



Transmissão de calor

3^o ano

Aula 11 ▫ 5. Métodos Numéricos em Transferência de Calor

- Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas
- Condução Unidimensional em Regime Permanente
- Condução Bidimensional em Regime Permanente
- Condução Unidimensional em Regime Transiente
- Condução Bidimensional em Regime Transiente
- Solução das Equações de Elementos Finitos

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

Até agora consideraram-se problemas de condução de calor relativamente simples envolvendo geometrias simples com condições de contorno simples, pois só estes problemas podem ser resolvidos analiticamente. Muitos dos problemas encontrados na prática, envolvem geometrias complexas com condições de contorno também complexas ou propriedades variáveis e não podem ser resolvidos analiticamente. Em tais casos, soluções aproximadas, suficientemente precisas podem ser obtidas por computadores usando um método numérico.

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

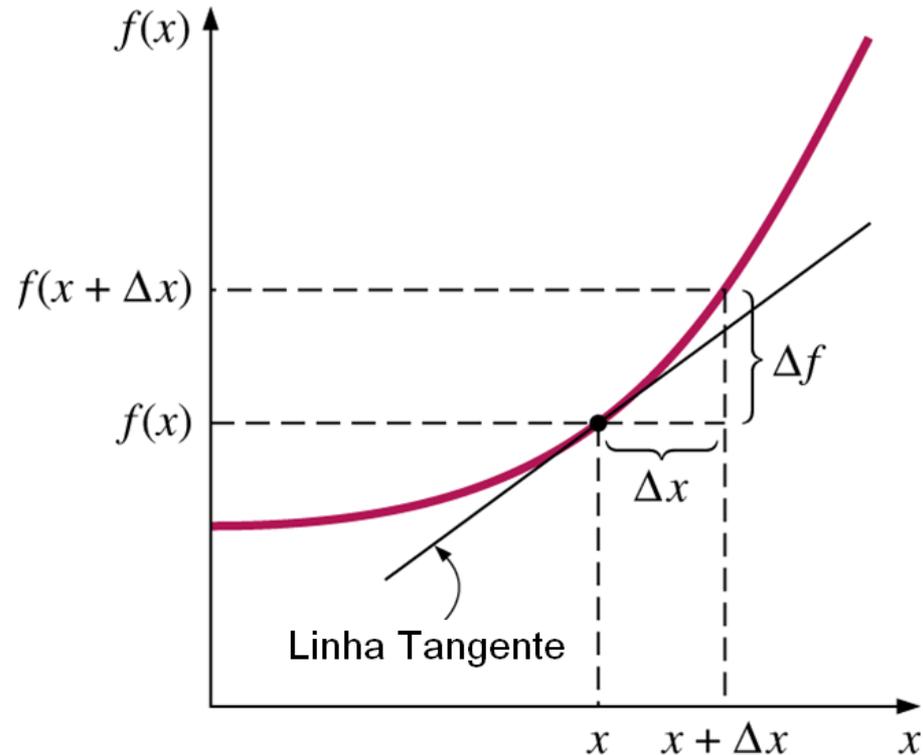


Os métodos numéricos para resolver equações diferenciais, baseiam-se na substituição das equações diferenciais por equações algébricas. No caso do método popular de diferenças finitas, isso é feito através da substituição das derivadas pelas diferenças.

As derivadas são os blocos de construção das equações diferenciais, assim primeiro vai-se fazer uma breve revisão das derivadas.

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

Considere-se uma função f que depende de x , como se apresenta na figura. A primeira derivada de $f(x)$ num ponto, é equivalente a inclinação de uma linha tangente à curva nesse ponto e é definida como:



$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.1)$$

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

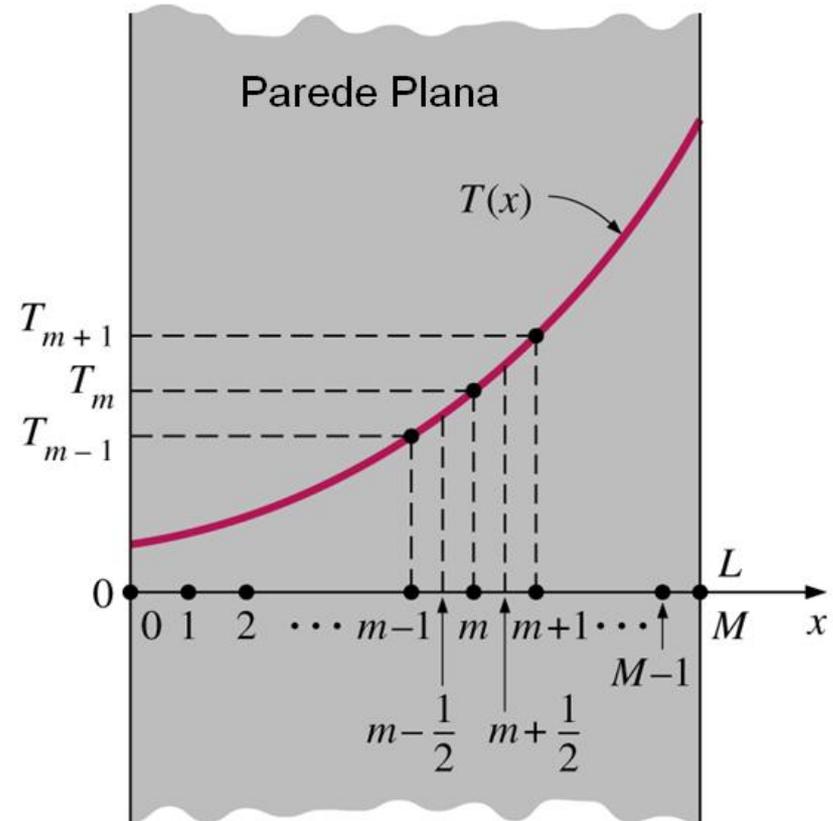
que é a razão entre o incremento Δf da função e o incremento Δx da variável independente, quando $\Delta x \rightarrow 0$. Se não se tomar em conta o limite indicado, tem-se a seguinte relação aproximada para a derivada:

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.2)$$

Esta equação aproximada da derivada, na forma de diferenças, é a expressão de **diferenças finitas** da derivada de primeira ordem.

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

Considere-se a transferência de calor unidimensional em regime estacionário, numa parede plana de espessura L , com geração de calor. A parede é subdividida em M secções de igual espessura $\Delta x = L/M$ na direcção x , separadas por planos que passam por $M + 1$ pontos $0, 1, 2, \dots, m - 1, m, m + 1, \dots, M$ chamados nós ou pontos nodais, como se mostra na figura. A coordenada x de qualquer ponto m é simplesmente $x_m = m\Delta x$, e a temperatura nesse ponto é $T(x_m) = T_m$.



5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

A equação de condução de calor envolve derivadas de segunda ordem de temperatura em relação às variáveis espaciais, na forma d^2T/dx^2 e a formulação de diferenças finitas baseia-se na substituição das derivadas de segunda ordem pelas diferenças adequadas. Para iniciar o processo precisa-se de ter as derivadas de primeira ordem. Usando a Equação 5.2, a primeira derivada da temperatura dT/dx nos pontos médios $m-1/2$ e $m+1/2$ das secções em torno do nó m pode ser expressa como:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-\frac{1}{2}} \cong \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+\frac{1}{2}} \cong \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (5.3)$$

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

É de notar que a segunda derivada é simplesmente a derivada da primeira derivada. A segunda derivada da temperatura no nó **m** pode ser expressa como:

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_m \cong \frac{\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+\frac{1}{2}} - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} - \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} \quad (5.4)$$

que é a representação em diferenças finitas da derivada segunda num nó interno geral **m**. Note-se que a segunda derivada da temperatura num nó **m** é expressa em termos das temperaturas no nó **m** e dos seus dois nós vizinhos.

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

Então a equação diferencial:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (5.5)$$

que é a equação governante para transferência de calor unidimensional em regime estacionário de em uma parede plana com geração de calor e condutividade térmica constante, e pode ser expressa sob a forma de diferenças finitas como:

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0, \quad m=1,2,3,\dots,M-1 \quad (5.6)$$

Onde \mathbf{g}_m é a taxa de geração por unidade de volume no nó \mathbf{m} .

