Transmissão de calor

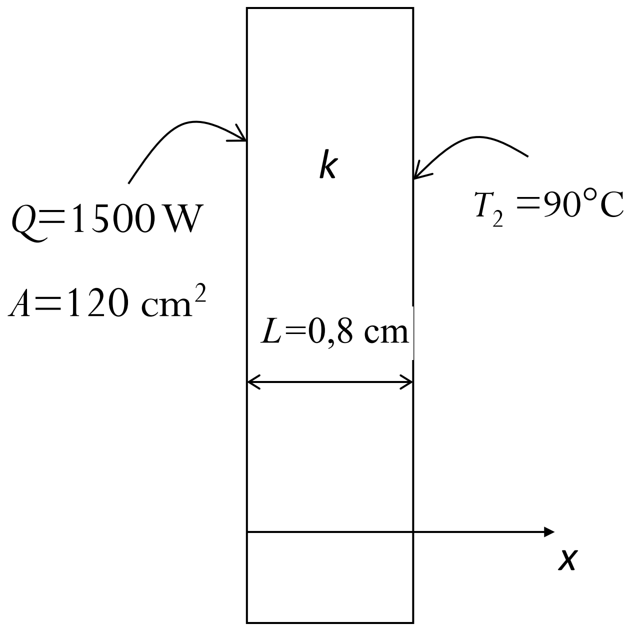
3º Ano

Aula 4 Aula Prática-1

- Equação Diferencial de Transmissão de Calor e as Condições de Contorno

Problema -4.1

Um ferro de engomar com uma base plana de área 120 cm^2 é submetido a um fluxo de calor de 1500 W na superfície esquerda e a uma temperatura especificada de 90°C na superfície direita (veja esquema). Escreva a equação de condução de calor para este caso sabendo que a espessura da placa é de L=0,8 cm e que o coeficiente de condutibilidade térmica k= 25 W/m°C. Determine a temperatura na superfície esquerda e a variação de temperatura na base do ferro.



Problema -4.1 (Resolução I)

Assume-se:

1.Escoamento estacionário e unidimensional sendo a espessura da base do ferro desprezível;

2.Condutibilidade térmica constante ($k = 25\,\mathrm{W/m{\cdot}^{\circ}C}$);

3.Não há geração de calor no ferro;

4.Desprezam-se as perdas de calor na parte superior do ferro.

Problema -4.1 (Resolução II)

Desprezando as perdas de calor, todo calor gerado pela resistência eléctrica do ferro transfere-se para a base. O fluxo de calor no interior da base determina-se de:

$$\dot{q}_0 = \frac{\dot{Q}_0}{A_{\text{base}}} = \frac{1500 \text{ W}}{120 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 125.000 \text{ W/m}^2$$

Assumindo que a direcção normal é a do eixo x, para x=0 a esquerda da superfície, a equação de condução de calor para este caso será:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Pois, o regime é estacionário, não há geração de calor no interior da base e a condutibilidade térmica é constante.

Problema -4.1 (Resolução III)

Das condições iniciais e condições de fronteira obtém-se;

$$-k\frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 = 125.000\ \text{W/m}^2$$

E pode-se escrever que:

$$T(L) = T_2 = 90°\text{C}$$

Integrando a equação diferencial duas vezes em função de x, resulta:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \qquad\qquad T(x) = C_1 x + C_2$$

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Problema -4.1 (Resolução IV)

Aplicando as condições de fronteira tem-se:

$x = 0$: $-kC_1 = \dot{q}_0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\dfrac{\dot{q}_0}{k}$ visto que $-k\dfrac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0$

$x = L$: $T(L) = C_1 L + C_2 = T_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_2 - C_1 L \quad \rightarrow \quad C_2 = T_2 + \dfrac{\dot{q}_0 L}{k}$

Substituindo os valores de C_1 e C_2 na equação:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Problema -4.1 (Resolução V)

