



Optimização

Aula 3



Problema 3.1

Uma empresa necessita de produzir os produtos P1 e P2 que vende com margem de lucro unitário médio, de 1000Mt e 600Mt respectivamente.

Para o produto P1 estão agendadas 35 horas de trabalho sabendo-se que, tecnicamente, a produção de uma unidade de P1 requer em média 5 horas.

As encomendas em carteira, para o produto P2, aconselham a não produzir mais do que 7 unidades .

No que respeita à matéria prima a utilizar, o stock existente é de 40 kg, sendo o consumo de 5kg por unidade produzida de P1 ou P2.

A empresa pretende Optimizar a produção de P1 e P2 visando a maximização do lucro. Formule e resolva o problema graficamente.



Problema 3.1 (Resolução I)

O problema pode ser apresentado na forma de tabela como se segue:

	Capacidade utilizada por unidade de produção		Disponibilidade
	P1	P2	
Horas de trabalho	5	0	35
Horas de trabalho	0	1	7
Matéria Prima (kg)	5	5	40
Lucro unitário (em Mt)	1000	600	



Problema 3.1 (Resolução II)

Sabendo que o lucro unitário médio do Produto P1 é de 1000 Mt e o lucro unitário médio do Produto P2 é de 600 Mt.

Devem ser maximizados

O lucro obtido com a venda de Produtos 1

MAIS

O lucro obtido com a venda de Produtos 2

Que se traduz algebricamente na igualdade linear:

$$\text{Max } Z = 1000P_1 + 600P_2$$



Problema 3.1 (Resolução III)

Para o produto P1 estão agendadas 35 horas de trabalho sabendo-se que, tecnicamente, a produção de uma unidade de P1 requer em média 5 horas.



Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$5P_1 \leq 35$$



Problema 3.1 (Resolução IV)

No que respeita à matéria prima a utilizar o stock existente é de 40 kg sendo o consumo de 5kg por unidade produzida de P1 ou P2.

Matéria prima
utilizada no
Produto 1

MAIS

Matéria prima
utilizada no
Produto 2

NÃO
PODE
EXCEDER

O Stock
existente

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$5P_1 + 5P_2 \leq 40$$



Problema 3.1 (Resolução V)

As encomendas em carteira, para o produto P2, aconselham a não produzir mais do que 7 unidades.



Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$P_2 \leq 7$$



Problema 3.1 (Resolução VI)

O modelo matemático apresenta-se da seguinte forma:

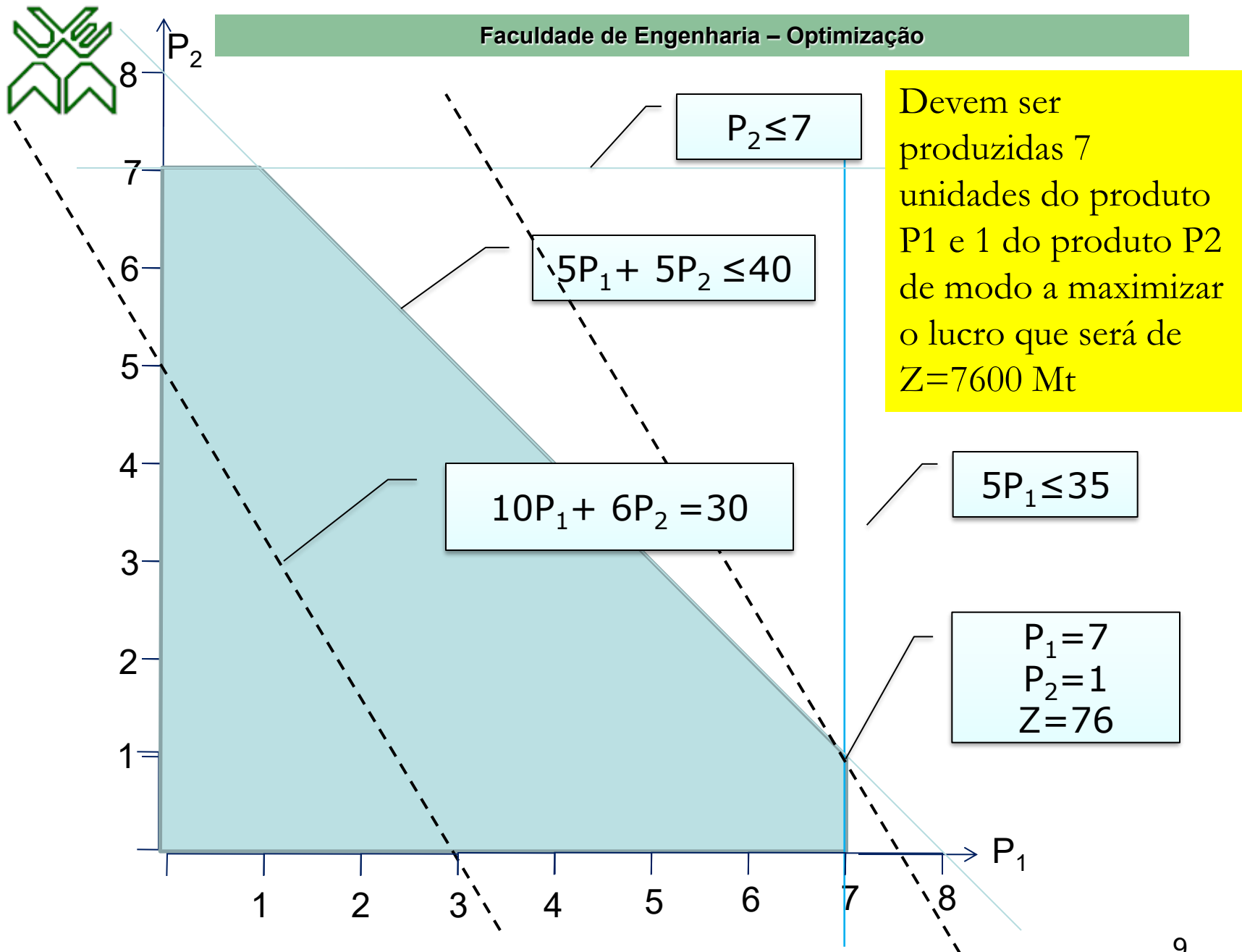
$$\text{Maximizar } Z = 1000P_1 + 600P_2$$

