



Transmissão de calor

3^o ano

6. Convecção

- Introdução à Convecção
- Tipos de Escoamentos
- Camada limite Fluidodinâmica
- Camada Limite Térmica
- Escoamentos Laminares e Turbulentos
- Transferência de calor e Momentum em Escoamentos turbulentos
- Dedução das Equações Diferenciais de Convecção
- Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana
- Equação de Convecção Adimensional e Similaridade
- Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção
- Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

6.1 Introdução à Convecção

Até aqui foi considerada a condução de calor que é o mecanismo de transferência de calor através de um sólido ou fluido estático.

Neste capítulo vai-se considerar a convecção, que é o mecanismo de transferência de calor através de fluido em movimento.

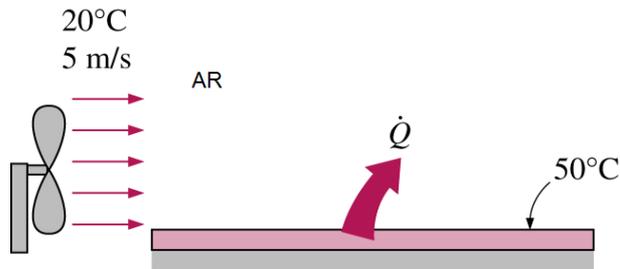
6.1 Introdução à Convecção



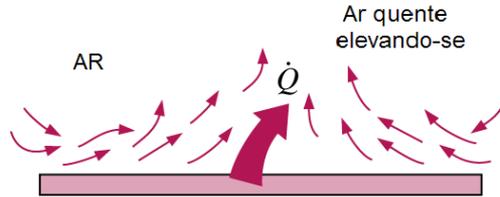
A transferência de calor através de um sólido é sempre por condução, pois as moléculas de um sólido permanecem em posições relativamente fixas. A transferência de calor através de um líquido ou de um gás, pode ser por condução ou por convecção, dependendo do fluido estar ou não em movimento. A transferência de calor através de um fluido é por convecção se ele estiver em movimento e por condução na ausência deste.

Conseqüentemente, a condução em um líquido pode ser vista como o exemplo limite da convecção, correspondendo ao caso em que o fluido está em repouso.

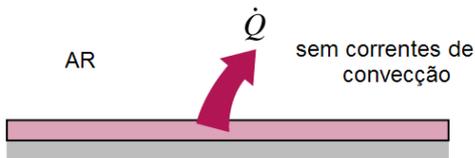
6.1 Introdução à Convecção



(a) Convecção forçada



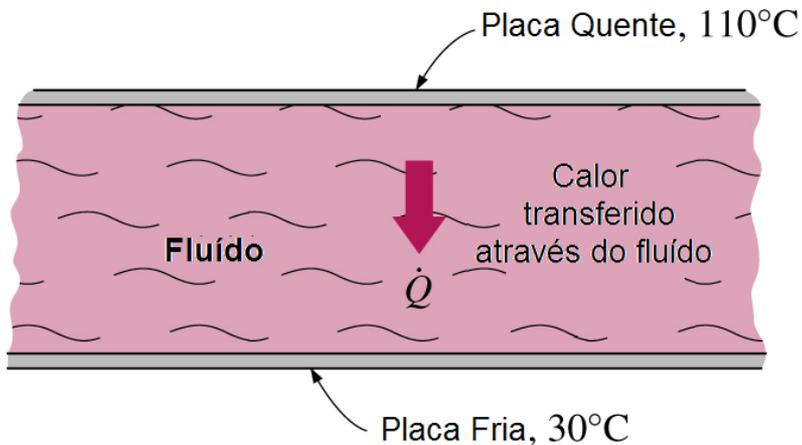
(b) Convecção livre



(c) Condução

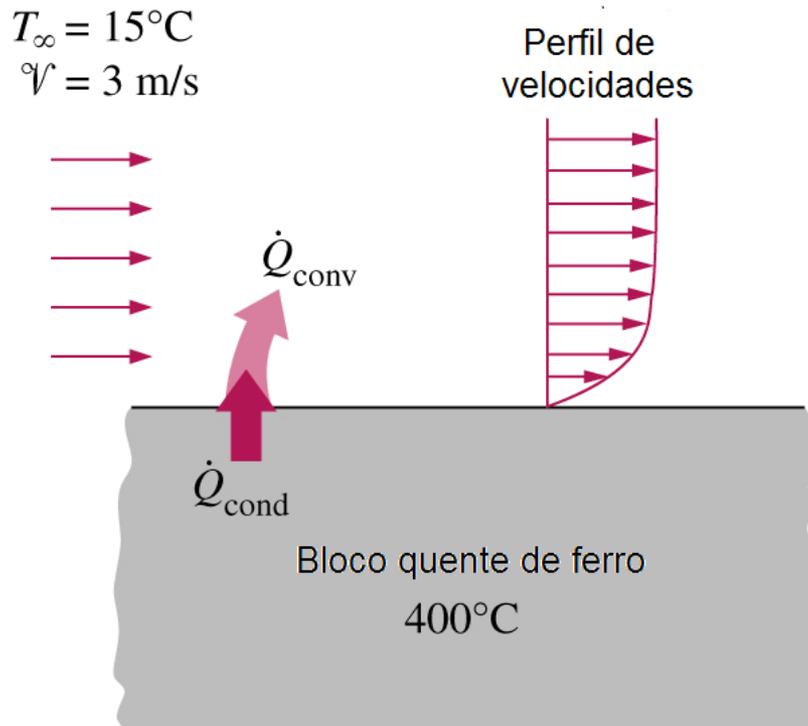
Calor transferido de uma superfície quente para um fluido ambiente por convecção e por condução.

6.1 Introdução à Convecção



A transferência de calor por convecção é complicada pelo facto de para além de envolver a condução de calor, também envolver o movimento do fluido. A taxa de transferência de calor através de um fluido é muito mais elevada por convecção do que por condução. Quanto, mais elevada a velocidade do fluido, mais elevada a taxa de transferência de calor.

6.1 Introdução à Convecção



Considere-se a refrigeração de um bloco de ferro quente por ar proveniente de um ventilador que incide na sua superfície superior. Sabe-se que o calor será transferido do bloco quente para o ar circunvizinho frio, e o bloco esfriará.

O bloco esfriará mais rapidamente se o ventilador for posto a uma velocidade mais elevada.

Se o ar for substituído por água aumentará a transferência de calor por convecção.

6.1 Introdução à Convecção

A experiência mostra que a transferência de calor por convecção é fortemente dependente :

- da viscosidade dinâmica μ ;*
- da condutibilidade térmica k ;*
- da massa específica ρ ;*
- do calor específico C_p ;*
- e da velocidade do fluido v .*

Também depende da geometria e da rugosidade da superfície, para além do tipo de fluxo do fluido (laminar ou turbulento)

6.1 Introdução à Convecção

Apesar da complexidade da convecção, a taxa de transferência de calor por convecção é proporcional à diferença das temperaturas e é convenientemente expressa pela lei de resfriamento de Newton como:

$$q_{conv} = h(T_s - T_\infty) \text{ (W/m}^2\text{)} \quad (6.1)$$

ou

$$Q_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) \text{ (W)} \quad (6.2)$$

Onde:

h – coeficiente de transferência de calor por convecção, $W/m^2 \cdot ^\circ C$

A_s - superfície de transferência de calor, m^2

T_s - temperatura da superfície, $^\circ C$

T_∞ - temperatura do fluido suficientemente perto da superfície, $^\circ C$

6.1 Introdução à Convecção

Uma implicação de não haver deslizamento nem salto térmico é que transferência de calor entre a superfície e a camada fluida junto à mesma é por condução pura, desde que o escoamento não tenha movimento, e pode ser expressa por:

$$q_{conv} = q_{cond} = -k_{fluid} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{W/m}^2) \quad (6.3)$$

Onde:

T_s - temperatura da superfície, °C;

$(\partial T / \partial y)_{y=0}$ – é o gradiente da temperatura na superfície.

6.1 Introdução à Convecção

Combinando as Equações 6.1 e 6.3 para o fluxo de calor obtém-se:

$$h = \frac{-k_{fluid}(\partial T/\partial y)_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (\text{W/m}^2 \cdot \text{°C}) \quad (6.4)$$

para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção quando a distribuição da temperatura dentro do fluido for conhecida.

6.1.1 Número de Nusselt

Em estudos sobre convecção, é prática comum adimensionalizar as equações governantes, combinar as variáveis e agrupá-las em números adimensionais, a fim de reduzir a quantidade de variáveis. É também prática comum adimensionalizar o coeficiente de transferência de calor h pelo número de Nusselt, definido por:

$$N_u = \frac{hL_c}{k} \quad (6.5)$$

Onde k é o coeficiente de condutibilidade térmica do fluido e L_c é a dimensão característica.