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

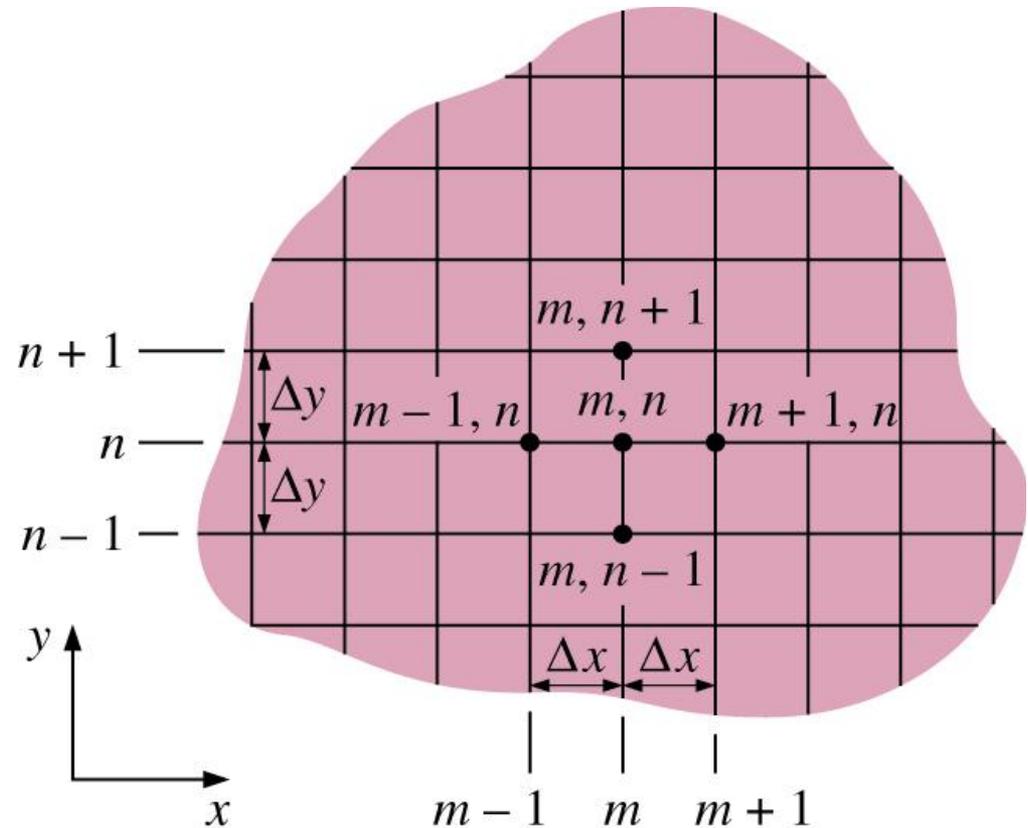
A formulação de diferenças já vista, pode ser facilmente estendida à problemas de transferência de calor bi ou tridimensionais, substituindo cada segunda derivada de uma equação de diferenças finitas nesse sentido. Por exemplo, a formulação de diferenças finitas para condução de calor bidimensional em regime estacionário numa região com geração de calor e condutividade térmica constante pode ser expressa em coordenadas rectangulares como:

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{g}_{m,n}}{k} = 0 \quad (5.7)$$

Para $m=1,2,3,\dots,M-1$ e $n=1,2,3,\dots,N-1$ num qualquer nó interior (m,n)

5. 1 Formulação de Equações Diferenciais pelo Método de Diferenças Finitas

Malha de diferenças finitas para a condução bidimensional em coordenadas retangulares.

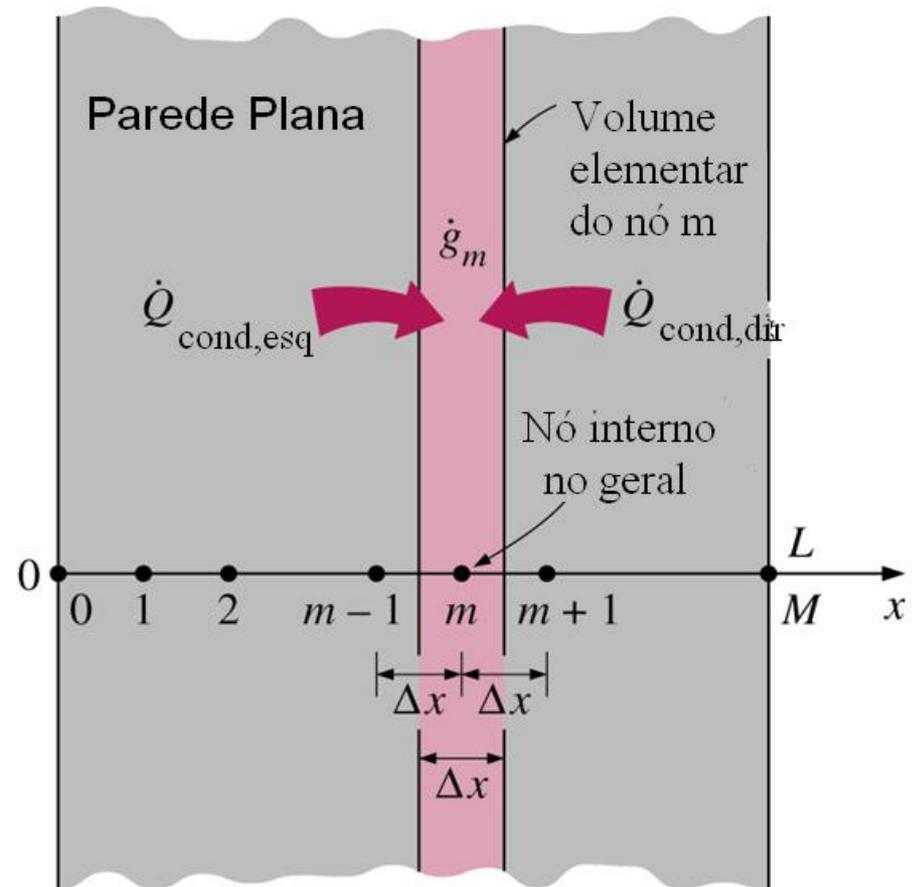


5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Passa-se agora ao desenvolvimento da formulação de diferenças finitas de condução de calor numa parede plana, através do balanço de energia e a solução das equações daí resultantes. O método de balanço de energia, baseia-se na subdivisão do meio num número suficiente de volumes elementares e na aplicação do balanço de energia a cada um dos elementos.

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Pontos nodais e volumes elementares para a formulação de diferenças finitas da condução unidimensional numa parede plana.



5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Para obter-se uma equação de diferenças finitas no geral, para os nós interiores, considere-se o elemento representado pelo nó m e os dois nós vizinhos $m - 1$ e $m + 1$. Assumindo-se que a condução de calor é para dentro do elemento em todas as superfícies, o balanço de energia para o elemento pode ser expresso como:

Taxa de Calor conduzido na superfície esquerda

-

Taxa de Calor conduzido na superfície direita

+

Taxa de calor gerado no elemento

=

Taxa de variação da energia contida no elemento

Ou seja:

$$\dot{Q}_{cond,esq} - \dot{Q}_{cond,dir} + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad (5.8)$$

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Se o conteúdo energético de um meio (ou parte dele) não alterar-se em condições de equilíbrio e portanto, $\Delta E_{\text{elemento}} = 0$. A taxa de geração de calor dentro do elemento pode ser expressa como:

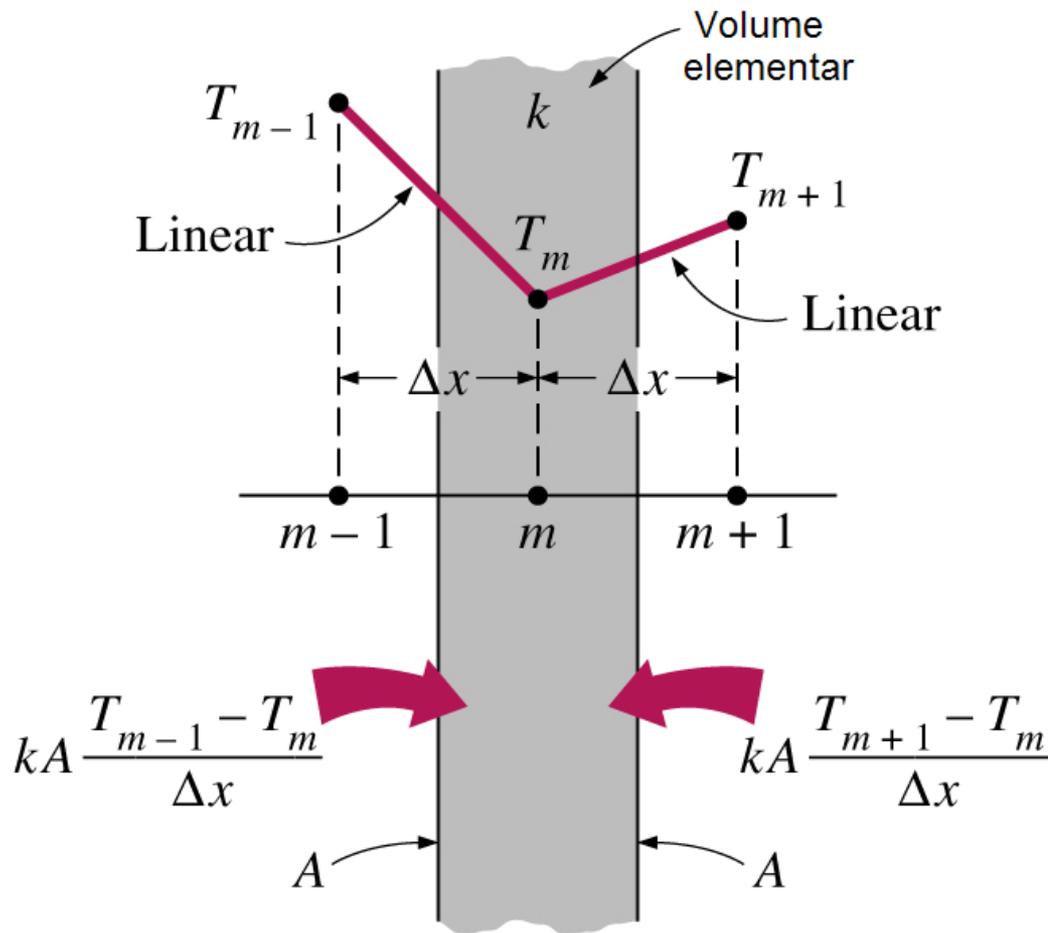
$$\dot{G}_{\text{elemento}} = \dot{g}_m V_{\text{elemento}} = \dot{g}_m A \Delta x \quad (5.9)$$

É de lembrar que quando a temperatura varia linearmente, a taxa constante de condução de calor através de uma parede plana de espessura L pode ser expressa como:

$$Q_{\text{cond}} = kA \frac{\Delta T}{L} \quad (5.10)$$

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Na formulação das diferenças finitas, assume-se que a temperatura varia linearmente entre os nós.