$$5P_1 \leq 35$$

$$5P_1 + 5P_2 \leq 40$$

$$P_2 \leq 7$$

$$P_1, P_2 \geq 0$$





Problema 3.2

Numa pequena empresa Metalomecânica produzem-se dois tipos de produtos, nomeadamente tampas de ferro fundido para fossas e grelhas para escoamento de águas pluviais.

As tampas de ferro são produzidas na secção de fundição e depois remetidas à secção de acabamentos, enquanto as grelhas para escoamento de águas pluviais são produzidas na secção de soldadura e depois passam para a de acabamentos.

A disponibilidade e as necessidades de tempo para a execução de cada um dos produtos encontram-se apresentadas na tabela em anexo.



Problema 3.2

Secção	Peça		Tempo Disponível (Horas-Homem)
	Tampas	Grelhas	
Fundição	3		150
Soldadura		2	150
Acabamento	2	2	200

Sabendo que a empresa vende ao preço de 2000 Mt cada tampa e 1750 Mt cada grelha. Determinar o plano óptimo de produção de forma a maximizar o lucro total.

- Formule o modelo de programação linear para este problema.
- Diga quais são os recursos, as actividades, o nível de actividades, e a medida de vantagem para o problema dado.



Problema 3.2

Sejam x_1 – Tampas a produzir e x_2 – Grelhas a produzir.

Sabendo que o lucro unitário 2000 Mt cada tampa e 1750 Mt cada grelha.

Devem ser maximizados

O lucro obtido com a venda de Tampas

MAIS

O lucro obtido com a venda de Grelhas

Que se traduz algebricamente na igualdade linear:

$$\text{Max } Z = 2000x_1 + 1750x_2$$



Problema 3.2

Para as tampas estão agendadas 150 horas-homem de trabalho na fundição, sabendo-se que tecnicamente, a produção de uma tampa requer em média 3 horas-homem.



Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$3x_1 \leq 150$$



Problema 3.2

Para as grelhas estão agendadas 150 horas-homem de trabalho na soldadura, sabendo-se que tecnicamente, a produção de uma grelha requer em média 5 horas-homem.

Tempo para
produzir as
grelhas

NÃO
PODE
EXCEDER

Disponibilidade
agendada na
soldadura

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$2x_2 \leq 150$$



Problema 3.2

No que respeita à secção de acabamento o tempo disponível é de 200 horas-homem sendo necessárias 2 horas-homem tanto para cada tampa como para cada grelha.