6.1.1 Número de Nusselt

Para compreender o sentido físico do número de Nusselt, considere-se um escoamento de espessura L com a diferença de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$. A transferência de calor para o escoamento será por convecção quando o escoamento estiver em movimento e por condução quando o escoamento estiver em repouso. O fluxo de calor (a taxa de transferência de calor por unidade de tempo e unidade de superfície) num e noutro caso será:

$$\dot{q}_{conv} = h\Delta T \quad (6.6)$$

6.1.1 Número de Nusselt

e

$$\dot{q}_{cond} = k \frac{\Delta T}{L} \quad (6.7)$$

A razão entre os dois dá:

$$\frac{\dot{q}_{conv}}{\dot{q}_{cond}} = \frac{h\Delta T}{k\Delta T/L} = \frac{hL}{k} = Nu \quad (6.8)$$

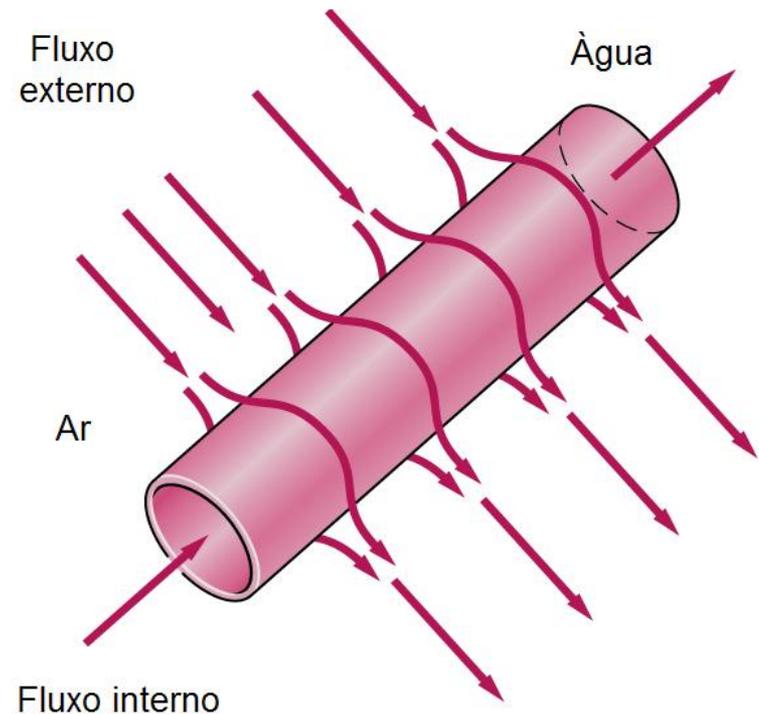
Que é o número de Nusselt

6.2.1 Escoamentos Internos vs Externos

Os escoamentos de fluidos podem ser classificados em internos ou externos, dependendo do fluido ser forçado a passar por um ducto ou encontrar-se na parte externa de uma superfície. O fluxo de um fluido não confinado sobre uma superfície tal como uma placa, um fio, ou uma tubulação é fluxo externo. O fluxo em uma tubulação ou em um ducto é fluxo interno isto é, se o líquido for completamente limitado por superfícies contínuas.

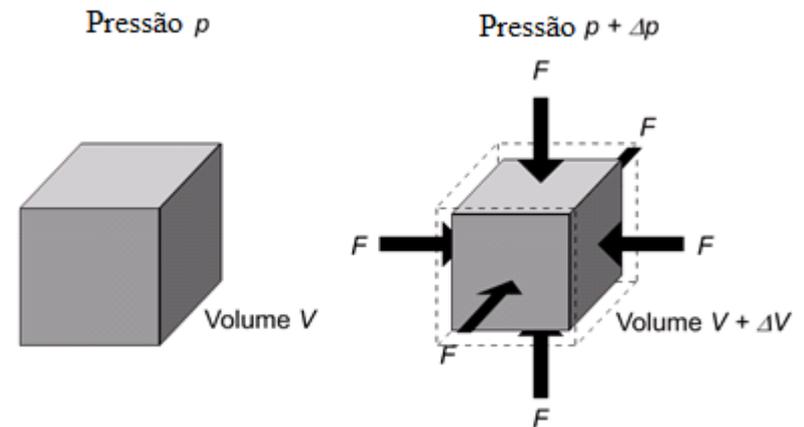
6.2.1 Escoamentos Internos vs Externos

Fluxo de água interno
num tubo e fluxo de ar
externo no mesmo tubo.



6.2.2 Escoamentos compressíveis vs incompressíveis

Um escoamento pode ser classificado como compressível ou incompressível, dependendo da variação da massa específica do fluido ao longo do escoamento. A massa específica dos líquidos é geralmente constante, assim o escoamento de líquidos é tipicamente incompressível.



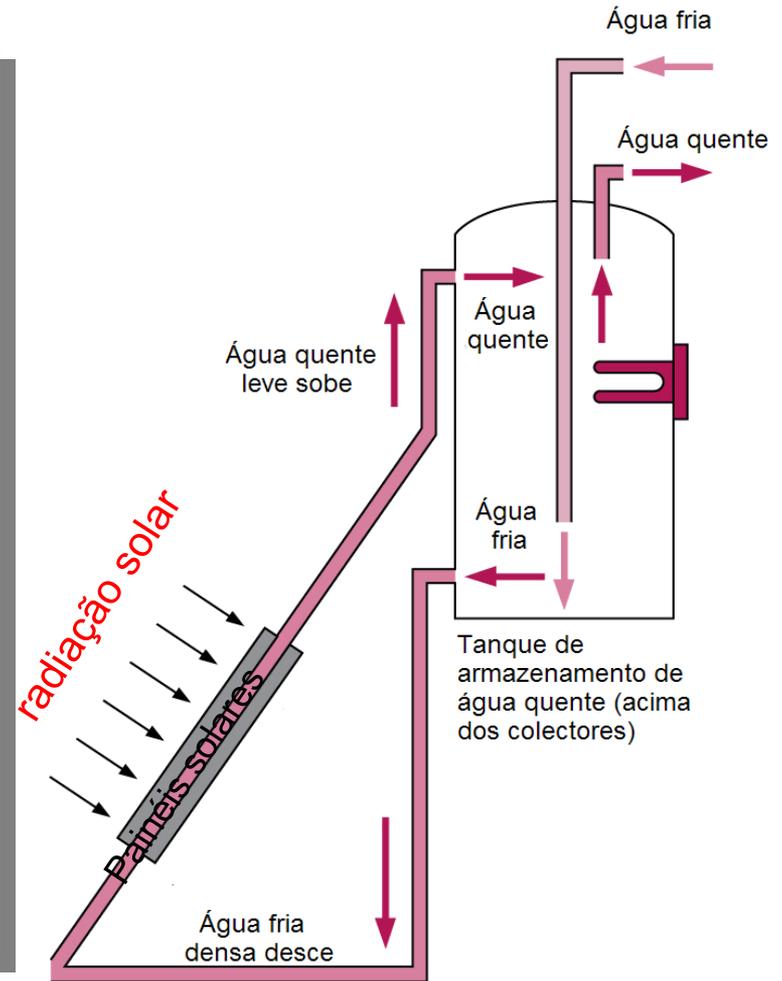
6.2.3 Escoamentos Laminares vs Turbulentos

*Alguns escoamentos são suaves e ordenados enquanto outros são caóticos. O movimento do fluido muito organizado caracterizado por linhas de fluxo suaves são chamados **laminares**. Os fluidos com movimento muito desordenado que geralmente ocorre a grandes velocidades caracterizado por flutuações da velocidade são chamados **turbulentos**.*



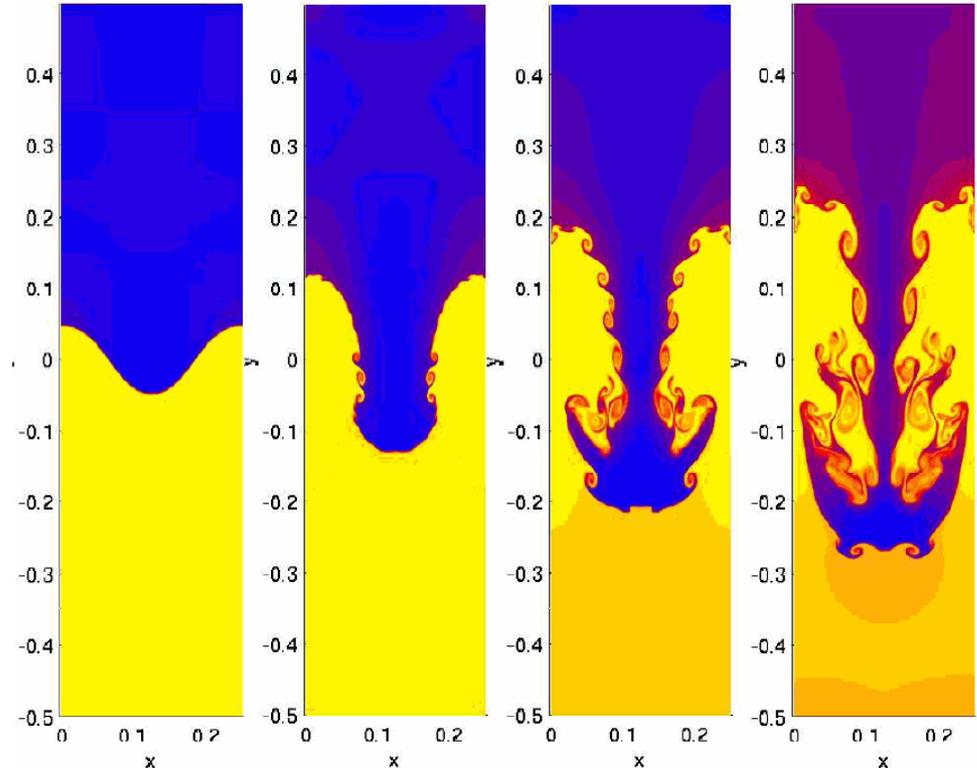
6.2.4 Escoamentos Naturais vs Forçados

O movimento de um fluído pode ser natural ou forçado, dependendo de como o movimento é iniciado. Em fluxos forçados, o fluído é obrigado a escoar-se por uma superfície ou tubulação por meios externos, tais como uma bomba ou um ventilador. Em fluxos naturais, todo o movimento do fluído é resultado de efeitos naturais tais como o de termo sifão. Este efeito de termo sifão é usado geralmente para substituir as bombas em sistemas de aquecimento solar de água.

