



Investigação Operacional

Aula 2



Aula 2

- **Definição de Problemas de Investigação Operacional**
 - Construção de um modelo matemático de PL.
 - Programação Matemática(PM) e Programação Linear(PL).
 - Exemplos clássicos de PL.



Problemas de Investigação Operacional





Problemas de Investigação Operacional



O que são problemas de Investigação Operacional ?



Os problemas de Investigação Operacional são problemas de *maximização ou minimização* de funções de variáveis, designadas por *objecto*, que dependem de um número finito de *variáveis*. Estas variáveis podem ser independentes umas das outras, ou podem estar relacionadas através de uma ou mais *restrições*.



Problemas de Programação Matemática



O que são *problemas de Programação Matemática* ?



Os problemas de *Programação Matemática* são uma classe particular de *problemas de Investigação Operacional*, que surgem na década de quarenta, aplicados nos campos da *organização* e da *gestão económica*, em que o *objectivo* e as *restrições* são dados como *funções matemáticas* e *relações funcionais*.



Programação Matemática

Programação



Planeamento de
actividades

Matemática



O problema pode
ser representado por
um *modelo matemático*



Modelo matemático do problema de Programação Matemática

maximizar $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$
(minimizar)

satisfazendo

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \{ \leq, =, \geq \} b_1$$

...

$$g_M(x_1, x_2, \dots, x_N) \{ \leq, =, \geq \} b_M$$

onde:

$x_1, x_2, \dots, x_N$ - N variáveis de decisão,

$f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ - função objectivo e

$g_1, g_2, \dots, g_M$ - M restrições do modelo



Classificação dos problemas de Programação Matemática

Os problemas de Programação Matemática podem ser classificados em:

- lineares: se $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $i=1 \dots M$, são funções *lineares* – *PROGRAMAÇÃO LINEAR*
- não lineares: se alguma das relações $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $i=1 \dots M$, for uma função *não linear* – *PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR*



Programação Linear

O que são *problemas de Programação Linear*?

Os problemas de *Programação Linear* são uma classe particular de Problemas de Programação Matemática (PM), onde *a* função objectivo e *as restrições* podem ser representadas por *funções lineares*.

A Programação Linear determina o *planeamento óptimo de actividades*, ou seja, um *plano óptimo* que represente a *melhor solução* entre todas as *alternativas possíveis*.



Programação Linear

Programação



Planeamento de
actividades

Linear



O problema é
representado
matematicamente pelo
modelo de PM onde todas
as funções

$f(x_1, x_2, \dots, x_N)$,
 $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N), i=1 \dots M$
são *lineares*.



Modelo matemático do problema de Programação Linear

maximizar $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$
(*minimizar*)

satisfazendo

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \{\leq, =, \geq\} b_1 \\ \dots \\ g_M(x_1, x_2, \dots, x_N) \{\leq, =, \geq\} b_M \end{array} \right\} \text{Restrições funcionais}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_N \geq 0 \rightarrow \text{Restrições de sinal}$$

onde:

$x_1, x_2, \dots, x_N$ - *variáveis de decisão,*

$f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ - *função objectivo LINEAR,*

$g_1, g_2, \dots, g_M$ - *restrições do modelo LINEARES*



Resolução Gráfica

Os problemas de Programação Linear com duas variáveis podem ser resolvidos pelo método gráfico.

Começa-se por representar em R^2 a Região de Admissibilidade (RA) como sendo o resultado da intersecção dos semiplanos ou planos definidos por todas as restrições (de sinal e funcionais) do problema. Se $RA = \emptyset$, o problema é impossível. Se $RA \neq \emptyset$ identifica-se, caso existam, os pontos óptimos.

- i) Representa-se uma recta de nível da Função Objectivo (FO) atribuindo um valor arbitrário a Z e identifica-se o sentido de optimização;
- ii) Identifica-se o ou os pontos da RA a que corresponde o melhor valor de Z (ou seja) identifica-se a ou as Soluções Óptimas (SO) ou conclui-se que o problema tem valor óptimo ilimitado (não tem SO).



Exemplo Protótipo

A empresa Nova Linha produz artigos de vidro de alta qualidade: janelas e portas, em três secções de produção:

Secção de Serralharia: *para produzir as estruturas de alumínio;*

Secção de Carpintaria: *para produzir as estruturas de madeira;*

Secção de Vidro e Montagem: *para produzir vidro e montar as portas e janelas.*

Devido à diminuição dos lucros, o gerente geral decidiu reorganizar a produção, e propõe produzir só 2 produtos que têm uma melhor aceitação entre os clientes.

