impossível \\ -2+3x_2^2=0 \\ x_1+x_2-1+s^2=0 \\ us=0 \\ u\geq 0 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto não pode ser candidato pois existe a contradição de -1 ser igual a zero.

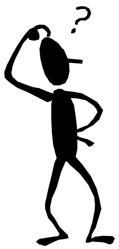
Problema 30.2 (Resolução IV)

Fazendo ***s=0****, obtém-se:*

$$\begin{cases} u=1 \\ -2+3x_2^2+1=0 \\ x_1+x_2-1=0 \\ u\geq 0 \end{cases} \begin{cases} u=1>0 \\ x_2=\sqrt{\frac{1}{3}}=0,577 \\ x_1=1-\sqrt{\frac{1}{3}}=0,423 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto estacionário que maximiza a função tem as coordenadas: $x_1,x_2=(0,423;0,577)$, o multiplicador de Lagrange u=1 e o valor da função nesse ponto é de 1,385.

Problema 30.3



Resolva o seguinte problema utilizando as condições K-T:

$$Minimize\ f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

$$s.a.$$

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_1^2 - x_2^2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema 30.3 (Resolução I)

Passando o problema para a forma padrão tem-se:

$$Minimize\ f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

$$s.a.$$

$$x_1 + 2x_2 - 4 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2^2 + 4 \leq 0$$

Problema 30.3 (Resolução II)

A equação de Lagrange determina-se de:

$$L(x_1,x_2,v)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+v(x_1+2x_2-4)+u(-x_1^2+x_2^2+4+s^2)$$

As condições K-T dão o seguinte:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+x_2+v-2ux_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=x_1+2x_2+2v+2ux_2=0$$

$$x_1+2x_2-4=0$$

$$-x_1^2+x_2^2+4+s^2=0$$

$$us=0$$

$$u\geq 0$$

Problema 30.3 (Resolução III)

Obtém-se um sistema de cinco equações com cinco incógnitas

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + v - 2ux_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2v + 2ux_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + 4 + s^2 = 0 \\ us = 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

*Fazendo **u=0**, obtém-se:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + v = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2v = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + 4 + s^2 = 0 \\ us = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3 \quad v = 2 \quad s^2 = -9$$

Conclui-se que o ponto não pode ser candidato pois x_1 viola a condição de não negatividade e também s^2=-9 o que torna-se impossível.

Problema 30.3 (Resolução IV)

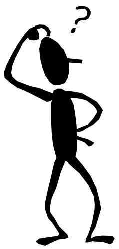
Fazendo ***s=0****, obtém-se:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + v - 2ux_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2v + 2ux_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + 4 = 0 \\ us = 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 2{,}194$$
$$x_2 = 0{,}903$$
$$v = -2{,}562$$
$$u = 0{,}622$$

Conclui-se que o ponto com as coordenadas $(x_1, x_2) = (2{,}194;0{,}903)$ é o ponto que minimiza a função com o valor de $f(x)=9{,}592$ com os valores de $v=-2{,}562$ e $u=0{,}622$.

Problema 30.4



Pretende-se projectar um termopermutador de calor de tubo e carcaça com o comprimento L. O objectivo principal do projecto consiste em maximizar a área de transferência de calor do termopermutador, sabendo-se que a área da secção transversal da carcaça é de 2500 cm^2 e que o raio mínimo dos tubos disponíveis no mercado é de 0,5 cm. Estabeleça as condições K-T para este problema de optimização e determine o número de tubos necessário para optimizar a transferência de calor.

Problema 30.4 (Resolução I)

A função custo consiste em determinara a área máxima de transferência de calor, que se obtém do perímetro do tubo, multiplicado pelo comprimento do tubo e pelo número de tubos e determina-se de:

$$Max \quad 2\pi RLN$$

A área disponível para a colocação dos tubos não deve ultrapassar os 2500 cm^2.

$$\pi R^2 N \leq 2500$$

O diâmetro mínimo de tubos no mercado é de 0,5 cm.

$$R \geq 0{,}5$$

Problema 30.4 (Resolução II)

Como a maximização do termopermutador não depende da variação do comprimento do tubo mas só da secção da carcaça e dos diâmetros dos tubos o problema passa a ser:

$$\begin{aligned}
&Max \quad 2\pi RN \\
&sa: \\
&\pi R^2 N \leq 2500 \\
&R \geq 0{,}5
\end{aligned}$$

Problema 30.4 (Resolução III)

Passando o problema para a forma padrão tem-se

$$Min \;\; -2\pi RN$$

$$\pi R^2 N - 2500 \leq 0$$

$$0,5 - R \leq 0$$

Introduzindo as variáveis de folga obtém-se:

$$Min \;\; -2\pi RN$$

$$\pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0$$

$$0,5 - R + s_2^2 = 0$$

Problema 30.4 (Resolução IV)