5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Se a direção da transferência de calor em ambas as superfícies do elemento, for assumida como sendo na direção do nó m , a taxa de condução de calor no lado esquerdo e direito das superfícies pode ser expressa como como:

$$Q_{cond,esq} = kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} \quad \text{e} \quad Q_{cond,dir} = kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (5.11)$$

Substituindo as Equações 5.11 e 5.9 na 5.8 obtem-se:

$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + g_m A \Delta x = 0 \quad (5.12)$$

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Que pode ser simplificada para:

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0, \quad m=1, 2, 3, \dots, M-1 \quad (5.13)$$

que é idêntica à equação de diferenças finitas obtida anteriormente. Esta equação é aplicável a cada um dos $M-1$ nós internos, e sua aplicação dá $M-1$ equações para a determinação das temperaturas nos $M+1$ nós. As duas equações adicionais necessários para determinar as $M+1$ temperaturas nodais desconhecidas, são obtidas através da aplicação do balanço de energia aos dois elementos nas fronteiras (a não ser claro, que as temperaturas limites sejam especificadas).

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Depois de desenvolvida a equação de diferenças finitas para cada nó interior de uma parede plana que não é aplicável aos nós fronteiros, pois ela exige a presença de nós em ambos os lados do nó em questão, precisa-se de obter as equações de diferenças finitas separadamente para os nós na fronteira. A melhor maneira de obtê-las é através da aplicação do balanço de energia aos volumes de controle dos nós de fronteira.

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

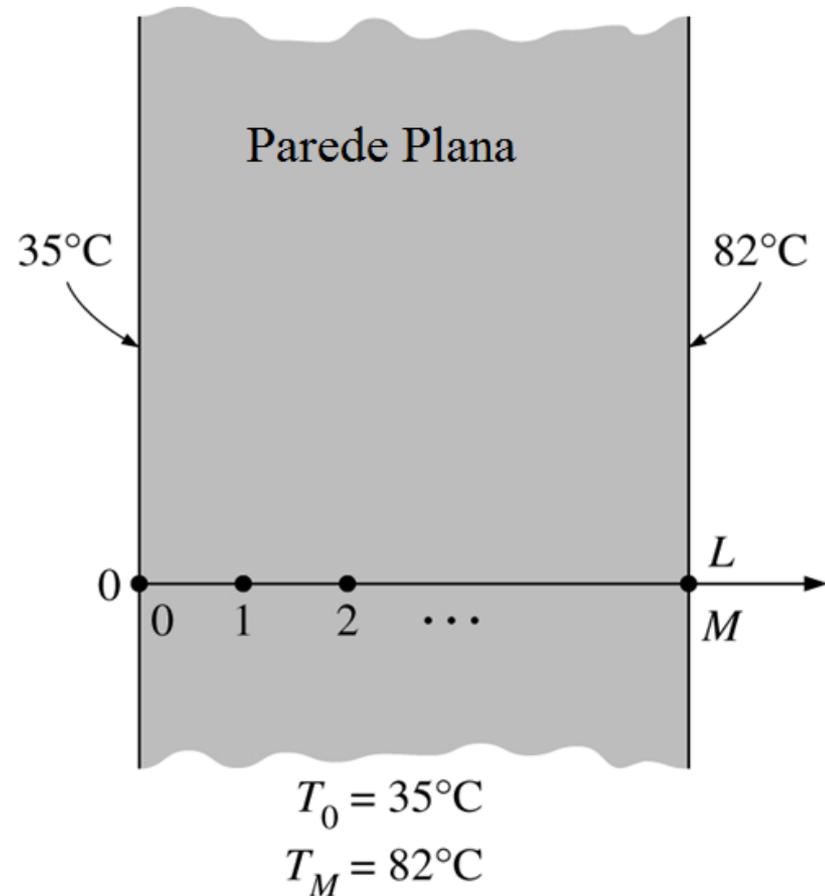
A condição de contorno de temperatura especificada é a condição mais simples de lidar com ela. Para uma transferência de calor tridimensional através de uma parede plana de espessura L , as condições de temperatura especificada nos limites esquerdo e direito da superfície podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} T(0) &= T_0 = \text{Valor especificado} \\ T(L) &= T_M = \text{Valor especificado} \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde T_0 e T_M são as temperaturas prescritas na superfície em $x=0$ e $x=L$, respectivamente. Portanto, as condições de contorno de temperaturas especificadas, são incorporadas atribuindo simplesmente as temperaturas da superfície dadas aos nós de fronteira.

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Formulação das condições de temperatura prescrita em diferenças finitas em ambas as faces de uma parede plana.



5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Quando outras condições de fronteira, como o fluxo de calor prescrito, convecção, radiação ou convecção combinada com radiação são especificados na fronteira, a equação de diferenças finitas para o nó fronteiro é obtida por meio do balanço de energia no volume de controle nessa fronteira. O balanço de energia é expresso como:

$$\sum_{\text{Todos os lados}} Q + G_{\text{elemento}} = 0 \quad (5.15)$$

Para transferência de calor em regime estacionário

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

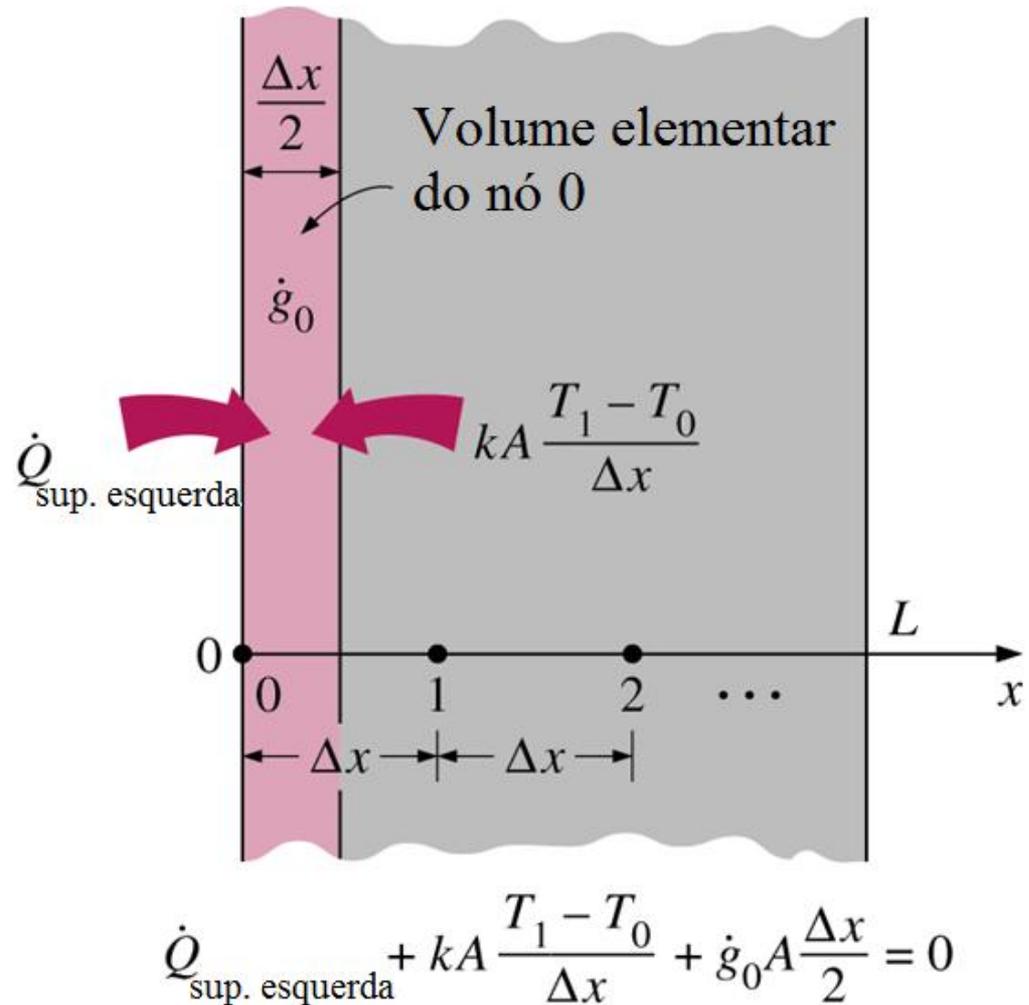
A formulação das diferenças finitas no nó $m=0$ (no limite esquerdo onde $x=0$) de uma parede plana de espessura L durante a condução de calor unidimensional em regime estacionário pode ser expressa como:

$$Q_{\text{superfície esquerda}} + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad (5.16)$$

onde $A\Delta x/2$ é o volume do volume elementar (note-se que o elemento de fronteira tem metade da espessura), g_0 é a taxa de geração de calor por unidade de volume (em W/m^3) em $x = 0$, e A é a área de transferência de calor, que é constante para uma parede plana.

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Esquema para a formulação de diferenças finitas de um nó de fronteira esquerdo de uma parede plana.



5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

A equação de diferenças finitas para diferentes condições de contorno pode ser obtida da Equação 5.16, bastando para tal substituir $Q_{\text{superfície esquerda}}$ pela expressão adequada. Em seguida isso é feito para várias condições de contorno na fronteira esquerda.