Tempo para
produzir as
tampas

MAIS

Tempo para
produzir as
grelhas

NÃO
PODE
EXCEDER

Disponibilidade
agendada na
montagem

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 200$$



Problema 3.2 (Resolução I)

O modelo de programação linear para este problema torna-se

x_1 – Tampas a produzir.

x_2 – Grelhas a produzir.

$$\text{Maximizar } z = 2000x_1 + 1750x_2$$

s.a:

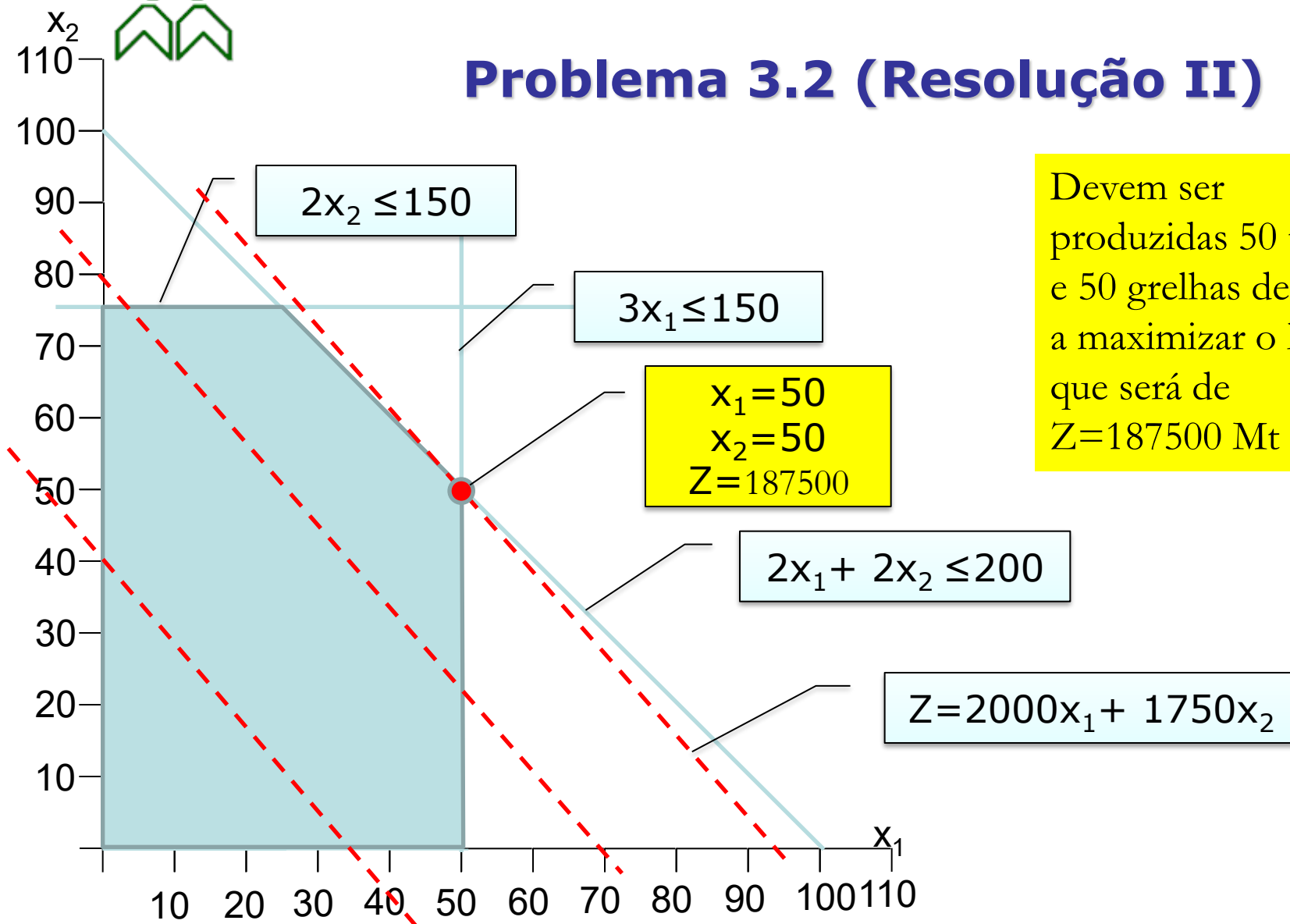
$$3x_1 + 0x_2 \leq 150$$

$$0x_1 + 2x_2 \leq 150$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema 3.2 (Resolução II)



Devem ser produzidas 50 tampas e 50 grelhas de modo a maximizar o lucro que será de $Z = 187500$ Mt



Problema 3.3 (I)

“Publicações Polémicas” vai publicar uma autobiografia de um político controverso, e admite que a 1ª edição vai ser vendida por completo se não houver atrasos. Foi decidido que versões de Luxo (L) e Normal (N) vão aparecer simultaneamente e são conhecidas as seguintes condicionantes do projecto:

- (a) O departamento de impressão pode produzir no máximo 10000 cópias (incluindo versões L e N).
- (b) O departamento de encadernação pode concluir 12000 cópias N ou 8000 cópias L se trabalhar em cada um destes tipos isoladamente. Se produzir as duas versões, pode produzir proporções daquelas quantidades que totalizem 1.