Estes produtos são:

Produto 1: *uma porta de vidro com estrutura de alumínio;*

Produto 2: *uma janela grande com estrutura de madeira.*



Exemplo Protótipo

O Departamento de Marketing concluiu que a empresa pode vender tanto de qualquer dos dois produtos, tendo em conta a capacidade de produção disponível. Como ambos os produtos partilham a capacidade de produção da secção N°3, o gerente solicitou ao Departamento de Investigação Operacional da empresa a resolução deste problema.

O Departamento de IO para realizar a formulação do problema, procurou os seguintes dados:

- *A capacidade de produção por minuto de cada secção a ser utilizada na produção de ambos os produtos;*
- *A capacidade de produção por minuto de cada secção, a ser utilizada para produzir uma unidade de cada produto;*
- *Os lucros unitários para cada produto.*



Exemplo Protótipo

- Estes dados estão resumidos na seguinte tabela:

<i>Capacidade utilizada por unidade de produção</i>			
Secção N^o	Produto 1	Produto 2	Capacidade disponível
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro unitário (em milhares de Mt)	3	5	



Exemplo Protótipo: Formulação

Capacidade utilizada por unidade de produção			
Secção Nº	Produto 1	Produto 2	Capacidade disponível
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro unitário	3	5	



Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeito a

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 - o número de unidades do produto 1 e 2 produzidas por minuto.

Z - o lucro total por minuto.



Exemplo Protótipo: Solução gráfica (I)

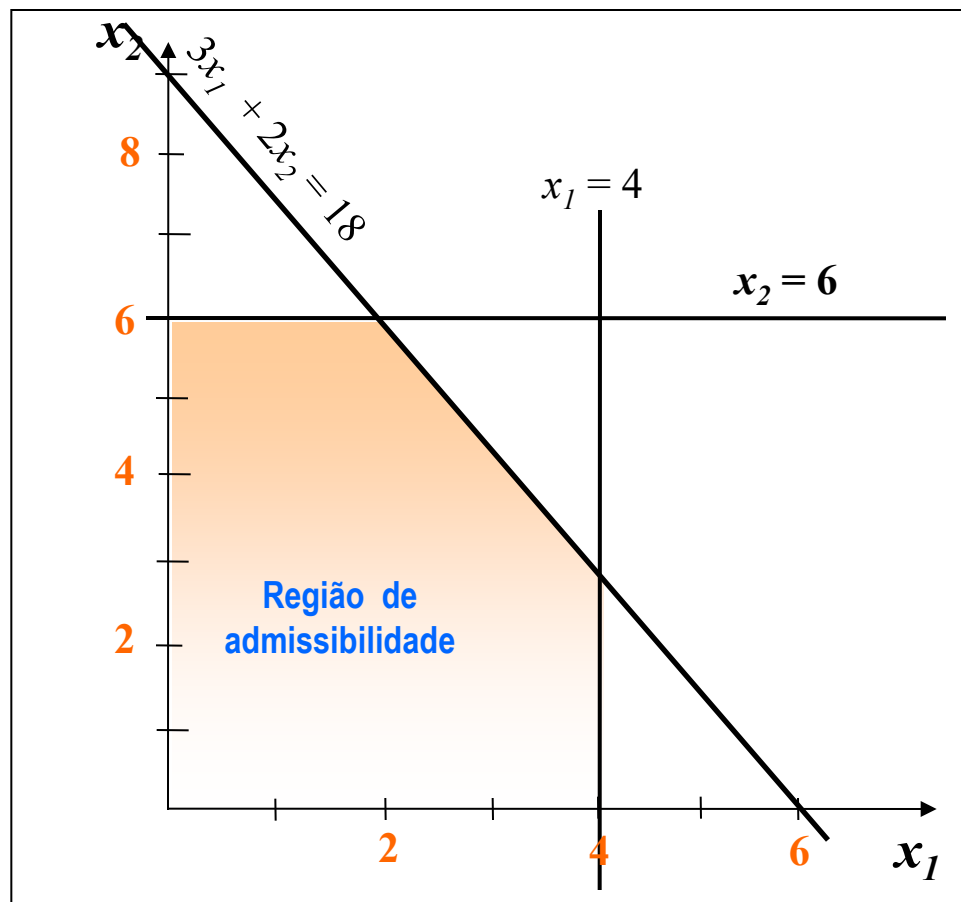
I. Identificar os valores de (x_1, x_2) que satisfaçam todas as restrições (região de admissibilidade)