Condição de Fluxo de Calor Prescrito

$$q_0 A + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad (5.17)$$

Caso especial Fronteira isolada ($q_0=0$)

$$kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad (5.18)$$

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente



Convecção como condição de contorno

$$hA(T_{\infty} - T_0) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad (5.19)$$



Radiação como condição de contorno

$$\varepsilon \sigma A (T_{\text{sup}}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad (5.20)$$

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente



Convecção e Radiação como condições de contorno

$$hA(T_{\infty} - T_0) + \varepsilon\sigma A(T_{\infty}^4 - T_0^4) + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0\left(A\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \quad (5.21)$$

ou

$$h_{\text{combinado}}A(T_{\infty} - T_0) + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0\left(A\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \quad (5.22)$$



Convecção, Radiação e Fluxo prescrito como condições de contorno

$$q_0A + hA(T_{\infty} - T_0) + \varepsilon\sigma A(T_{\infty}^4 - T_0^4) + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + g_0\left(A\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \quad (5.23)$$

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente



Tratamento dos Nós na Fronteira Isolada como Nós Interiores: O Conceito da Imagem em Espelho

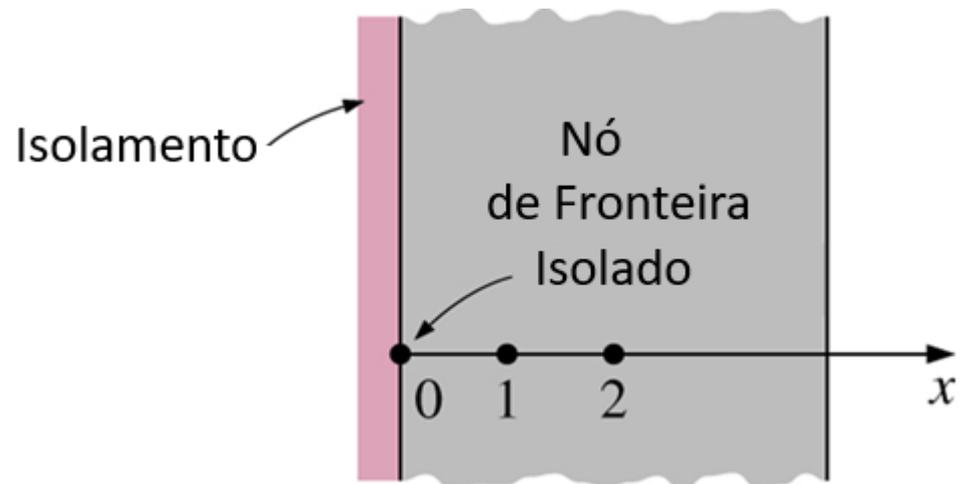
Uma forma de se obter a formulação por diferenças finitas de um nó situado numa fronteira isolada é tratar o isolamento como um fluxo de calor “nulo” e escrever um balanço de energia, como feito na Equação 5.18. Uma outra forma, mais prática, é considerar o nó sobre uma fronteira isolada como sendo um nó interior.

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente



Tratamento dos Nós na Fronteira Isolada como Nós Interiores: O Conceito da Imagem em Espelho

Uma outra forma, mais prática, é considerar o nó sobre uma fronteira isolada como sendo um nó interior.

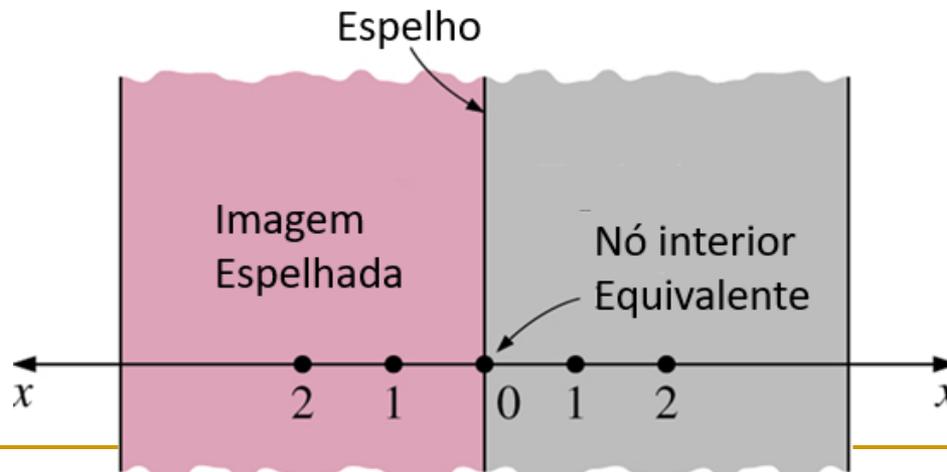


5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente



Tratamento dos Nós na Fronteira Isolada como Nós Interiores: O Conceito da Imagem em Espelho

Conceitualmente, isto é feito substituindo-se o isolamento na fronteira por um espelho e considerando o reflexo do meio como uma sua extensão.



5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente



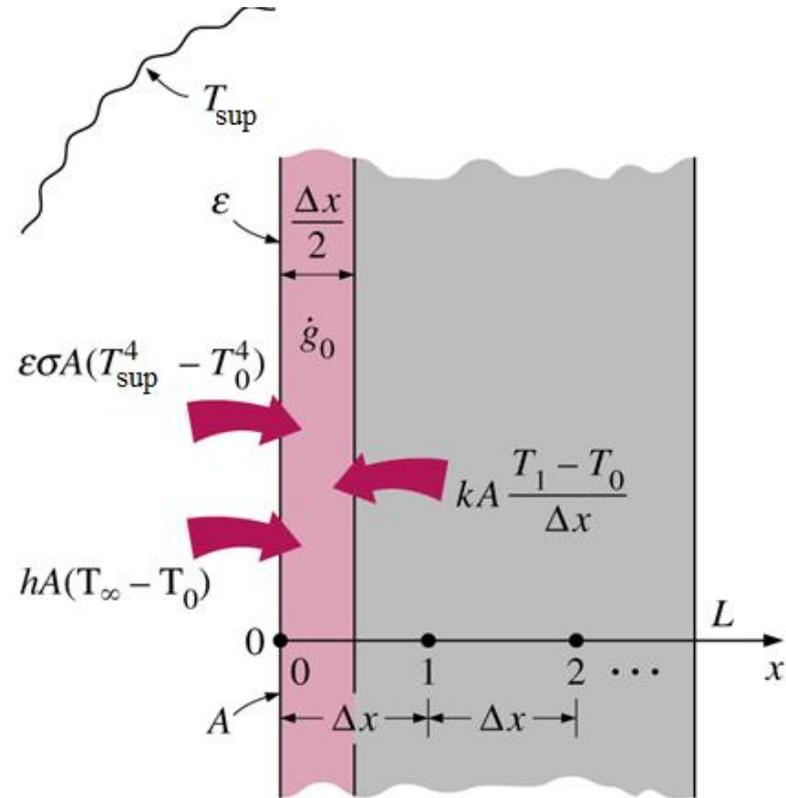
Tratamento dos Nós na Fronteira Isolada como Nós Interiores: O Conceito da Imagem em Espelho

Então, utilizando a Equação geral 5.13 para um nó interior, que envolve a soma das temperaturas dos nós adjacentes menos o dobro da temperatura do nó em questão, a formulação por diferenças finitas de um nó $m=0$ situado numa fronteira isolada de uma parede plana pode ser expressa como:

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0 \rightarrow \frac{T_1 - 2T_0 + T_1}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0 \quad (5.24)$$

5.2 Condução Unidimensional em Regime Permanente

Esquema para a formulação de diferenças finitas com convecção e radiação combinadas como condição de contorno no lado esquerdo de uma parede plana.