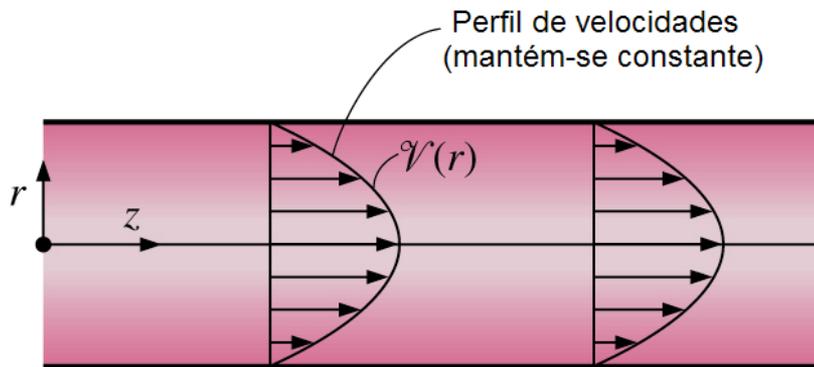


6.2.5 Escoamentos em regime Permanente vs Transiente

*Quando se trata de escoamentos, o termo **permanente** implica a não variação no tempo, o oposto chama-se **transiente**. O termo **uniforme** implica a não alteração com a localização de uma região específica.*



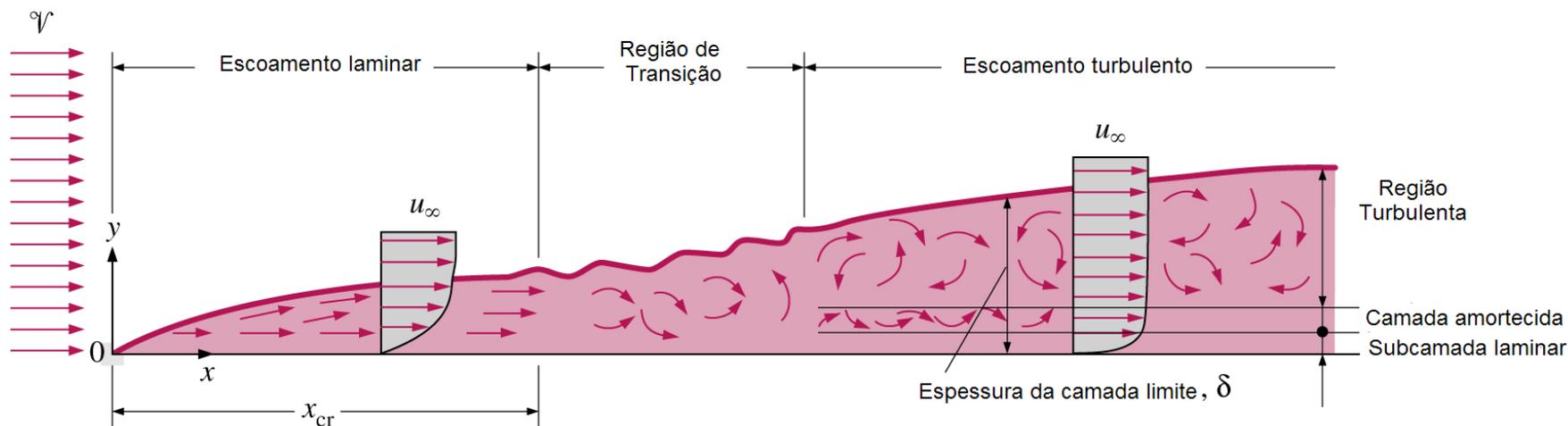
6.2.6 Escoamentos Uni, Bi e Tridimensionais



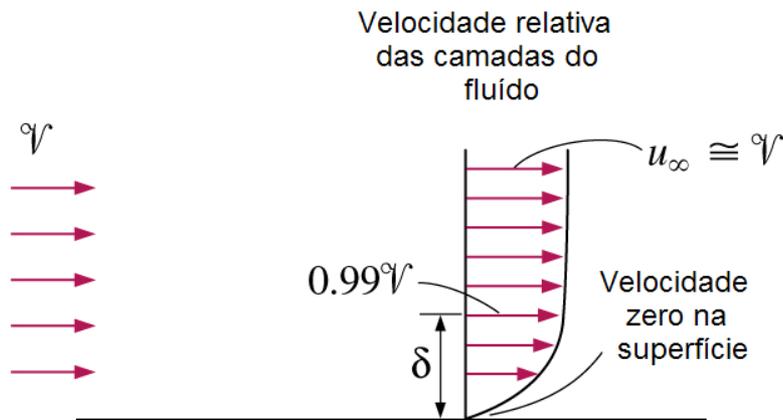
Um fluxo pode ser bem caracterizado pela distribuição da sua velocidade. Assim, um escoamento pode ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional, dependendo da velocidade variar em uma ou duas ou três direcções.

6.3 Camada limite Fluidodinâmica

Considere-se o fluxo paralelo de um líquido sobre uma placa plana. A coordenada x é medida ao longo da superfície da placa, desde a borda de ataque no sentido do fluxo, e y é medido da superfície no sentido normal a mesma.



6.3 Camada limite Fluidodinâmica



*A região acima da placa limitada por δ , onde os efeitos das forças de cisalhamento causados pela viscosidade do fluido se fazem sentir, é chamada **camada limite fluidodinâmica**. A camada limite é geralmente descrita como a distância x que vai desde a placa até a região onde a velocidade é $u=0,99u_\infty$.*

6.3.1 Tensão de Cisalhamento

*No escoamento de um fluido sobre a superfície de uma placa, a camada em contacto com a superfície tentará arrastar longitudinalmente a placa por fricção, exercendo uma **força de fricção** nela. Do mesmo modo, uma camada de fluido mais rápida tentará arrastar a camada mais lenta adjacente e exercer uma força de fricção, por causa da fricção entre as duas camadas.*

6.3.1 Tensão de Cisalhamento

O coeficiente de fricção entre o fluido e a placa é dado pela expressão:

$$C_f \equiv \frac{\tau_s}{\rho u_\infty^2 / 2} \quad (6.9)$$

Supondo o escoamento de um fluido Newtoniano, a tensão de cisalhamento na superfície pode ser determinada a partir do conhecimento do gradiente de velocidades

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (N/m^2) \quad (6.10)$$

6.3.1 Tensão de Cisalhamento

A determinação da tensão de cisalhamento pela fórmula anterior não é prática, pois requer a determinação do perfil de velocidades. O método mais usual em fluxos externos é relacionar a tensão à velocidade de escoamento por:

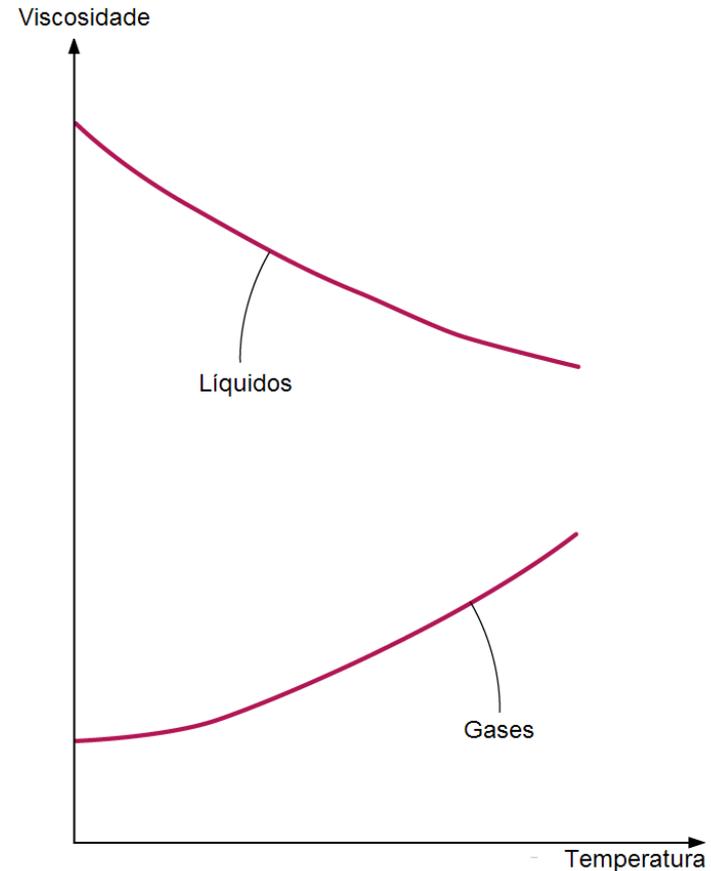
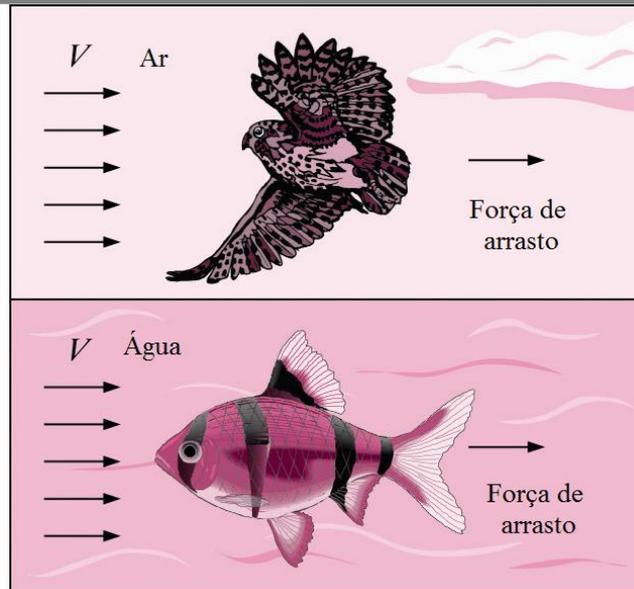
$$\tau_s = C_f \frac{\rho V^2}{2} \quad (\text{N/m}^2) \quad (6.11)$$

Uma vez conhecido o coeficiente de fricção médio de uma dada superfície, a força de fricção sobre toda a superfície é determinada de:

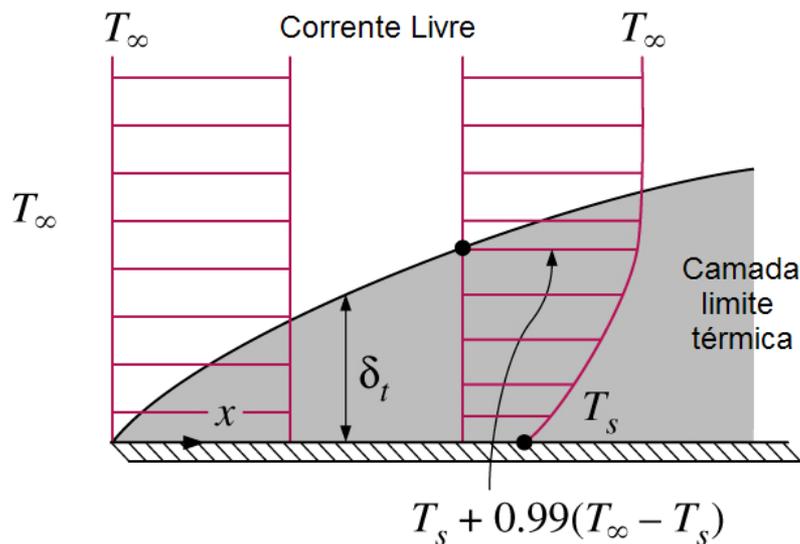
$$F_f = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2} \quad (\text{N}) \quad (6.12)$$

6.3.1 Tensão de Cisalhamento

A viscosidade dos líquidos baixa e a dos gases aumenta com o aumento da temperatura



6.4 Camada Limite Térmica



*Num escoamento a uma temperatura uniforme T_∞ sobre uma placa plana isotérmica à temperatura T_s , as partículas do fluido adjacentes à superfície, alcançarão o equilíbrio térmico com a placa e terão a temperatura da superfície T_s . A região do fluxo sobre a superfície em que a variação da temperatura no sentido normal à superfície é significativa é chamada **camada limite térmica**.*

6.4.1 Número de Prandtl

A espessura relativa das camadas limite fluidodinâmica e térmica descreve-se pelo número adimensional de Prandtl, parâmetro, definido como:

$$\text{Pr} = \frac{\text{Difusibilidade molecular do momentum}}{\text{Difusibilidade molecular do calor}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (6.13)$$

O número de Prandtl dos fluidos, varia de menos de 0,01 para metais líquidos, até mais de 100.000, para óleos pesados. O número de Prandtl é da ordem de 10 para a água.

6.5 Escoamentos Laminares e Turbulentos

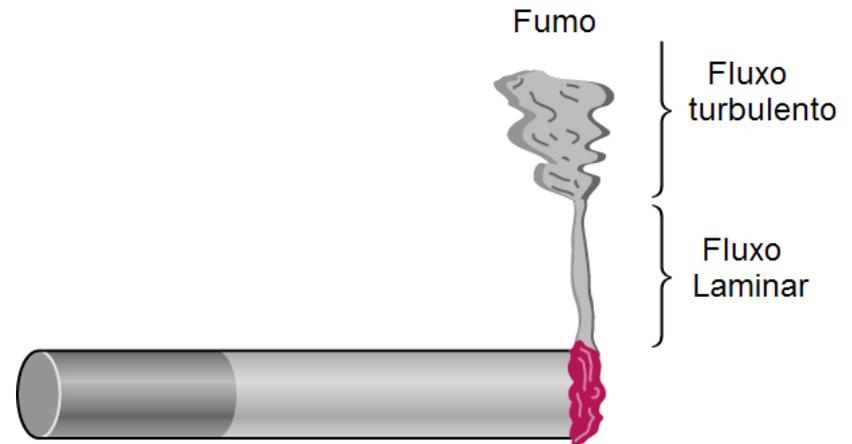
*O escoamento laminar é caracterizado por linhas aerodinâmicas paralelas e pelo movimento ordenado das partículas e o turbulento é caracterizado por flutuações da velocidade e por movimento muito desordenado das partículas. A transição do escoamento laminar para o turbulento não ocorre de repente; ocorre numa região em que o escoamento flutua entre laminar e turbulento, antes que se torne completamente turbulento, esta região chama-se de **transição**.*

6.5 Escoamentos Laminares e Turbulentos

*Pode-se considerar que a camada limite turbulenta é composta por três sub-camadas. A camada muito fina adjacente à parede onde os efeitos viscosos são dominantes a **sub-camada laminar**. O perfil da velocidade nesta camada é quase linear, e o escoamento é caracterizado por linhas aerodinâmicas paralelas. Adjacente a sub-camada laminar encontra-se a **sub-camada amortecida**, em que os efeitos turbulentos são significativos mas não dominantes aos de difusão, e adjacente a ela encontra-se a **sub-camada turbulenta**, onde os efeitos turbulentos dominam; ela ocorre numa região em que o fluxo flutua entre laminar e turbulento, antes que se torne completamente turbulento.*

6.5 Escoamentos Laminares e Turbulentos

Observa-se que o fumo do cigarro se eleva primeiro num fluxo plano, para poucos centímetros depois começarem flutuações aleatórias em todos os sentidos.



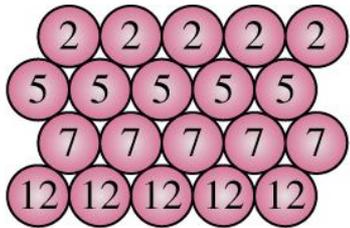
6.5.1 Número de Reynolds

A transição do escoamento laminar para turbulento depende da geometria e da aspereza da superfície, da velocidade do escoamento livre, da temperatura da superfície, do tipo de fluido, entre outros parâmetros. O regime de escoamento depende principalmente da relação entre as forças de inércia e viscosas no escoamento. Esta relação é chamada número de Reynolds, que é uma grandeza adimensional e para fluxo externo é expressa por:

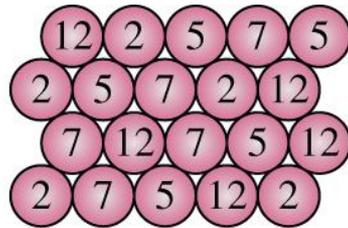
$$\text{Re} = \frac{\text{Forças de inércia}}{\text{Forças viscosas}} = \frac{VL_c}{\nu} = \frac{\rho VL_c}{\mu} \quad (6.14)$$

Onde L_c é a dimensão característica, V a velocidade e ν a viscosidade cinemática do fluido.

6.6 Transferência de calor e Momentum em Escoamentos turbulentos



(a) Antes da Turbulência

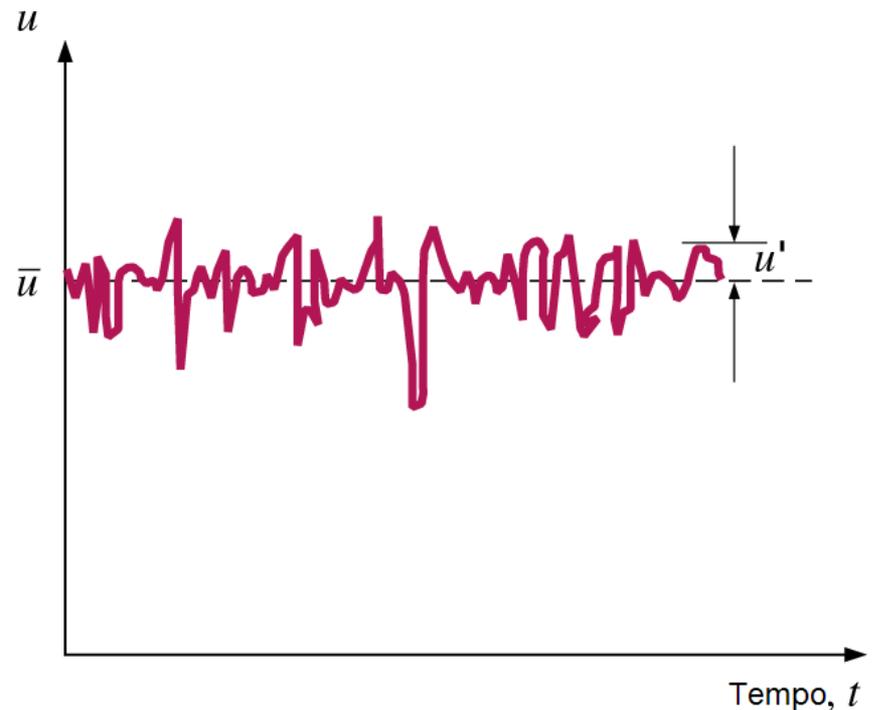


(b) Depois da Turbulência

O remoinho intenso no escoamento turbulento faz com que as partículas do fluido a temperaturas diferentes entrem em contacto aumentando assim a transferência de calor.

6.6 Transferência de calor e Momentum em Escoamentos turbulentos

Em uma posição especificada do escoamento turbulento, notam-se flutuações da componente u da velocidade, com tempo.



6.6 Transferência de calor e Momentum em Escoamentos turbulentos

A maior parte dos escoamentos que se encontram em problemas de engenharia são turbulentos, daí ser importante compreender como a turbulência influencia os fenômenos de transferência de calor.