Aplicando as condições K-T obtém-se:

$$L = -2\pi RN + u_1\left(\pi R^2 N - 2500 + s_1^2\right) + u_2\left(0,5 - R + s_2^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial N} = -2\pi R + u_1 \pi R^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = -2\pi N + 2u_1 \pi RN - u_2 = 0$$

$$\pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0$$

$$0,5 - R + s_2^2 = 0$$

$$u_1 s_1 = 0$$

$$u_2 s_2 = 0$$

$$u_1, u_2 \geq 0$$

Problema 30.4 (Resolução V)

Que é um sistema de seis equações com seis incógnitas:

$$-2\pi R + u_1 \pi R^2 = 0$$

$$-2\pi N + 2u_1 \pi R N - u_2 = 0$$

$$\pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0$$

$$0{,}5 - R + s_2^2 = 0$$

$$u_1 s_1 = 0$$

$$u_2 s_2 = 0$$

$$u_1, u_2 \geq 0$$

Para se resolver este sistema de equações existem quatro combinações possíveis:

$u_1, u_2 = 0$ *ou* $u_1, s_2 = 0$ *ou* $s_1, u_2 = 0$ *ou* $s_1, s_2 = 0$

Problema 30.4 (Resolução VI)

Resolvendo o sistema de equações:
para $u_1,u_2 = 0$

$$\begin{cases} 2\pi R = 0 \\ -2\pi N = 0 \\ -2500 + s_1^2 = 0 \\ 0,5 + s_2^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R = 0 \\ N = 0 \\ s_1^2 = 2500 \\ s_2^2 = -0,5 \quad \text{(impossivel)} \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto viola a condição da variável de folga s_2^2 ser maior ou igual a zero o que faz com que o ponto não possa ser candidato a óptimo.

Problema 30.4 (Resolução VII)

Resolvendo o sistema de equações:
para $u_1,s_2=0$

$$\begin{cases} -2\pi R = 0 \quad R = 0 \text{ o que contradiz } R = 0,5 \\ -2\pi N + 2u_1\pi R - u_2 = 0 \\ \pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0 \\ R = 0,5 \end{cases}$$

Com uma das equações obtém-se R=0 e com outra R=0,5 o que é uma contradição o que faz com que o ponto não possa ser candidato a óptimo.

Problema 30.4 (Resolução VIII)

Resolvendo o sistema de equações:
para $u_2, s_1 = 0$

$$\begin{cases} -2\pi R + u_1 \pi R^2 = 0 \\ -2\pi N + 2u_1 \pi R N = 0 \\ \pi R^2 N - 2500 = 0 \\ 0,5 - R + s_2^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -R = 0 \Rightarrow R = 0 \\ 1 = u_1 R \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{R} \quad \textit{não satisfaz} \\ N = 0 \\ s_2^2 = -0,5 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto viola a condição da variável de folga s_2^2 ser maior ou igual a zero o que faz com que o ponto não possa ser candidato a óptimo.

Problema 30.4 (Resolução IX)

Resolvendo o sistema de equações:
para $s_2, s_1 = 0$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2\pi R}{\pi R^2} = \dfrac{2}{R} \\ -2\pi N + 2\dfrac{2}{R}\pi R - u_2 = 0 \\ N = \dfrac{2500}{\pi R^2} = \dfrac{2500}{\pi 0,5^2} = 3183,09 \\ R = 0,5 \end{cases} = \begin{cases} u_1 = 4 \\ -2\pi N + 4\pi N - u_2 = 0 \\ N = 3183,09 \\ R = 0,5 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_2 = 2\pi N = 20000 \\ N = 3183,09 \\ R = 0,5 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto estacionário com as coordenadas: número de tubos $N=3183$ de raio $R=0,5$ cm é que maximiza a função com a área de 10000 cm^2

Problema 30.4 (Resolução X)

Para testar a convexidade do problema analisa-se primeiro a convexidade da função custo através da sua Hessiana

$$\frac{\partial f}{\partial N} = -2\pi R \qquad \frac{\partial f}{\partial R} = -2\pi R$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial N^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial R \partial N} = -2\pi$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2\pi \\ -2\pi & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4\pi^2 < 0$$

$d_1=0$, $d_2 < 0$, a função é negativa semi-definida por isso côncava.

Problema 30.4 (Resolução XI)

Para testar a convexidade do problema analisa-se depois a convexidade da restrição através da sua Hessiana

$$\frac{\partial g_1}{\partial N} = \pi R^2$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial R} = 2\pi RN$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial N^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial R^2} = 2\pi N$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial R \partial N} = 2\pi R$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2\pi R \\ 2\pi R & 2\pi N \end{vmatrix} = 0 - 4\pi^2 R^2 < 0$$

d_1=0, d_2 < 0, a restrição é negativa semi-definida por isso côncava. A função objectivo é côncava, as restrições de desigualdade uma é não linear e é côncava e a outra é linear, então trata-se de programação côncava e os pontos estacionários não são um mínimo, mas sim um máximo.

Trabalho Para Casa

Com o auxilio do Solver do Excel resolver o seguinte problema:

Maximizar $f(x) = 4x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$

sa:

$x_1^2 + 2x_2^2 \leq 4$

$x_1 - 3x_2 \leq 3$

$x_1x_2^{\,2} + x_1^2x_2 = 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Enviar até a 0 hora do dia 25 de Novembro de 2024.