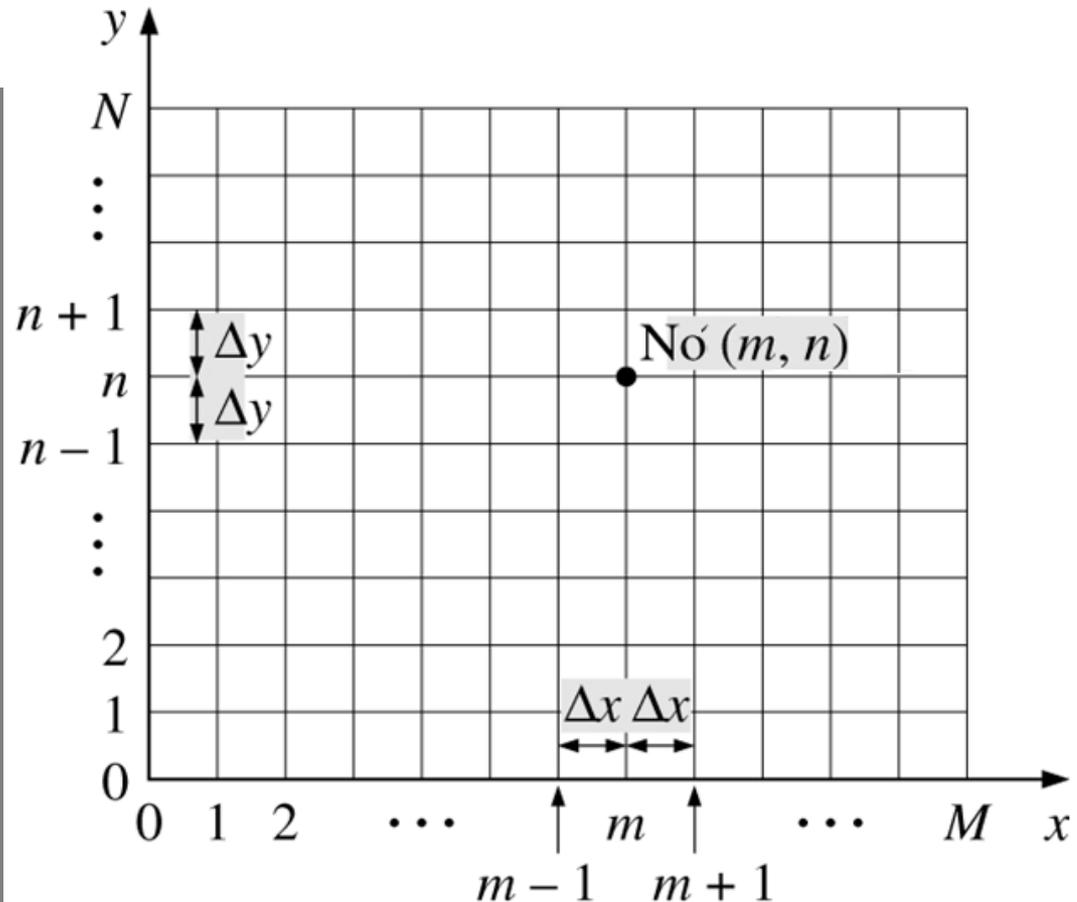
$$hA(T_{\infty} - T_0) + \varepsilon\sigma A(T_{\text{sup}}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{q}_0 A \frac{\Delta x}{2} = 0$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Muitos problemas de transferência de calor encontrados na prática, podem ser aproximados a problemas unidimensionais, mas isso nem sempre é possível. As vezes, é necessário considerar-se a transferência de calor em outras direcções, quando a variação da temperatura nessas outras direcções é significativa. Considera-se agora a formulação numérica e solução de problemas de condução de calor bidimensional estacionária em coordenadas rectangulares usando o método de diferenças finitas. A abordagem apresentada pode ser estendida para casos tridimensionais.

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Malha para a
formulação de
diferenças finitas
de condução de
calor
bidimensional em
coordenadas
retangulares.



5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Considere-se um volume elementar do tamanho $\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$ centrado num nó geral interior (m,n) numa região em que o calor é gerado a uma taxa g e a condutividade térmica k é constante. Assume-se que a direcção de condução de calor em todas as superfícies é para o nó em consideração, o balanço de energia no volume elementar pode ser expresso como:

Taxa de Calor
conduzido nas
superfícies esquerda,
direita, de cima e de
baixo

+

Taxa de calor
gerado no
elemento

=

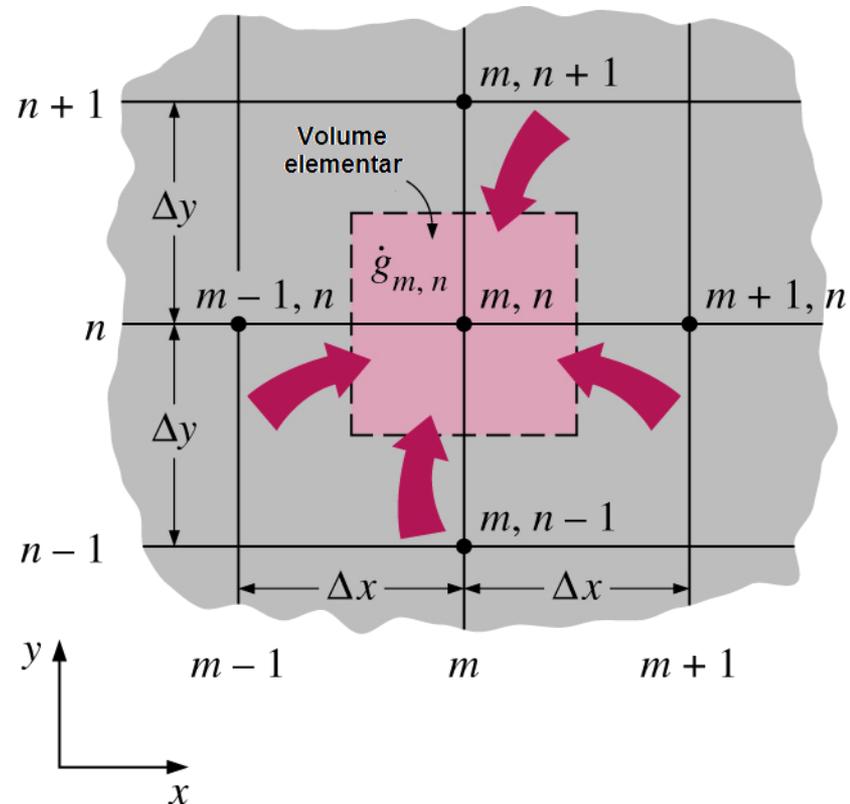
Taxa de
variação da
energia contida
no elemento

Ou seja:

$$\dot{Q}_{cond,esq} + \dot{Q}_{cond,topo} + \dot{Q}_{cond,dir} + \dot{Q}_{cond,baixo} + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} = 0 \quad (5.25)$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Volume elementar de um nó interior no geral (m,n) , para a condução bidimensional em coordenadas retangulares.



5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Assumindo-se que as temperaturas entre os nós adjacentes varia de forma linear e observando que a área de transferência de calor é $A_x = \Delta y \times 1 = \Delta y$ na direcção x e $A_y = \Delta x \times 1 = \Delta x$ na direcção y , a equação de balanço de energia torna-se:

$$\begin{aligned} k\Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \\ + k\Delta x \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + g_{m,n} \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Dividindo cada termo por $\Delta x \times \Delta y$ obtém-se:

$$\frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + T_{m,n+1}}{\Delta y^2} + \frac{g_{m,n}}{k} = 0 \quad (5.27)$$

Para $m=1,2,3,\dots,M-1$ e $n=1,2,3,\dots,N-1$

Na análise de diferenças finitas é normal usar-se uma malha quadrada para simplificar, (excepto quando as magnitudes de temperatura da direcção dos eixos x e y são muito diferentes) daí Δx e Δy são tomados iguais.

Dai $\Delta x = \Delta y = 1$ então a Equação 5.27 simplifica-se em:

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{g_{m,n}l^2}{k} = 0 \quad (5.28)$$

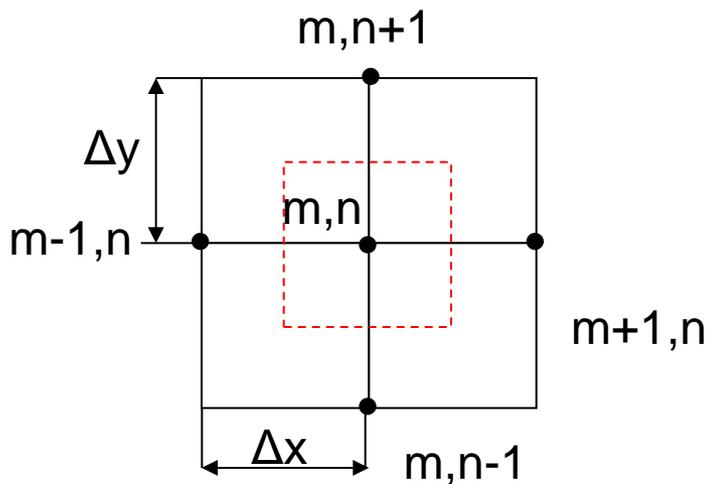
Esta é a formulação de diferenças finitas para um nó interior que se obtém pela soma das temperaturas dos quatro nós vizinhos ao nó, subtraindo quatro vezes a temperatura do nó em referencia e somando o termo de também se pode expressar da seguinte forma de fácil memorização.

$$T_{esquerda} + T_{topo} + T_{direita} + T_{baixo} - 4T_{nó} + \frac{g_{nó}l^2}{k} = 0 \quad (5.29)$$

Apresentam-se em seguida algumas das equações mais utilizadas para a solução de problemas bidimensionais em regime permanente.

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

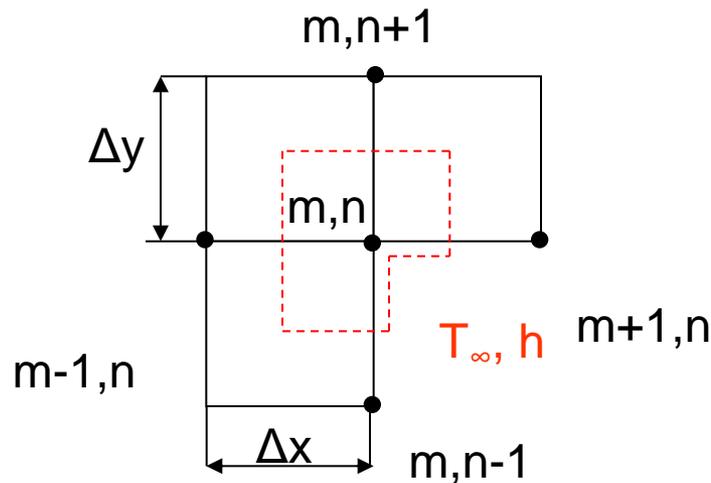
Caso 1 - Nó interior



$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

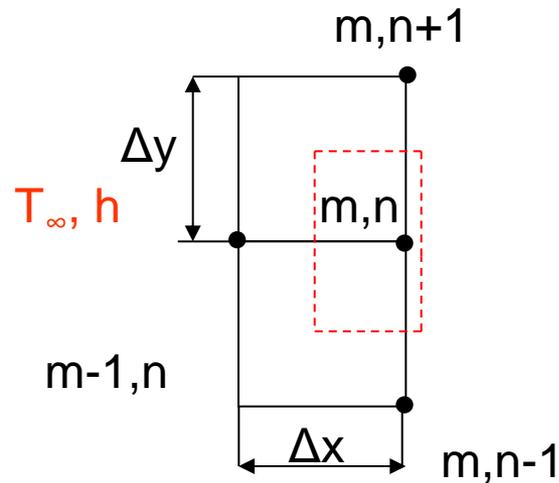
Caso2 - Nó num vértice interior com convecção



$$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(3 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