Como se pode observar os valores instantâneos da velocidade flutuam em torno de um valor médio, o que sugere que a velocidade possa ser escrita como a soma de um valor médio e de uma componente flutuante

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (6.15)$$

A tensão de cisalhamento e o calor transferido em regime turbulento podem ser escritos como:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{e} \quad q_t = \rho C_p \overline{v'T'} = -k_t \frac{\partial T}{\partial y} \quad (6.16)$$

6.6 Transferência de calor e Momentum em Escoamentos turbulentos

A tensão de cisalhamento e o calor transferido totais em regime turbulento podem ser dados por:

$$\tau_{total} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6.17)$$

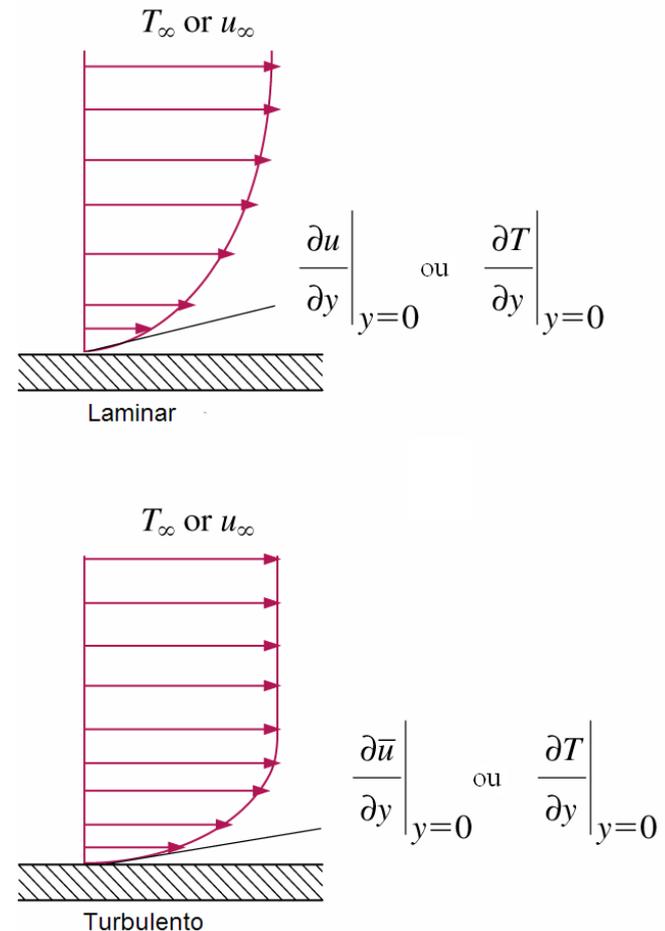
e

$$q_{total} = (k + k_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\rho C_p (\alpha + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (6.18)$$

Onde $\varepsilon_M = \mu_t / \rho$ é a eddy difusibilidade do momentum e $\varepsilon_H = k_t / \rho C_p$ é a eddy difusibilidade de calor

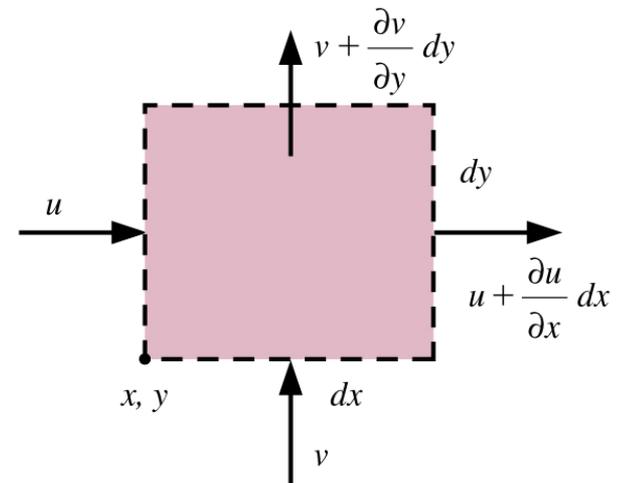
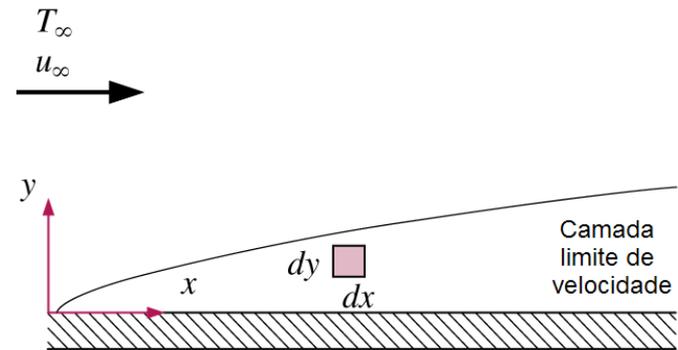
6.6 Transferência de calor e Momentum em Escoamentos turbulentos

Os gradientes da velocidade e da temperatura, a tensão de cisalhamento e a taxa de transferência de calor na parede, são muito maiores para os escoamentos turbulentos do que para os laminares.



6.7 Dedução das Equações Diferenciais de Convecção

Volume do controle diferencial usado na derivação do balanço mássico na camada limite fluidodinâmica, no escoamento bidimensional sobre uma superfície.



6.7.1 Conservação de massa

O princípio de conservação de massa preconiza que a massa não pode ser criada nem destruída. Num escoamento em regime permanente, a massa num determinado volume de controle permanece constante e pode ser expressa como:

Quantidade de massa
que entra no volume de
controle

=

Quantidade de massa
que sai do volume de
controle

6.7.1 Conservação de massa

A razão a qual o fluído sai do volume de controle do lado direito é dada por:

$$\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) (dy \cdot 1) \quad (6.19)$$

Repetindo na direcção y e substituindo os resultados obtém-se:

$$\rho u (dy \cdot 1) + \rho v (dx \cdot 1) = \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) (dy \cdot 1) + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) (dx \cdot 1) \quad (6.20)$$

Simplificando e dividindo por $dx \cdot dy \cdot 1$ obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.21)$$

*Esta é a relação de conservação de massa também conhecida como **equação de continuidade***

6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

A forma diferencial das equações do movimento na camada limite fluidodinâmica é obtida aplicando a segunda lei de Newton a um elemento diferencial do volume de controle na camada de limite. A segunda lei de Newton é a expressão de conservação do momentum, e pode ser descrita como a força que age no volume de controle e que é igual ao produto da massa pela aceleração do elemento do fluido dentro do volume de controle, e também é igual ao momentum do volume do controle.

6.7.2. Equações de Conservação do Momentum



ou

$$\delta m \cdot a_x = F_{\text{superfície}} + F_{\text{corpox}} \quad (6.22)$$

onde a massa do elemento fluido dentro do volume do controle é:

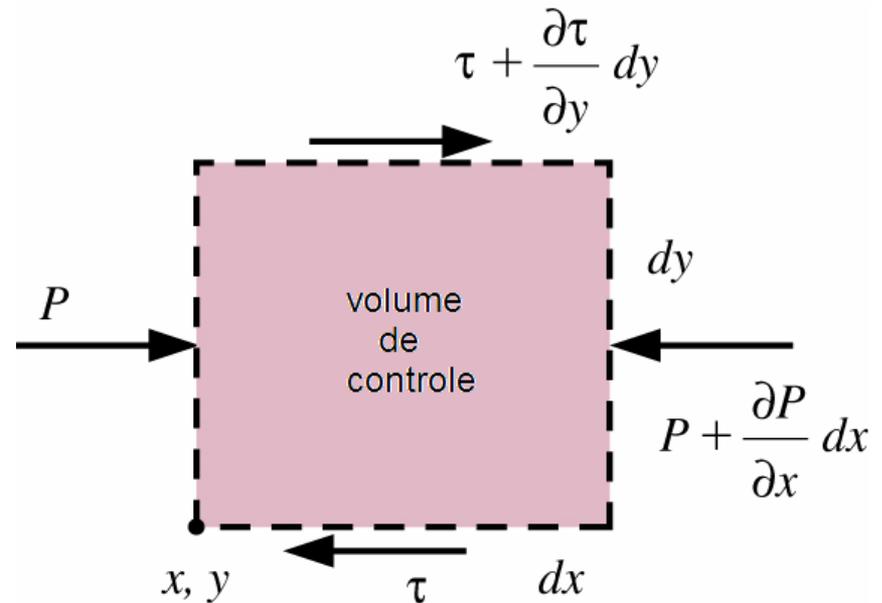
$$\delta m = \rho(dx \cdot dy \cdot 1) \quad (6.23)$$

É de notar que o escoamento é permanente e bidimensional assim o $u = u(x, y)$, o diferencial total de u é:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (6.24)$$

6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

Volume do controle diferencial usado na derivação da equação do momentum na camada limite fluidodinâmica, no escoamento bidimensional sobre uma superfície.



6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

Então a aceleração do elemento fluido no sentido de x torna-se:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.25)$$

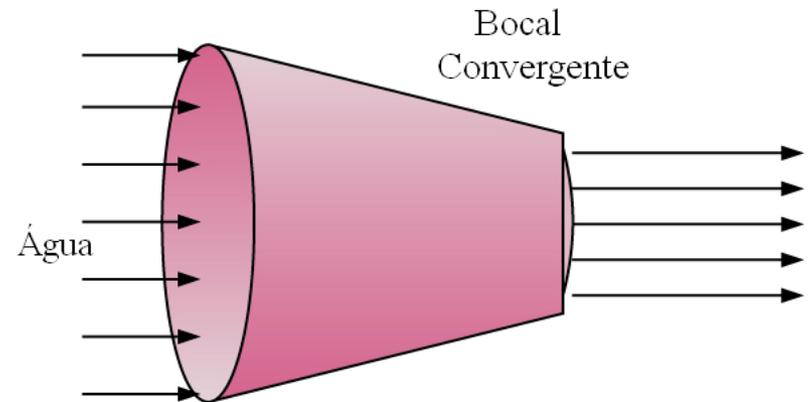
Pode-se assumir que a aceleração é zero no escoamento permanente, pois a aceleração é a taxa da variação da velocidade com tempo, e no fluxo constante não há nenhuma alteração no tempo.

Desprezando as tensões normais para simplificar, a força na superfície que age no sentido x torna-se:

$$\begin{aligned} F_{\text{super},x} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) (dx \cdot 1) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \right) (dy \cdot 1) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) (dx \cdot dy \cdot 1) = \\ &= \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) (dx \cdot dy \cdot 1) \end{aligned} \quad (6.26)$$

6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

Durante o escoamento em regime permanente o fluido não acelera no tempo para um determinado ponto, mas pode acelerar no espaço



6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

Como $\tau = \mu(\partial u/\partial y)$ e dividindo tudo por $dx \cdot dy \cdot 1$ obtém-se:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (6.27)$$

Esta é a relação da conservação do momentum na direcção x , e é conhecida como a equação do momentum. Obtém-se o mesmo resultado usando as taxas de fluxo do momentum para o lado esquerdo da equação em vez do produto da massa pela aceleração. Se houver uma força no corpo que actua no sentido x , pode-se adicionar ao lado direito da equação, desde que ela seja expressa por unidade de volume do fluído.