Resulta:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_0}{k}x + T_2 + \frac{\dot{q}_0 L}{k} = \frac{\dot{q}_0 (L-x)}{k} + T_2$$

$$T(x) = \frac{(125000\ \text{W/m}^2)(0,008-x)\text{m}}{25\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}} + 90^\circ\text{C}$$

$$T(x) = 5000(0,008-x) + 90 = -5000x + 130$$

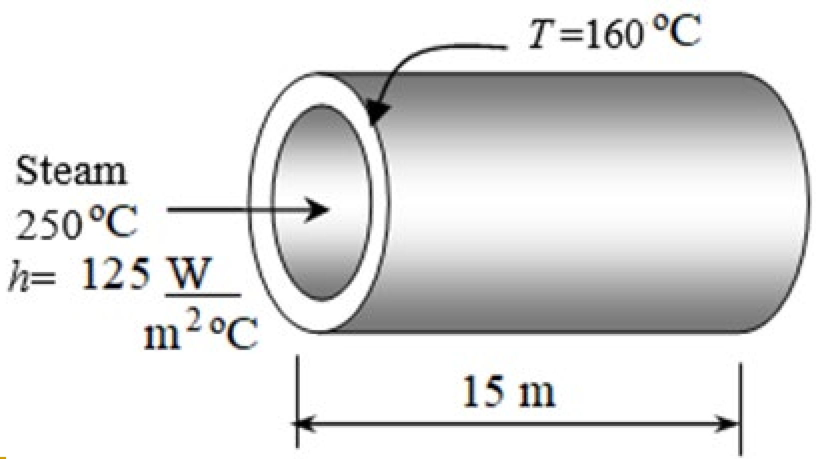
Que é a equação para cálculo da temperatura em qualquer ponto x da placa:

A temperatura da placa quando x=0 será:

$$T(0) = -5000\cdot 0 + 130 = 130\,^\circ\text{C}$$

Problema -4.2 (I)

Vapor a 250 ºC escoa por uma conduta submetida a temperatura de 160 ºC na parte externa. Escreva a equação de condução para este caso. Determine a temperatura na superfície interna da conduta e a taxa de troca de calor no processo. O coeficiente de transferência de calor por convecção é de125 $W/m^2 \cdot °C$, o raio interno do cilindro igual a 20 cm, o raio externo 25cm e a condutividade térmica do material de 55 $W/m \cdot °C$.



Problema -4.2 (Resolução I)

Assume-se:

1. Escoamento estacionário e unidimensional;
2. Condutibilidade térmica constante ($k = 7{,}5\ \mathrm{W/m{\cdot}{}^\circ C}$);
3. Não há geração de calor na conduta;
4. Todo o calor gerado no aquecimento transfere-se à conduta.

Problema -4.2 (Resolução II)

Note-se que a transferência de calor é unidimensional na direcção radial de **r** e o fluxo de calor é na direcção positiva de **r**. A equação matemática de condução de calor pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

As condições iniciais e de fronteira para este caso são:

$$-k\frac{dT(r_1)}{dr} = h[T_\infty - T(r_1)]$$

e

$$T(r_2) = T_2 = 160\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Problema -4.2 (Resolução III)

Integrando a expressão diferencial de condução de calor em relação ao raio r obtém-se

$$r\frac{dT}{dr} = C_1$$

Dividindo ambas partes da equação por **r** e integrando obtém-se:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Problema -4.2 (Resolução IV)

Integrando obtém-se:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Aplicando as condições de fronteira tem-se:

$r = r_1$: $$-k\frac{C_1}{r_1} = h[T_\infty - (C_1 \ln r_1 + C_2)]$$

$r = r_2$: $$T(r_2) = C_1 \ln r_2 + C_2 = T_2$$

Problema -4.2 (Resolução V)

Resolvendo para C_1 e C_2 obtém-se:

$$C_1 = \frac{T_2 - T_\infty}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}} \quad \text{and} \quad C_2 = T_2 - C_1 \ln r_2 = T_2 - \frac{T_2 - T_\infty}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}} \ln r_2$$

Substituindo C_1 e C_2 na solução geral, a variação de temperatura determina-se de:

$$T(r) = C_1 \ln r + T_2 - C_1 \ln r_2 = C_1(\ln r - \ln r_2) + T_2 = \frac{T_2 - T_\infty}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}} \ln\frac{r}{r_2} + T_2$$

Problema -4.2 (Resolução VI)

Substituindo o r1, r2, k , h e as temperaturas interna e externa na expressão obtém-se:

$$T(r) = \frac{160 - 250}{\ln\frac{0{,}25}{0{,}2} + \frac{55}{125 \cdot 0{,}2}} \ln\frac{r}{0{,}25} + 160$$

$$T(r) = -37{,}14 \ln\frac{r}{0{,}25} + 160$$

A taxa de calor determina-se como:

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL)\frac{C_1}{r} = -2\pi Lk\frac{T_2 - T_\infty}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}}$$

Problema -4.2 (Resolução VI)

Portanto:

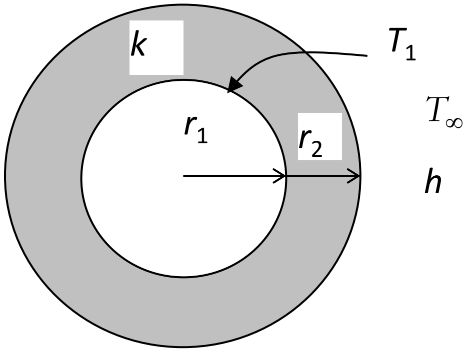
$$\dot{Q} = -2\pi L k \frac{T_2 - T_\infty}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{h r_1}}$$

$$\dot{Q} = -2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot 55 \frac{160 - 250}{\ln\frac{0{,}25}{0{,}2} + \frac{55}{125 \cdot 0{,}2}}$$

$$\dot{Q} = 192432 \text{ W} = 192{,}43 \text{ kW}$$

Problema -4.3 (I)

Um recipiente esférico é submetido a temperatura especificada de 45 ºC na superfície interna e arrefecido por ar a 15 ºC na superfície externa. Formule a expressão matemática de condução de calor para a esfera e determine a taxa de transferência de calor, considerando o escoamento unidimensional e o coeficiente de troca de calor por convecção igual a 40 W/m·°C. A condutibilidade térmica da esfera é de 18 W/m·°C. Os raios interno e externo da esfera medem 25cm e 30cm respectivamente.



Problema -4.3 (Resolução I)

Assume-se:

1.Escoamento estacionário e unidimensional;

2.Condutibilidade térmica constante ($k = 18\,\mathrm{W/m{\cdot}°C}$);

3.Não há geração de calor na esfera.

Note-se que a transferência de calor é unidimensional na direcção radial de r e o fluxo de calor é na direcção positiva de r. A equação matemática de condução de calor pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

Problema -4.3 (Resolução II)

Integrando a expressão diferencial em relação ao raio r obtém-se:

$$r^2 \frac{dT}{dr} = C_1$$

Dividindo ambos os termos por $\mathbf{r^2}$ resulta que:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

Integrando a expressão tem-se:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias

Problema -4.3 (Resolução III)

Aplicando as condições de fronteira tem-se:

$r = r_1$: $$T(r_1) = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 = T_1$$

$r = r_2$: $$-k\frac{dT(r_2)}{dr} = h[T(r_2) - T_\infty] \quad = \quad -k\frac{C_1}{r_2^2} = h\left(-\frac{C_1}{r_2} + C_2 - T_\infty\right)$$

Escrevendo as equações em função de C_1 e C_2 tem-se:

$$C_1 = \frac{r_2(T_1 - T_\infty)}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}} \quad \text{e} \quad C_2 = T_1 + \frac{C_1}{r_1} = T_1 + \frac{T_1 - T_\infty}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}}\frac{r_2}{r_1}$$

Problema -4.3 (Resolução IV)

Substituindo C_2 e C_2 na equação da solução geral, a variação de temperatura determina-se de:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + T_1 + \frac{C_1}{r_1} = C_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) + T_1 = \frac{T_1 - T_\infty}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}}\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2}{r}\right) + T_1$$

Substituindo os valores de r_1 e r_2, T1, e T∞, obtém-se:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + T_1 + \frac{C_1}{r_1} = C_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) + T_1 = \frac{T_1 - T_\infty}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}}\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2}{r}\right) + T_1$$

$$T(r) = \frac{45 - 15}{1 - \frac{0,3}{0.25} - \frac{18}{40 \cdot 0,3}}\left(\frac{0,3}{0,25} - \frac{0,3}{r}\right) + 45$$

$$T(r) = -17,65\,(1,2 - \frac{0,3}{r}) + 45 \;= 23,82 - \frac{5,3}{r}$$

Problema -4.3 (Resolução V)

A taxa de transferência de calor através da parede da esfera será:

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dx} = -k(4\pi r^2)\frac{C_1}{r^2} = -4\pi k C_1 = -4\pi k \frac{r_2(T_1 - T_\infty)}{1 - \dfrac{r_2}{r_1} - \dfrac{k}{hr_2}}$$

$$\dot{Q} = -4\pi(18\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C})\frac{(0,3\ \text{m})\,(45\ \text{-}\ 15)\ {}^\circ\text{C}}{1 - \dfrac{0,3}{0,25} - \dfrac{18\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}}{(40\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C})(0,3\ \text{m})}} = 1196,89\,W$$

2.3.1 Parede Plana

A condutibilidade térmica em muitos problemas é considerada constante então a Equação 2.13 transforma-se em:

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.14)$$

Onde α=k/ρC é a difusibilidade térmica do material e denota a velocidade de propagação do calor pelo material

Regime permanente

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \qquad (2.15)$$

Regime transiente sem geração de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.16)$$

Regime estacionário sem geração de calor

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \qquad (2.17)$$

2.5 Solução da Equação unidimensional de transferência de calor em regime permanente

Equação Diferencial

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Integrando:

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

Integrando outra vez:

$$T(x) = C_1x + C_2$$

Solução Geral

Constantes arbitrárias

Condições de fronteira

$$T(0) = T_1$$

Solução geral

$$T(x) = C_1x + C_2$$

Aplicando as condições de fronteira

$$\underbrace{\underset{0}{\underset{\uparrow}{T(x)}}}_{T_1} = C_1 \underset{0}{\underset{\uparrow}{x}} + C_2$$

Substituindo:

$$T_1 = C_1 \times 0 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_1$$

Não involve x ou T(x) após as condições de fronteira serem aplicadas

2.3.2 Cilindro Longo

Para o caso da condutibilidade térmica constante então a Equação 2.25 transforma-se em:

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.26)$$

Onde mais uma vez $\alpha = k/\rho C$ é a difusibilidade térmica do material

Regime permanente

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=0 \qquad (2.27)$$

Regime transiente sem geração de calor

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.28)$$

Regime estacionário sem geração de calor

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \qquad (2.29)$$

2.3.3 Esfera

Onde mais uma vez $\alpha = k/\rho C$ é a difusibilidade térmica do material

Condutibilidade térmica constante

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=0 \qquad (2.32)$$

Regime permanente

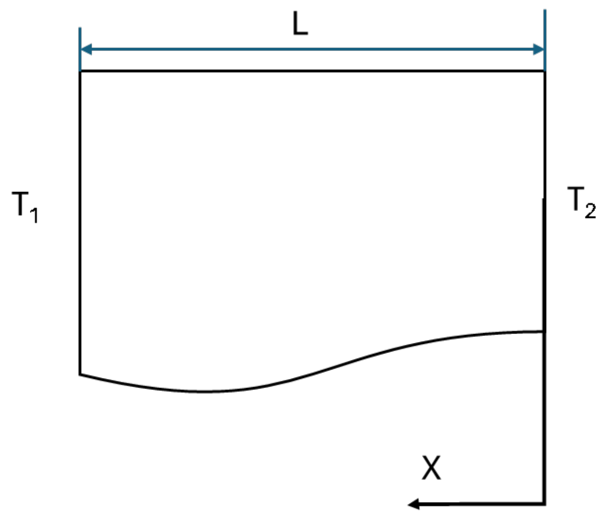
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.33)$$

Regime estacionário sem geração de calor

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0 \quad \text{ou} \quad r\frac{d^2T}{dr^2}+2\frac{dT}{dr}=0 \qquad (2.34)$$

Trabalho Para Casa 01 (I)

No sistema apresentado ocorre condução de calor em regime estacionário sem geração de calor. A condutividade térmica é de 25 W/mK e a espessura L é de 0,5 m.



Trabalho Para Casa 01 (II)

Determine as grandezas desconhecidas correspondentes para cada caso na tabela e esboce a distribuição de temperatura, indicando a direcção do fluxo de calor.

Caso	T_1	T_2	***dT/dx* (K/m)**	**q" (W/m^2)**
1	400K	300K		
2	100°C		-250	
3	80°C		+200	
4		-5°C		4000
5	30°c			-3000

Enviar até as 5 horas de quarta-feira dia 12 de Março de 2025 para o endereço:

transmissaodecalor.dema@gmail.com com o "subject": TPCT01