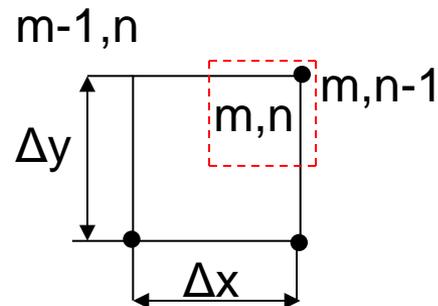
Caso 3 - Nó numa superfície plana com convecção



$$\left(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}\right) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_{m,n} = 0$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

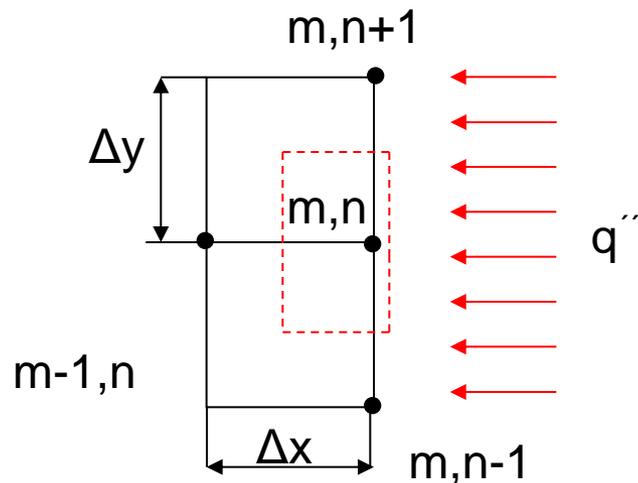
Caso 4 - Nó num vértice externo com convecção



$$\left(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}\right) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n} = 0$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Caso 5 - Nó numa superfície plana com um fluxo de calor uniforme



$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + 2\frac{q''\Delta x}{k} - 4T_{m,n} = 0$$

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

A formulação de diferenças finitas de nós na fronteira de problemas bi ou tri dimensionais é similar ao dos problemas unidimensionais. A região é dividida em nós, formando volumes elementares ao redor dos mesmos e um balanço energético é feito para cada nó de fronteira.

Para a transferência de calor em regime estacionário, a equação básica que se deve ter em mente quando se estiver a fazer o balanço de energia num volume elementar é:

$$\sum_{\text{Todos os lados}} Q + gV_{\text{elemento}} = 0 \quad (5.30)$$

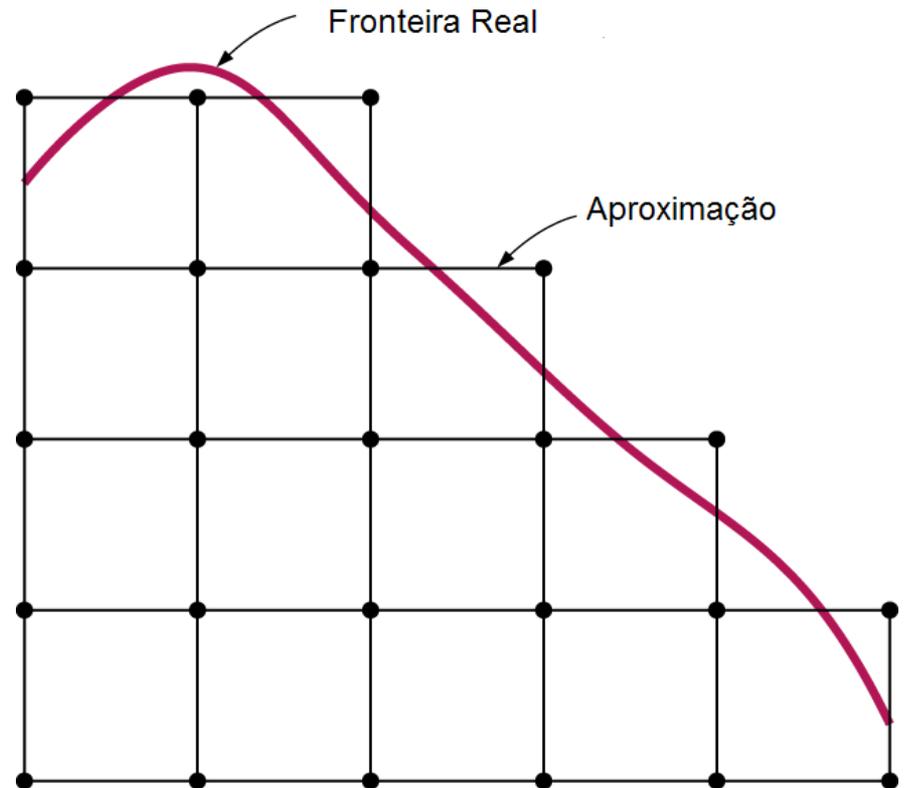
Se o problema for uni, bi, ou tridimensional

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Em problemas com geometrias simples, pode-se preencher toda a região, usando elementos de volume simples, como as faixas de uma parede plana ou elementos retangulares de duas dimensões de condução numa região rectangular. Também pode-se usar elementos de casca cilíndrica ou esférica, para cobrir totalmente um corpo cilíndrico e esférico. No entanto, muitas geometrias encontradas na prática, tais como as pás de turbinas ou os blocos de motor, não têm formas simples e é difícil preencher as geometrias com essas fronteiras irregulares através de volumes elementares simples.

5.3 Condução Bidimensional em Regime Permanente

Uma maneira prática de lidar com geometrias irregulares é substituí-las por uma série de volumes elementares simples, como se mostra na figura.



5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Em problemas de regime transiente há variação da temperatura com o tempo, bem como no espaço e, portanto, a solução de diferenças finitas de problemas em regime transiente, requer a discretização no tempo, além da discretização no espaço. Isto é feito selecionando um intervalo de tempo adequado Δt e resolvendo as temperaturas nodais desconhecidos repetidamente para cada Δt , até que a solução no tempo desejado seja obtida.

Em problemas de regime transiente o sobrescrito i é usado como índice ou contador de intervalos de tempo, $i = 0$ corresponde à condição inicial.

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Os nós e os volumes elementares, em problemas de regime transiente, são selecionados como no caso do regime estacionário e novamente assume-se que toda a transferência de calor é feita para o elemento. Por conveniência, o balanço de energia num volume elementar, durante um intervalo de tempo Δt , pode ser expresso como:

Calor transferido para dentro do elemento por todas as superfícies durante Δt

+

Taxa de calor gerado no elemento durante Δt

=

Taxa de variação da energia contida no elemento durante Δt

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Ou seja:

$$\Delta t \times \sum_{\text{Todos os lados}} Q + \Delta t \times g V_{\text{elemento}} = E_{\text{elemento}} \quad (5.31)$$

onde a taxa de transferência de calor Q , consiste normalmente na condução para os nós internos, mas pode envolver também fluxo de calor por convecção e radiação para os nós de fronteira. É de notar que $E_{\text{elemento}} = m C \Delta T = \rho V_{\text{elemento}} C \Delta T$, onde ρ é a massa específica e C o calor específico do elemento.

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Dividindo a relação anterior por Δt obtém-se:

$$\sum_{\text{Todos os lados}} Q + gV_{\text{elemento}} = \frac{E_{\text{elemento}}}{\Delta t} = \rho V_{\text{elemento}} C \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (5.32)$$

ou, para qualquer nó m no meio e seu volume elementar:

$$\sum_{\text{Todos os lados}} Q + G_{\text{elemento}} = \rho V_{\text{elemento}} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (5.33)$$

onde T_m^i e T_m^{i+1} são as temperaturas do nó m no tempo $t_i = i\Delta t$ e $t_{i+1} = (i+1)\Delta t$, respectivamente e $T_m^{i+1} - T_m^i$ representam a variação da temperatura do nó durante o intervalo de tempo Δt entre o passo de tempo i e $i+1$.

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

As temperaturas nodais em problemas em regime transiente normalmente alteram-se a cada intervalo de tempo, e existe sempre a interrogação se deve-se usar temperaturas no passo de tempo anterior i ou no novo passo de tempo $i+1$ nos termos do lado esquerdo da Equação 5.33. Ambas são abordagens razoáveis e usadas na prática. A abordagem de diferenças finitas é chamada **método explícito** no primeiro caso e **método implícito** no segundo caso.