6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

Na camada limite, a componente da velocidade no sentido do fluxo é muito maior que no sentido normal, assim $u \gg v$ e $(\partial v / \partial x)$ e $(\partial v / \partial y)$ são insignificantes.

Também, u varia muito com y no sentido normal à superfície, desde zero na da parede até ao valor do escoamento livre, quando a variação de u ao longo de x no escoamento for pequena.

6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

Quando os efeitos da gravidade e de outras forças actuantes sobre o corpo são desprezíveis e a aproximação da camada limite permanece válida, a segunda lei de Newton para o movimento, no volume de controle, no sentido y faz com que a equação de momento em y se transforme em:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (6.28)$$

Que quer dizer que a variação da pressão na direcção normal à superfície é desprezível dai $P = P(x)$ e $\partial P / \partial x = dP / dx$

6.7.2. Equações de Conservação do Momentum

Componentes da velocidade

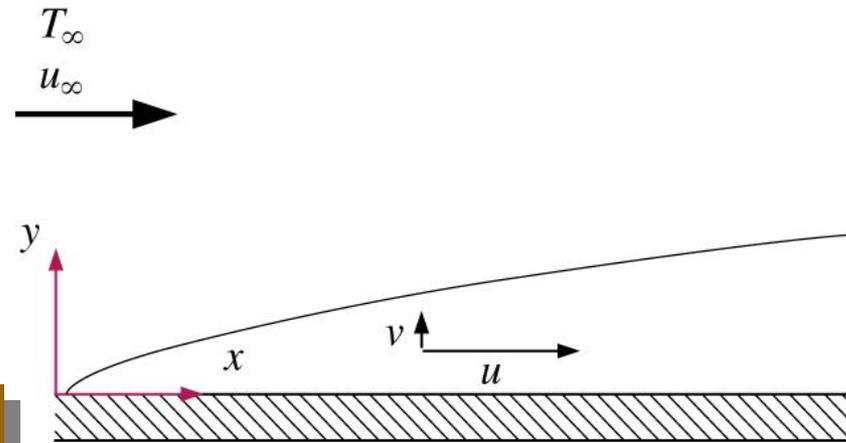
$$v \ll u$$

Gradientes de velocidade

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \approx 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$$

Gradientes de Temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}$$



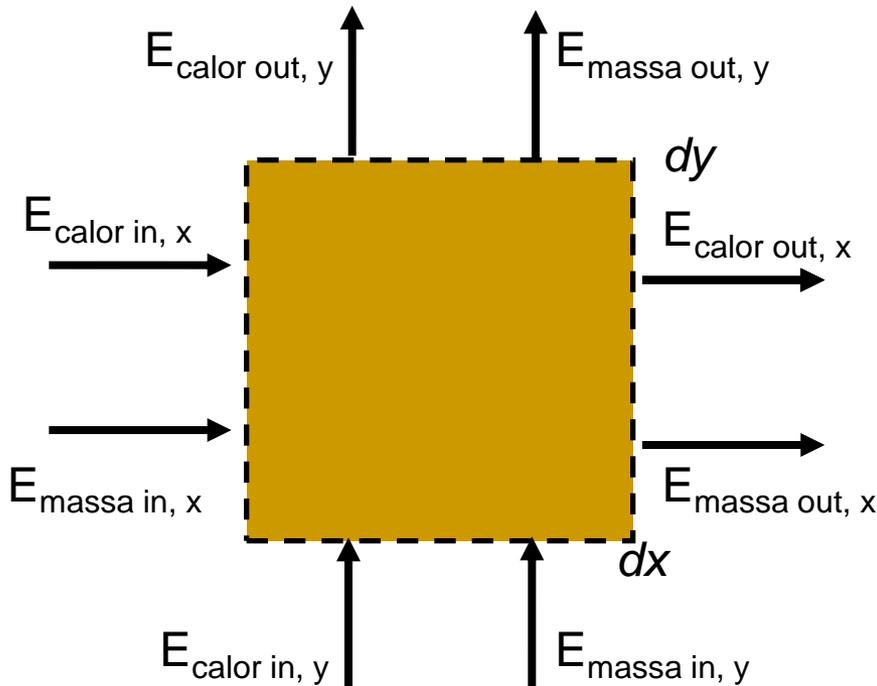
6.7.3. Equações de Conservação de Energia

O balanço de energia, para um sistema durante um processo, é expresso por $E_{in} - E_{out} = \Delta E_{sist}$. Que exprime que a variação da energia de um sistema durante um processo é igual a diferença entre a energia que entra e a que sai. A forma geral da equação de energia para o regime permanente é dada por $E_{in} - E_{out} = 0$.

É de notar que a energia só pode ser transferida na forma de trabalho, calor ou massa, sendo assim, a equação de balanço para um volume de controle toma o seguinte aspecto:

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{calor} + (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{trabalho} + (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{massa} = 0 \quad (6.29)$$

6.7.3. Equações de Conservação de Energia



Transferências de energia por calor e pelo fluxo mássico associados a um volume de controle diferencial na camada limite térmica no escoamento em regime permanente bidimensional.

6.7.3. Equações de Conservação de Energia

A energia é uma grandeza escalar, daí as interações dela nas diversas direcções podem ser combinadas em uma única equação. É de notar que o fluxo de massa do fluido que entra pela parte esquerda do volume de controle é dado por $\rho u(dy \cdot 1)$. A taxa de energia transferida pela massa ao volume de controle na direcção x é dada por:

$$\begin{aligned} (E_{in} - E_{out})_{por\ massa,x} &= (\dot{m}e_{corrente})_x - \left[(\dot{m}e_{corrente})_x + \frac{\partial(\dot{m}e_{corrente})_x}{\partial x} dx \right] \\ &= - \frac{\partial[\rho u(dy \cdot 1)C_p T]}{\partial x} dx = -\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \quad (6.30)$$

6.7.3. Equações de Conservação de Energia

Repetindo para a direcção y e adicionando os resultados, a energia transferida para o volume de controle expressa-se por:

$$\begin{aligned}(E_{in} - E_{out})_{por\ massa,x} &= -\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy - \rho C_p \left(v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= -\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy\end{aligned}\quad (6.31)$$

A taxa de energia transferida por calor para o volume de controle na direcção x é dada por:

$$\begin{aligned}(E_{in} - E_{out})_{por\ calor,x} &= Q_x - \left(Q_x + T \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-k(dy \cdot 1) \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy\end{aligned}\quad (6.32)$$

6.7.3. Equações de Conservação de Energia

Repetindo para a direcção y e adicionando os resultados, a energia transferida para o volume de controle por condução de calor é:

$$(E_{in} - E_{out})_{por\ calor,x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (6.33)$$

A taxa de energia transferida por calor para o volume de controle na direcção x é dada por:

$$\begin{aligned} (E_{in} - E_{out})_{por\ calor,x} &= Q_x - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-k(dy \cdot 1) \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy \end{aligned} \quad (6.34)$$

6.7.3. Equações de Conservação de Energia

A equação de energia para o escoamento bidimensional em regime permanente, com propriedades constantes, obtém-se substituindo as Equações 6.32, 6.34 na equação 6.30

$$\rho C_P \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (6.35)$$

Quando as forças viscosas não são desprezíveis a equação toma o seguinte aspecto

$$\rho C_P \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \quad (6.36)$$

Onde Φ é a função que é obtida depois da análise do comprimento e expressa-se por:

6.7.3. Equações de Conservação de Energia

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (6.37)$$

A dissipação toma lugar dominante nos fluxos a alta velocidade, especialmente quando a viscosidade do fluido é alta.

Para um caso especial em que o fluido é estacionário $u = v = 0$ a equação de energia reduz-se como o esperado à equação de condução bidimensional

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6.38)$$

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Num escoamento laminar de um fluido sobre uma placa plana, a coordenada x é medida ao longo da superfície da placa, desde a borda de ataque da placa no sentido do fluxo, e y é medido da superfície no sentido normal à placa. O fluido aproxima-se da placa no sentido x com uma velocidade uniforme equivalente à velocidade do escoamento livre u_{∞} .