1º $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão no 1º Quadrante

2º $x_1 \leq 4 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão situados à esquerda ou sobre a recta $x_1 = 4$

3º $2x_2 \leq 12 \Rightarrow x_2 \leq 6 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão situados abaixo ou sobre a recta $x_2 = 6$

4º $3x_1 + 2x_2 \leq 18 \Rightarrow (x_1, x_2)$ estão situados abaixo ou sobre a recta $3x_1 + 2x_2 = 18$



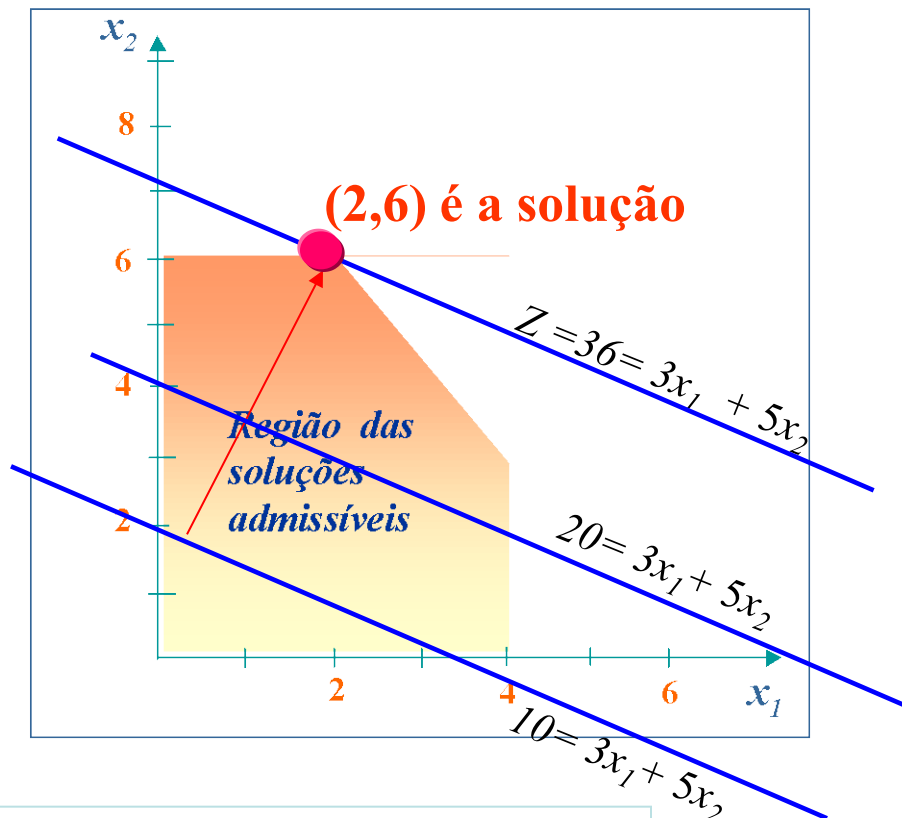


Exemplo Protótipo: Solução gráfica (II)

II. Determinar a solução

A função objectivo $Z = 3x_1 + 5x_2$ define uma recta que pode ser deslocada paralelamente no sentido do seu gradiente (garantindo o crescimento de Z), até se tornar tangente à região admissível.

Neste caso o ponto de tangência $(2,6)$ otimiza a função objectivo, pelo que a solução pretendida é $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. O valor óptimo é 36.



Nova Linha deve fabricar duas portas (Produto 1) e seis janelas (Produto 2) por minuto obtendo um lucro de 36 Mil Mts por minuto.



Exemplo Protótipo:

3 recursos limitados a distribuir entre 2 actividades

Exemplo

Problema generalizado

Capacidade de
produção das 3
secções

Recursos:
 M

Produtos a produzir:
2 produtos

Actividades:
 N

Total de produtos a
produzir por minutos:
 x_1 e x_2

Nível da actividade j :
 x_j

Lucro por minuto:
 Z

Medida da vantagem:
 Z



Exemplo Protótipo (II)

A empresa Filtros de Napipine Ltd, dedica-se a produção de três tipos de filtros para automóveis a saber: filtros de óleo, de gasolina e de ar. A manufactura de cada filtro requer o processamento em cada uma das duas máquinas que a empresa possui, que estão disponíveis 40 horas por mês. O tempo de processamento (em horas) e o lucro unitário de cada Filtro sobressalente (em Mt) apresenta-se na tabela seguinte:



Exemplo Protótipo (II)

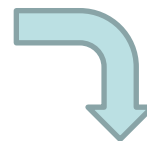
<i>Capacidade utilizada por unidade de produção</i>			
Máquina	Filtros de óleo	Filtros de ar	Filtros de gasolina
1	0,02	0,03	0,05
2	0,05	0,02	0,04
Lucro unitário (em Mt)	250	200	150

O problema consiste em determinar as quantidades de cada tipo de filtros a produzir por mês de modo a obter um lucro máximo.