Método explícito

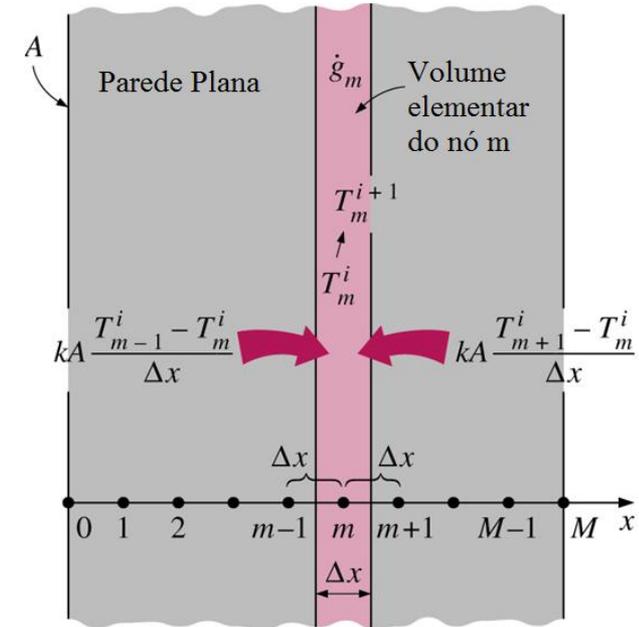
$$\sum_{\text{Todos os lados}} Q^i + G_{\text{elemento}}^i = \rho V_{\text{elemento}} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (5.34)$$

Método implícito

$$\sum_{\text{Todos os lados}} Q^{i+1} + G_{\text{elemento}}^{i+1} = \rho V_{\text{elemento}} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (5.35)$$

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Considere a condução de calor bidimensional em regime transiente numa parede plana de espessura L , com geração de calor $g(\mathbf{x}, t)$, que pode variar no tempo e no espaço e com a condutividade k constante com uma malha $\Delta x = L/M$ e nós $0, 1, 2, \dots, M$ na direcção x , como mostrado na figura. A formulação de diferenças finitas em regime transiente para um nó interior fica:



$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + g_m A \Delta x = \rho A \Delta x C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (5.36)$$

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Cancelando a área A da superfície e multiplicando por $\Delta x/k$, simplifica-se em:

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{g_m \Delta x^2}{k} = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_m^{i+1} - T_m^i) \quad (5.37)$$

Onde $\alpha = k/\rho C$ é a difusibilidade térmica do material da parede. Definamos a malha adimensional do número de Fourier como:

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \quad (5.38)$$

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Então a Equação 5.37 transforma-se em:

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{g_m \Delta x^2}{k} = \frac{(T_m^{i+1} - T_m^i)}{\tau} \quad (5.39)$$

Note que o lado esquerdo desta equação é simplesmente a formulação de diferenças finitas do problema para o caso estacionário. Isto não é surpreendente uma vez que a formulação reduz-se para o regime estacionário no caso em que $T_m^{i+1} = T_m^i$.

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Obtem-se a formulação explícita de diferenças finitas, expressando o lado esquerdo da Equação 5.37 no passo de tempo i como:

$$T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i + \frac{g_m^i \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau} \quad (5.40)$$

Esta equação pode ser resolvida explicitamente para a nova temperatura T_m^{i+1} (e, portanto, o método explícito) obtendo-se:

$$T_m^{i+1} = \tau \left(T_{m-1}^i + T_{m+1}^i \right) + (1 - 2\tau) T_m^i + \tau \frac{g_m^i \Delta x^2}{k} \quad (5.41)$$

Para todos os nós internos $m=1,2,3,\dots,M-1$ na parede plana

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Expressando a parte esquerda da Equação 5.37 no tempo $i+1$ em vez do tempo i obtém-se a formulação do método implícito

$$T_{m-1}^{i+1} - 2T_m^{i+1} + T_{m+1}^{i+1} + \frac{g_m^{i+1} \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau} \quad (5.42)$$

Que pode ser rearranjado resultando em:

$$\tau T_{m-1}^{i+1} - (1+2\tau)T_m^{i+1} + \tau T_{m+1}^{i+1} + \tau \frac{g_m^{i+1} \Delta x^2}{k} + T_m^i = 0 \quad (5.43)$$

A aplicação de uma formulação explícita ou implícita para cada um dos $M-1$ nós interiores dá $M-1$ equações. As duas restantes equações são obtidas aplicando o mesmo método para os dois nós de fronteira a menos, que as temperaturas limites sejam especificados como constantes (invariantes com o tempo)

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Por exemplo, a formulação da condição de contorno de convecção na fronteira esquerda (nó 0) para o caso explícito pode ser expressa como:

$$hA(T_\infty - T_0^i) + kA \frac{T_1^i - T_0^i}{\Delta x} + g_0^i \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = \rho A \frac{\Delta x}{2} C \frac{T_0^{i+1} - T_0^i}{\Delta t} \quad (5.44)$$

Que se simplifica para:

$$T_0^{i+1} = \left(1 - 2\tau - 2\tau \frac{h\Delta x}{k} \right) T_0^i + 2\tau T_1^i + 2\tau \frac{h\Delta x}{k} T_\infty + \tau \frac{g_0^i \Delta x^2}{k} \quad (5.45)$$

5.4 Condução Unidimensional em Regime Transiente

Se o passo de tempo Δt não é suficientemente pequeno, as soluções obtidas pelo método explícito podem oscilar descontroladamente e divergir da solução real. Para evitar tais oscilações divergentes nas temperaturas nodais, o valor de Δt deve ser mantido abaixo de um certo limite máximo estabelecido pelo **critério de estabilidade**.

O critério de estabilidade para nós internos em problemas de transferência de calor unidimensionais em coordenadas rectangulares é dado por:

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (5.46)$$

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

Considere-se uma região retangular em que a condução de calor é significativa nas direções x e y , e considere-se a espessura $\Delta z = 1$ na direção z . O calor pode ser gerado no meio a uma taxa de $g(x, y, t)$, que pode variar com o tempo e posição, com a condutividade térmica do meio k assumida constante.

Dividindo-se o plano da região numa malha retangular de pontos nodais espaçadas Δx e Δy nas direções x e y respectivamente, e considere-se um nó geral interior (m, n) , cujas coordenadas são $x = m\Delta X$ e $Y = n\Delta y$.

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

A formulação transiente de diferenças finitas para um nó interior em geral pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} k\Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \\ + k\Delta x \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + g_{m,n} \Delta x \Delta y = \rho \Delta x \Delta y C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Utilizando-se uma malha quadrada $\Delta x = \Delta y = 1$ e dividindo cada termo da expressão por k , após a simplificação obtém-se:

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{g_{m,n}l^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau} \quad (5.48)$$

Onde $\alpha = k/\rho C$ é a difusividade térmica do material e $\tau = \alpha \Delta t/12$ é o número adimensional da malha de Fourier. Também se pode expressar em termos das temperaturas dos nós vizinhos pela seguinte formula fácil de memorizar:

$$T_{esquerda} + T_{topo} + T_{direita} + T_{baixo} - 4T_{nó} + \frac{g_{nó}l^2}{k} = \frac{T_{nó}^{i+1} - T_{nó}^i}{\tau} \quad (5.49)$$

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

Obtém-se a formulação explícita de diferenças finitas, expressando o lado esquerdo no passo de tempo i como:

$$T_{esquerda}^i + T_{topo}^i + T_{direita}^i + T_{baixo}^i - 4T_{nó}^i + \frac{g_{nó}^i l^2}{k} = \frac{T_{nó}^{i+1} - T_{nó}^i}{\tau} \quad (5.50)$$

Expressando o lado esquerdo na etapa de tempo $i + 1$ em vez de i obtém-se a formulação implícita. Esta equação pode ser resolvida explicitamente para a nova temperatura $T_{nó}^{i+1}$ para se obter:

$$T_{nó}^{i+1} = \tau \left(T_{esquerda}^i + T_{topo}^i + T_{direita}^i + T_{baixo}^i \right) + (1 - 4\tau) T_{nó}^i + \tau \frac{g_{nó}^i l^2}{k} \quad (5.51)$$

Para todos os nós internos (m,n) onde $m=1,2,3,\dots,M-1$ e $n=1,2,3,\dots,N-1$ no meio

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

O critério de estabilidade requer que o coeficiente de \mathbf{T}_m^i na expressão \mathbf{T}_m^{i+1} deva ser maior ou igual a zero para todos os nós, é igualmente válida para os casos bi ou tri dimensionais e limita severamente o tamanho do passo de tempo Δt que pode ser usado no método explícito.

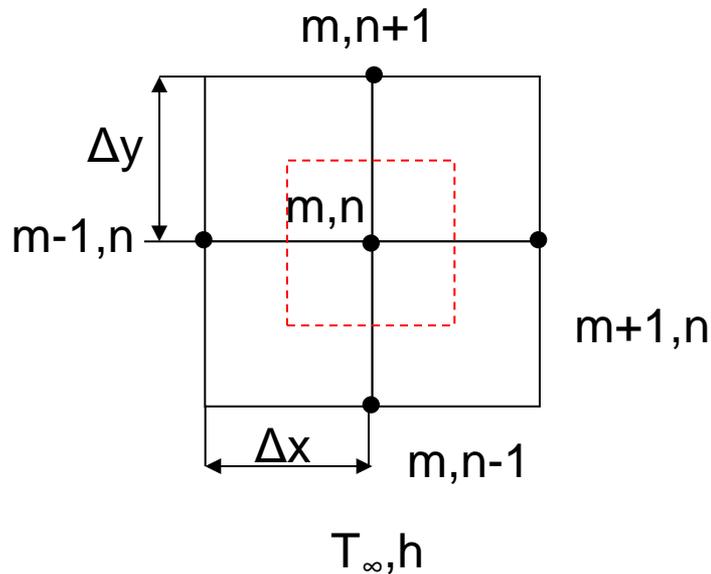
Para nós internos de transferência de calor bidimensional em coordenadas retangulares o critério de estabilidade é dado por:

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{l^2} \leq \frac{1}{4} \quad (5.52)$$

Apresentam-se em seguida algumas das equações mais utilizadas para a solução de problemas bidimensionais em regime transiente.