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Quando a dissipação viscosa é insignificante, as equações de continuidade, do momentum, e da energia (Equações 6.21, 6.28, e 6.35) reduzem-se, para o fluxo constante, incompressível e laminar, de um fluido com propriedades constantes sobre uma placa plana a:

$$\text{Continuidade} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.39)$$

$$\text{Momentum} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (6.40)$$

$$\text{Energia} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.41)$$

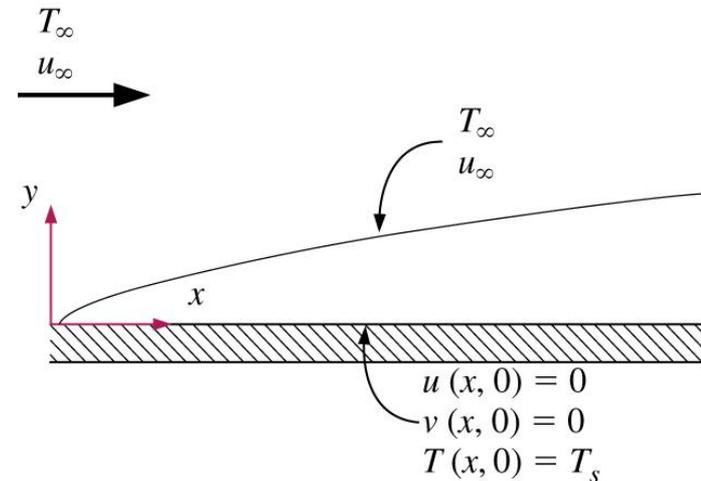
6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Condições de contorno para o escoamento sobre uma placa plana.

$$\text{Em } x=0 \quad u(0, y)=u_\infty, \quad T(0, y)=T_\infty$$

$$\text{Em } y=0 \quad u(x, 0)=0, \quad v(x, 0)=0, \quad T(x, 0)=T_s \quad (6.42)$$

$$\text{Quando } y \rightarrow \infty \quad u(x, \infty)=u_\infty, \quad T(x, \infty)=T_\infty$$



6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

As equações de continuidade e de momentum foram resolvidas primeiramente em 1908 pelo Engenheiro alemão H. Blasius, e pelo estudante L. Prandtl. Eles conseguiram este feito transformando as duas equações diferenciais parciais em uma única equação diferencial ordinária, introduzindo uma nova variável independente, chamada variável da similaridade. Blasius estava também ciente do trabalho de Stokes que afirma que δ é proporcional a $(vx/u_\infty)^{1/2}$ assim, definiu uma variável adimensional de similaridade como:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{vx}} \quad (6.43)$$

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Ficando, $u/u_\infty = \text{função}(\eta)$. Então pode-se introduzir a função da corrente $\psi(x,y)$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (6.44)$$

de modo que a equação de continuidade (Equação 6.39) é automaticamente satisfeita e eliminada. Definindo-se então uma função $f(\eta)$ como variável dependente:

$$f(\eta) = \frac{\Psi}{u_\infty \sqrt{\nu x / u_\infty}} \qquad (6.45)$$

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

As componentes da velocidade passam a ser:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_{\infty} \sqrt{\frac{vx}{u_{\infty}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{vx}} = u_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (6.46)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_{\infty} \sqrt{\frac{vx}{u_{\infty}}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u_{\infty}}{2} \sqrt{\frac{v}{u_{\infty}x}} f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_{\infty}v}{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) \quad (6.47)$$

Diferenciando as relações u e v as derivadas das velocidades passam a ser:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_{\infty}}{2x} \eta \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_{\infty} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{vx}} \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{u_{\infty}^2}{vx} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \quad (6.48)$$

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Substituindo estas relações na equação do momentum e simplificando, obtém-se:

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (6.49)$$

que é uma equação diferencial não linear de terceira ordem. Consequentemente, o sistema de duas equações diferenciais parciais é transformado em uma equação ordinária de uma única variável, usando a variável de similaridade.

Usando as definições de f e de η , as condições de contorno, em termos das variáveis de similaridade podem ser expressas como:

$$f(0)=0, \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = 1 \quad (6.50)$$

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

η	f	$\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_\infty}$	$\frac{d^2f}{d\eta^2}$
0	0	0	0.332
0.5	0.042	0.166	0.331
1.0	0.166	0.330	0.323
1.5	0.370	0.487	0.303
2.0	0.650	0.630	0.267
2.5	0.996	0.751	0.217
3.0	1.397	0.846	0.161
3.5	1.838	0.913	0.108
4.0	2.306	0.956	0.064
4.5	2.790	0.980	0.034
5.0	3.283	0.992	0.016
5.5	3.781	0.997	0.007
6.0	4.280	0.999	0.002
∞	∞	1	0

Recorde-se que foi definida a espessura da camada limite como a distância da superfície para a qual $u/u_\infty=0,99$. Olhando-se para a tabela, o valor de η correspondente a $u/u_\infty=0,992$ é $\eta=5,0$. Substituindo $\eta=5,0$ e $y=\delta$ na definição da variável de similaridade obtém-se:

$$5,0 = \delta \sqrt{u_\infty / \nu x}$$

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Então a espessura da camada limite da velocidade torna-se

$$\delta = \frac{5,0}{\sqrt{u_\infty/\nu x}} = \frac{5,0x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (6.51)$$

A tensão de cisalhamento na parede pode ser determinada da sua definição e da relação de $\partial u/\partial y$ da Equação 6.48:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \left. \frac{d^2 f}{dn^2} \right|_{\eta=0} \quad (6.52)$$

6.8 Solução da Equação Diferencial Para Uma Placa Plana

Substituindo o valor da segunda derivada de f em $\eta = 0$, da tabela obtém-se:

$$\tau_w = 0,332u_\infty \sqrt{\frac{\rho\mu u_\infty}{x}} = \frac{0,332\rho u_\infty^2}{\sqrt{Re}} \quad (6.53)$$

O coeficiente de fricção entre o fluido e a placa é dado pela expressão:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2/2} = 0,664Re_x^{-1/2} \quad (6.54)$$

6.8.1 Equação da Energia

Conhecendo o perfil da velocidade, pode-se então resolver a equação da energia para o caso da temperatura constante da parede T_s . Primeiramente introduz-se a temperatura adimensional na forma:

$$\theta(x, y) = \frac{T(x, y) - T_s}{T_\infty - T_s} \quad (6.55)$$

É de notar que T_s e T_∞ são constantes, sendo assim a sua substituição na equação de energia resulta em:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6.56)$$

O perfil de temperaturas para um fluxo sobre uma placa isotérmica é similar.

6.8.1 Equação da Energia

As componentes da velocidade passam a ser:

$$u_{\infty} \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_{\infty} \nu}{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = \alpha \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \left(\frac{d\eta}{dy} \right)^2 \quad (6.57)$$

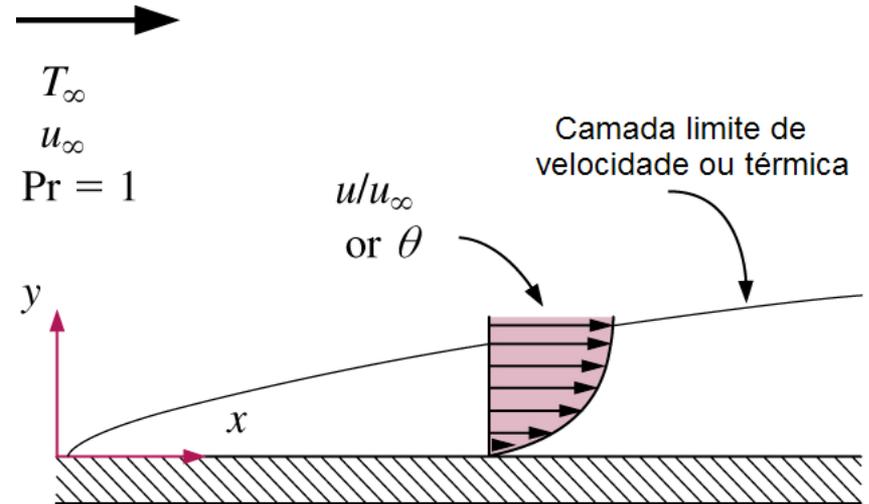
As componentes da velocidade passam a ser:

$$2 \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \text{Pr} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (6.58)$$

As componentes da velocidade passam a ser:

6.8.1 Equação da Energia

Quando $Pr = 1$, as camadas limites fluidodinâmica e térmica coincidem, e os perfis da velocidade e de temperatura adimensionais são idênticos para o escoamento permanente, incompressível, laminar sobre uma placa plana.



6.8.1 Equação da Energia

A Equação 6.58 foi resolvida para numerosos valores de Prandtl. Para $Pr > 0,6$, o gradiente adimensional da temperatura na superfície é proporcional a $Pr^{1/3}$ e expressa-se por:

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0,332 Pr^{1/3} \quad (6.59)$$

O gradiente de temperatura na superfície é:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} &= (T_\infty - T_s) \left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=0} = (T_\infty - T_s) \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \left. \frac{d\eta}{dy} \right|_{y=0} \\ &= 0,332 Pr^{1/3} (T_\infty - T_s) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Dai o coeficiente local de convecção e o número de Nusselt passam a ser:

$$h_s = \frac{q_s}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(\partial T/\partial y)|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = 0,332 Pr^{1/3} k \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (6.61)$$

6.8.1 Equação da Energia

e

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0,332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad Pr > 0,6 \quad (6.62)$$

O número de Nusselt obtido por esta relação coincide com os valores medidos

$$\delta_t = \frac{\delta}{Pr^{1/3}} = \frac{5,0x}{Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}} \quad (6.63)$$

É de notar que estas relações só são válidas para escoamentos laminares sobre uma placa plana isotérmica. O efeito das propriedades variáveis deve ser tomado em conta avaliando as suas propriedades à temperatura do fluido $T_f = (T_s + T_\infty)/2$

6.9 Equação de Convecção Adimensional e Similaridade

Quando a dissipação viscosa é desprezível, a continuidade, o momentum, e as equações da energia para fluxos constantes, incompressíveis, laminares de um fluido com propriedades constantes são dadas pelas Equações 6.21, 6.28, e 6.35. Estas equações e as condições de contorno podem ser adimensionalizadas dividindo todas as variáveis, dependentes e independentes por grandezas constantes, relevantes e significativas:

- *os comprimentos pelo comprimento característico L (que é o comprimento da placa),*
- *as velocidades por uma velocidade de referência (que é a velocidade do escoamento livre sobre placa),*
- *a pressão por ρV^2 (que é o quadrado da pressão dinâmica do escoamento livre para uma placa), e*
- *a temperatura por uma diferença apropriada de temperaturas (que é $T_\infty - T_s$ para uma placa).*

6.9 Equação de Convecção Adimensional e Similaridade

Os asteriscos são usados para referir as grandezas adimensionais

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V}, \quad P^* = \frac{P}{\rho V^2} \quad \text{e} \quad T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$$

Continuidade

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (6.64)$$

Momentum

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} - \frac{dP^*}{dx^*} \quad (6.64)$$