Exemplo Protótipo (II)

Máquina	Capacidade utilizada por unidade de produção			Capacidade disponível
	Filtros de óleo	Filtros de ar	Filtros de gasolina	
1	0,02	0,03	0,05	40
2	0,05	0,02	0,04	40
Lucro unitário (em milhares de Mt)	250	200	150	



Maximizar $Z = 250x_1 + 200x_2 + 150x_3$
sujeito a:

$$0,02x_1 + 0,03x_2 + 0,05x_3 \leq 40$$

$$0,05x_1 + 0,02x_2 + 0,04x_3 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

x_1, x_2, x_3 - o número filtros de óleo, ar e gasolina

Z - o lucro total mensal.



Exemplo Protótipo (II): 2 recursos limitados a distribuir entre 3 actividades

Exemplo

Capacidade de produção
das 2 máquinas

Produtos a produzir:
3 produtos

Total de produtos a
produzir por mês:
 x_1, x_2 e x_3

Lucro por mês:
 Z

Problema generalizado

Recursos:
 M

Actividades:
 N

Nível da actividade j : x_j

Medida da vantagem: Z



O modelo de PL.

Os parâmetros do modelo de PL para um problema onde estão envolvidas N actividades e M recursos podem ser definidos utilizando a seguinte tabela:

te tabela:

		Utilização do recurso por actividade				
Actividades		1	2	...	N	Total de recurso disponível
Recursos						
1		a_{11}	a_{12}	...	a_{1N}	b_1
2		a_{21}	a_{21}	...	a_{2N}	b_2
.						.
.						.
.						.
M		a_{M1}	a_{M2}	...	a_{MN}	b_M
Lucro unitário		c_1	c_2	...	c_N	
Nível de actividade		x_1	x_2	...	x_N	

onde a_{ij} , b_i e c_j são constantes, x_j – variáveis de decisão ($i=1,2,...,M, j=1,2,...,N$)



Formulação Matemática do Modelo de PL.

Função objectivo

$$\text{Maximizar(minimizar)} \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$$

sujeito a

coluna j

restrições

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1N}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2N}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_2$$

$$\text{linha } i \rightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{iN}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_i$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{Mj}x_j + \dots + a_{MN}x_N \{ \leq, =, \geq \} b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Condições de não} \\ \text{negatividade} \end{array}$$

onde a_{ij} , b_i e c_j ($i=1,2,\dots,M, j=1,2,\dots,N$) são constantes e em cada restrição apenas se verifica uma e só uma das relações $\{ \leq, =, \geq \}$.



Exemplos clássicos de PL

I- TRANSPORTE:

Suponha que um sistema de distribuição alimenta N armazéns a partir de M grandes unidades produtoras. Conhecendo os custos de transporte, a procura prevista para cada armazém e as capacidades (máximas) de produção de cada unidade, *determinar o programa de distribuição com menor custo.*

II- COMPOSIÇÃO:

Conhecendo os conteúdos calóricos e vitamínicos de diversos alimentos, bem como os seus preços, *optimizar a composição da dieta* a adoptar de modo a minimizar o seu custo e a satisfazer níveis mínimos de calorias e vitaminas.



Exemplos clássicos de PL

III- PRODUÇÃO:

Suponha que uma fábrica é capaz de produzir N produtos distintos utilizando M recursos limitados, os quais podem ser : horas de trabalho, tempos de operação de várias máquinas, matérias primas, serviços, etc. Conhecendo o lucro unitário, as quantidades de recurso utilizada para cada produto, e as quantidades de recursos disponíveis, *determinar o plano óptimo de produção (com maior lucro).*



O modelo de PL: Conclusões



Os problemas de *Programação Linear* podem ser formulados de acordo com um *modelo matemático geral*, que consiste na determinação de valores não negativos para as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N$, a satisfazer um sistema de M equações (inequações) lineares que *maximizem ou minimizem* uma função (real) *linear* dessas variáveis.