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

Caso 1 - Nó interior



Critério de estabilidade

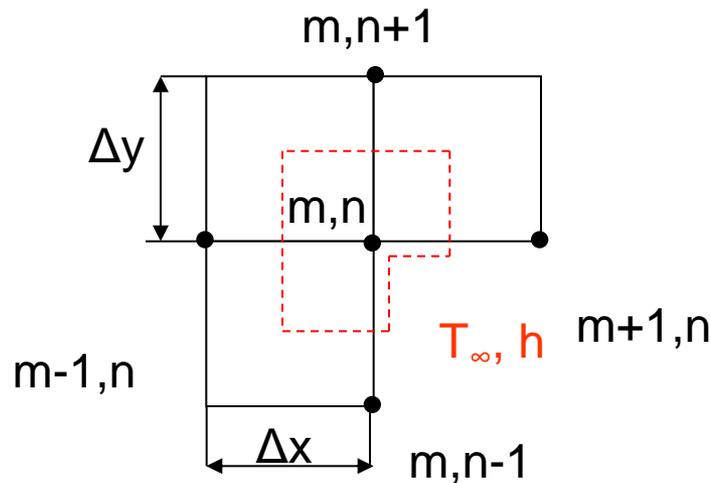
$$Fo \leq \frac{1}{4}$$

Equação nodal $\Delta x = \Delta y$

$$T_{m,n}^{i+1} = \tau \left(T_{m,n+1}^i + T_{m,n-1}^i + T_{m+1,n}^i + T_{m-1,n}^i \right) + (1 - 4\tau) T_{m,n}^i$$

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

Caso2 - Nó num vértice interior com convecção



Cr terio de estabilidade

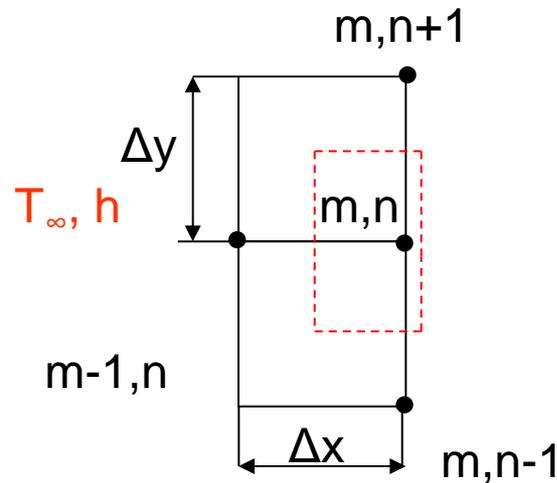
$$Fo(3 + Bi) \leq \frac{3}{4}$$

Equa o nodal $\Delta x = \Delta y$

$$T_{m,n}^{i+1} = \frac{2}{3} \tau \left[2T_{m+1,n}^i + 2T_{m,n+1}^i + T_{m-1,n}^i + T_{m,n-1}^i + 2(Bi)T_\infty^i \right] + \left[1 - 4\tau - \frac{4}{3} \tau Bi \right] T_{m,n}^i$$

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

Caso 3 - Nó numa superfície plana com convecção



Critério de estabilidade

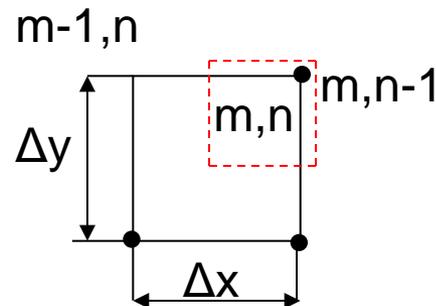
$$\tau \leq \frac{1}{4}$$

Equação nodal $\Delta x = \Delta y$

$$T_{m,n}^{i+1} = \tau \left(2T_{m-1,n}^i + T_{m,n+1}^i + T_{m,n-1}^i \right) + [1 + 4\tau] T_{m,n}^i$$

5.5 Condução Bidimensional em Regime Transiente

Caso 4 - Nó num vértice externo com convecção



Critério de estabilidade

$$\tau(1 + Bi) \leq \frac{1}{4}$$

Equação nodal $\Delta x = \Delta y$

$$T_{m,n}^{i+1} = 2\tau \left[T_{m,n-1}^i + T_{m-1,n}^i + 2(Bi)T_{\infty}^p \right] + \left[1 + 4\tau - 4\tau(Bi) \right] T_{m,n}^i$$

5.6 Solução das Equações de Elementos Finitos

Considerando um sistema de N equações diferentes correspondentes a N temperaturas desconhecidas, a metodologia de solução começa por expressar as equações:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}T_1 & + & a_{12}T_2 & + & a_{13}T_3 & + & \cdots & + & a_{1N}T_N & = & C_1 \\ a_{21}T_1 & + & a_{22}T_2 & + & a_{23}T_3 & + & \cdots & + & a_{2N}T_N & = & C_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1}T_1 & + & a_{N2}T_2 & + & a_{N3}T_3 & + & \cdots & + & a_{NN}T_N & = & C_N \end{array} \quad (5.53)$$

Onde $a_{11}, a_{12}, \dots, C_1, \dots$ são coeficientes e constantes conhecidas relacionadas com $\Delta x, k, h$ e T_∞

5.6 Solução das Equações de Elementos Finitos

Usando a notação Matricial pode-se escrever:

$$[A][T] = [C] \quad (5.54)$$

Onde:

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad T \equiv \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}, \quad C \equiv \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

5.6 Solução das Equações de Elementos Finitos

O vector solução de temperaturas pode então ser escrito como:

$$[T] = [A]^{-1}[C] \quad (5.56)$$

Onde $[A]^{-1}$ é a matriz inversa de $[A]$ e é definida por:

$$[A]^{-1} \equiv \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Inversa da Matriz (I)

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the 'View' tab selected. The worksheet contains a 3x3 matrix in the range D5:F7. The values in the matrix are:

				1	2	3		
				4	5	6		
				2	1	3		

Cell G7 is selected and highlighted with a green border.

Introduzir os valores da matriz à inverter.

Inversa da Matriz (II)

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the 'View' ribbon selected. The formula bar contains '=min'. The worksheet grid shows a 3x3 matrix in cells D5:F7:

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1											
2											
3											
4											
5		1	2	3	=min						
6		4	5	6							
7		2	1	3							
8											
9											
10											
11											
12											

A tooltip for the MINVERSE function is visible, showing the following options:

- MIN
- MINA
- MINUTE
- MINVERSE (selected)

The tooltip description for MINVERSE is: "Returns the inverse matrix for the matrix stored in an array".

Seleccionar as células onde ficará a matriz inversa, escrever o sinal "=" e escolher a função MINVERSE

Inversa da Matriz (III)

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the 'View' tab selected. The formula bar displays the formula `=MINVERSE(D5:F7)`. The worksheet contains a 3x3 matrix in cells D5:F7:

The formula `=MINVERSE(D5:F7)` is entered in cell H5. A yellow callout box contains the text: "Seleccionar a matriz à inverter e pressionar em simultâneo as teclas: Control+Shift+Enter".

Inversa da Matriz (IV)

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1											
2											
3											
4											
5			1	2	3	-1	0.33333	0.33333			
6			4	5	6	0	0.33333	-0.66667			
7			2	1	3	0.66667	-0.33333	0.33333			
8											
9											
10											
11											
12											

The formula bar shows the formula: `=MINVERSE(D5:F7)`

Multiplicação da Matriz pelo Vector (I)

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1											
2											
3											
4		Matriz Inicial				Matriz Inversa				Vector	
5		1	2	3		-1	0.33333	0.33333		1	
6		4	5	6		0	0.33333	-0.66667		3	
7		2	1	3		0.66667	-0.33333	0.33333		5	
8											
9											
10											
11											
12											

Introduzir nas células o vector a multiplicar pela matriz.

Multiplicação da Matriz pelo Vector (II)

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1												
2												
3												
4		Matriz Inicial				Matriz Inversa				Vector		Resultado
5		1	2	3		-1	0.33333	0.33333		1		=MMULT(MMULT(array1,array2)
6		4	5	6		0	0.33333	-0.66667		3		
7		2	1	3		0.66667	-0.33333	0.33333		5		
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												

A yellow callout box contains the following text:

Seleccionar as células onde ficará o vector solução, escrever o sinal “=” e escolher a função MMULT

Multiplicação da Matriz pelo Vector (III)

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1														
2														
3														
4		Matriz Inicial				Matriz Inversa				Vector		Resultado		
5		1	2	3		-1	0.33333	0.33333		1		=MMULT(H5:J7,L5:L7)		
6		4	5	6		0	0.33333	-0.66667		3				
7		2	1	3		0.66667	-0.33333	0.33333		5				
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														

Seleccionar a matriz à multiplicar, separado por vírgula, o vector a multiplicar e pressionar em simultâneo as teclas: Control+Shift+Enter

Multiplicação da Matriz pelo Vector (IV)

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1													
2													
3													
4		Matriz Inicial				Matriz Inversa				Vector		Resultado	
5		1	2	3		-1	0.33333	0.33333		1		1.66667	
6		4	5	6		0	0.33333	-0.66667		3		-2.33333	
7		2	1	3		0.66667	-0.33333	0.33333		5		1.33333	
8													
9													
10													
11													
12													