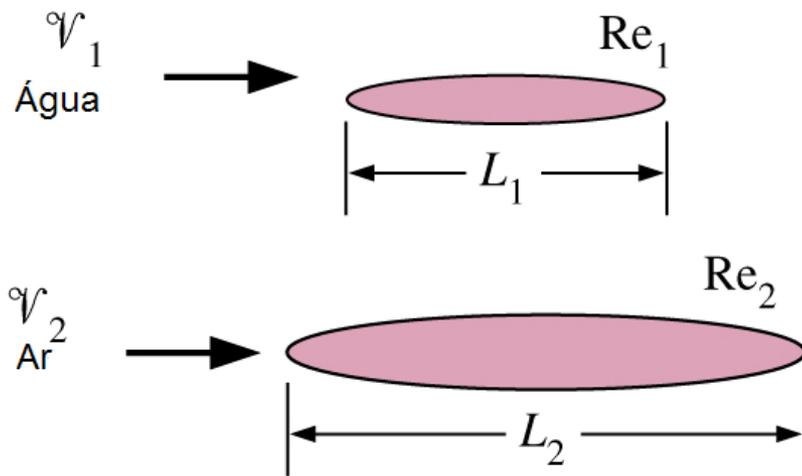
Energia

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.66)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u^*(0, y^*) = 1, \quad u^*(x^*, 0) = 0, \quad u^*(x^*, \infty) = 1, \quad v^*(x^*, 0) = 0 \\ T^*(0, y^*) = 1, \quad T^*(x^*, 0) = 0, \quad T^*(x^*, \infty) = 1, \end{aligned} \quad (6.67)$$

6.9 Equação de Convecção Adimensional e Similaridade



Se $Re_1 = Re_2$, então $C_{f1} = C_{f2}$

Dois corpos de geometrias similares têm o mesmo valor do coeficiente de fricção para o mesmo número de Reynolds.

6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

As três equações da camada limite adimensionalizadas (Eqs. 6.64, 6.65 e 6.66) envolvem três funções desconhecidas u^ , v^* e T^* , duas variáveis independentes x^* e y^* , e dois parâmetros Re_L e Pr . A pressão $P^*(x^*)$ depende da geometria envolvida (é constante para uma placa plana), e tem o mesmo valor dentro e fora da camada de limite numa distância x^* especificada, conseqüentemente, pode-se determinar separadamente nas condições de escoamento livre, e dP^*/dx^* na Equação 6.65 pode ser tratada como uma função conhecida de x^* . É de notar que as condições de fronteira não introduzem nenhuns parâmetros novos. Para uma geometria dada, a solução de u^* pode ser expressa por:*

$$u^* = f_1(x^*, y^*, Re_L) \quad (6.68)$$

6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

A tensão de cisalhamento à superfície passa a ser

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu V}{L} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \frac{\mu V}{L} f_2(x^*, \text{Re}_L) \quad (6.69)$$

Substituindo pela sua definição encontra-se o coeficiente local de fricção:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_s}{\rho V^2/2} = \frac{\mu V/L}{\rho V^2/2} f_2(x^*, \text{Re}_L) = \frac{2}{\text{Re}_L} f_2(x^*, \text{Re}_L) = f_3(x^*, \text{Re}_L) \quad (6.70)$$

O coeficiente de fricção para uma geometria dada pode ser expresso em função do número de Reynolds Re e do espaço adimensional x^ . Similarmente, a solução da Equação 6.66 para a temperatura adimensional T^* para uma geometria dada, pode ser expressa como:*

$$T^* = g_1(x^*, y^*, \text{Re}_L, \text{Pr}) \quad (6.71)$$

6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

Usando a definição de T^* , o coeficiente de transferência de calor passa a ser

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = \frac{k}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (6.72)$$

Substituindo isto na relação do número de Nusselt obtém-se:

$$Nu_x = \frac{hL}{k} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = g_2(x^*, Re_L, Pr) \quad (6.73)$$

Os coeficientes médios de transferência de calor e de fricção são determinados integrando $C_{f,x}$ e Nu_x na superfície do corpo dado em relação a x^* de 0 a 1. A integração elimina a dependência de x^* , então os coeficientes médio de fricção e o número de Nusselt podem ser expressos por:

$$C_f = f_4(Re_L) \quad \text{e} \quad Nu = g_3(Re_L, Pr) \quad (6.74)$$

6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

As relações anteriores são extremamente úteis porque indicam que para uma geometria dada, o coeficiente de fricção pode ser expresso só em função do número de Reynolds, e o número de Nusselt somente em função dos números de Reynolds e de Prandtl

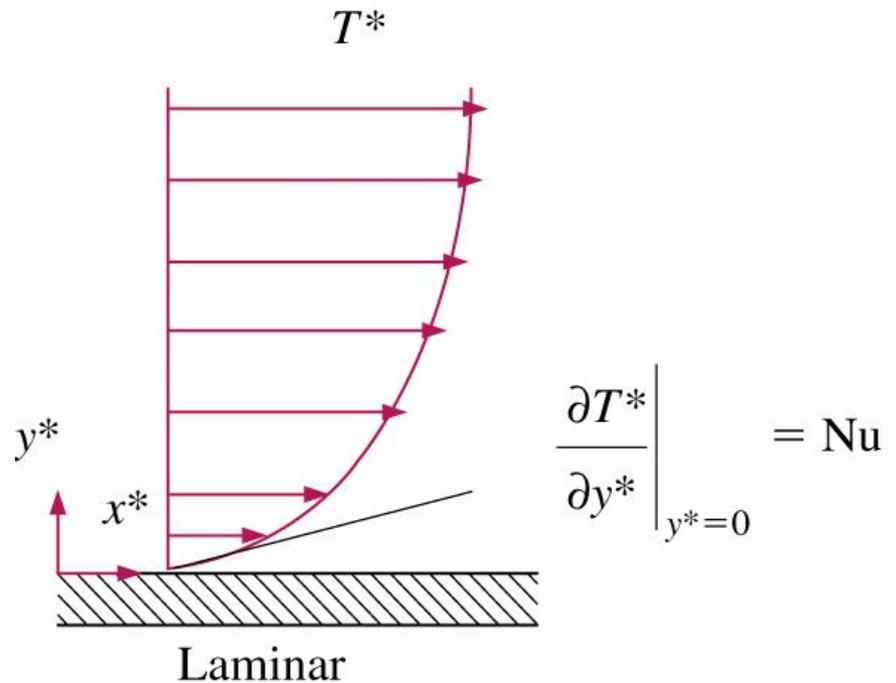
Dados experimentais de transferência de calor podem ser representados com certa precisão por expressão exponencial do seguinte aspecto:

$$Nu = C Re_L^m Pr^n \quad (6.75)$$

onde m e n são expoentes constantes (que geralmente variam entre 0 e 1) e C depende da geometria

6.10 Formas Funcionais dos Coeficientes de Fricção e de Convecção

O número de Nusselt é equivalente ao gradiente adimensional da temperatura na superfície.



6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

Em análise da convecção forçada, está-se primeiramente interessado na determinação dos valores de C_f (para calcular a Tensão de Cisalhamento na parede) e de Nu (para calcular taxas de transferência de calor).

Conseqüentemente, é desejável ter uma relação entre C_f e Nu de modo que se possa calcular um, quando o outro for conhecido. Tais relações são desenvolvidas na base da similaridade entre o momentum e a transferência de calor na camada limite, conhecidas como a analogia de Reynolds e a analogia de Chilton-Colburn.

Reconsidere-se as equações do momentum e de energia adimensionais para um escoamento constante, incompressível, laminar de um fluido com $Pr = 1$ (que é aproximadamente o caso dos gases) e $\partial P^/\partial x^* = 0$ (que é o caso quando, $u = u_\infty = V = \text{constante}$ no escoamento livre, como no fluxo sobre uma placa plana), estas equações simplificam-se em:*

6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

Momentum

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.76)$$

Energia

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.77)$$

que são exactamente da mesma forma para a velocidade u^ e a temperatura T^* adimensionais. As condições de fronteira de u^* e T^* são também idênticas. Consequentemente, as funções que u^* e T^* devem ser idênticas, e assim as primeiras derivadas de u^* e de T^* na superfície devem ser iguais,*

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.78)$$

6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

$$C_{f,x} \frac{Re_L}{2} = Nu_x \quad (\text{Pr}=1) \quad (6.79)$$

que é conhecido como analogia de Reynolds. Esta é uma analogia importante que permite a determinação do coeficiente de transferência de calor para fluidos com $\text{Pr} \approx 1$, conhecido o coeficiente da fricção que é mais fácil de medir. A analogia de Reynolds é expressa também alternativamente por:

$$\frac{C_{f,x}}{2} = St_x \quad (\text{Pr}=1) \quad (6.80)$$

Onde:

$$St = \frac{h}{\rho C_P V} = \frac{Nu}{Re_L \text{Pr}} \quad (6.81)$$

é o número de Stanton, que é também o coeficiente adimensional de transferência de calor.

6.11 Analogias Entre o Momentum e a Transferência de Calor

A analogia de Reynolds é de uso restrito por causa das limitações $Pr = 1$ e $\partial P^/\partial x^* = 0$, é importante ter uma analogia aplicável para um grande espectro de Pr . Isto consegue-se adicionando um factor de correcção do número de Prandtl. O coeficiente de fricção e o número de Nusselt para uma placa plana foram determinados no Capítulo 6.8 como:*

$$C_{f,x} = 0,664 \text{Re}_x^{-1/2} \quad \text{e} \quad \text{Nu}_x = 0,332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{-1/2} \quad (6.82)$$

Fazendo a sua relação e rearranjando os termos chega-se a relação desejada, conhecida como a analogia modificada de Reynolds ou a analogia de Chilton-Colburn,

$$C_{f,x} \frac{\text{Re}_L}{2} = \text{Nu}_x \text{Pr}^{-1/3} \quad \text{ou} \quad \frac{C_{f,x}}{2} \frac{hx}{\rho C_p V} \text{Pr}^{-2/3} \equiv j_H \quad (6.83)$$

Para $0,6 < Pr < 60$. Onde j_H é chamado factor-j de Colburn