Problema 3.3 (II)

- (c) O armazém pode despachar um máximo de 15000 cópias N ou 9000 cópias L, ou proporções que totalizem 1.
- (d) Já existem pedidos de 2000 versões N e 1000 versões L, que deverão ser satisfeitos na 1^a edição.
- (e) Pelo menos $1/4$ do total das cópias deverá ser em versão de Luxo (L).

O lucro resultante da venda de uma cópia N é de 600,00 Mt e de uma cópia L é de 720,00 Mt. “Publicações Polémicas” pretende saber qual o número de cópias de cada tipo a produzir de modo a obter o maior lucro possível.

- (a) Formule este problema como Programação Linear.
- (b) Resolva-o graficamente, ilustrando o conjunto das soluções admissíveis.



Problema 3.3 (Solução I)

Sejam x_L – Versões de Luxo e x_N – Versões Normais.

Sabendo que o lucro unitário da venda de uma cópia normal é de 600,00 Mt e de 720,00 Mt para cada cópia de luxo

Devem ser maximizados

O lucro obtido com a venda de cópias normais

MAIS

O lucro obtido com a venda de cópias de luxo

Que se traduz algebricamente na igualdade linear:

$$\textit{Maximizar } Z = 600x_N + 720x_L$$



Problema 3.3 (Solução II)

O departamento de impressão pode produzir no máximo 10000 cópias (incluindo versões L e N).

As versões
normais

MAIS

As versões de
luxo

NÃO
PODEM
EXCEDER

O máximo de
10000

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$x_N + x_L \leq 10000$$



Problema 3.3 (Solução III)

O departamento de encadernação pode concluir 12000 cópias N ou 8000 cópias L se trabalhar em cada um destes tipos isoladamente. Se produzir as duas versões, pode produzir proporções daquelas quantidades que totalizem 1.

As versões
normais/12000

MAIS

As versões de
luxo/8000

NÃO
PODEM
EXCEDER

O máximo de 1

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$\frac{x_N}{12000} + \frac{x_L}{8000} \leq 1$$



Problema 3.3 (Solução IV)

O armazém pode despachar um máximo de 15000 cópias N ou 9000 cópias L, ou proporções que totalizem 1.

As versões
normais/15000

MAIS

As versões de
luxo/9000

NÃO
PODEM
EXCEDER

O máximo de 1

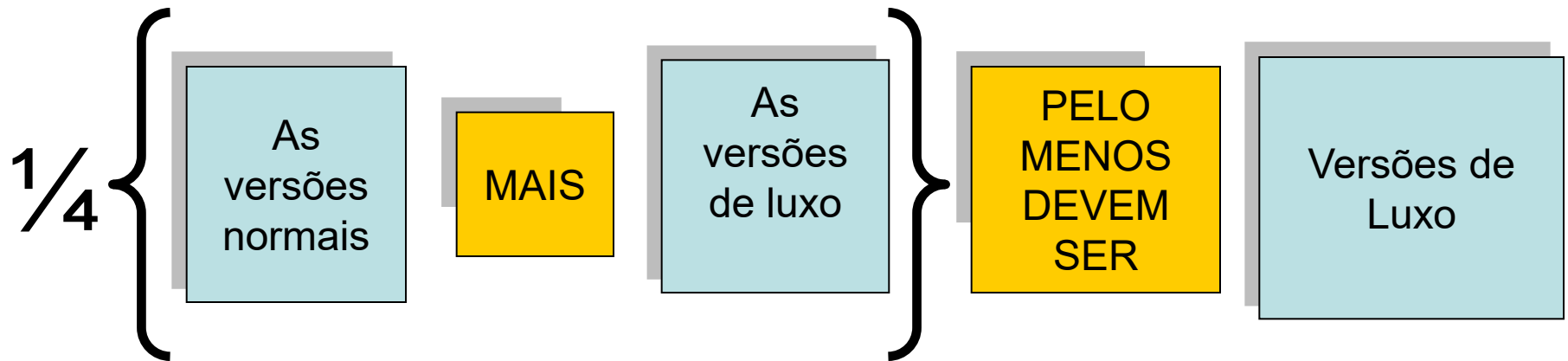
Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$\frac{x_N}{15000} + \frac{x_L}{9000} \leq 1$$



Problema 3.3 (Solução V)

Pelo menos 1/4 do total das cópias deverá ser em versão de Luxo (L).



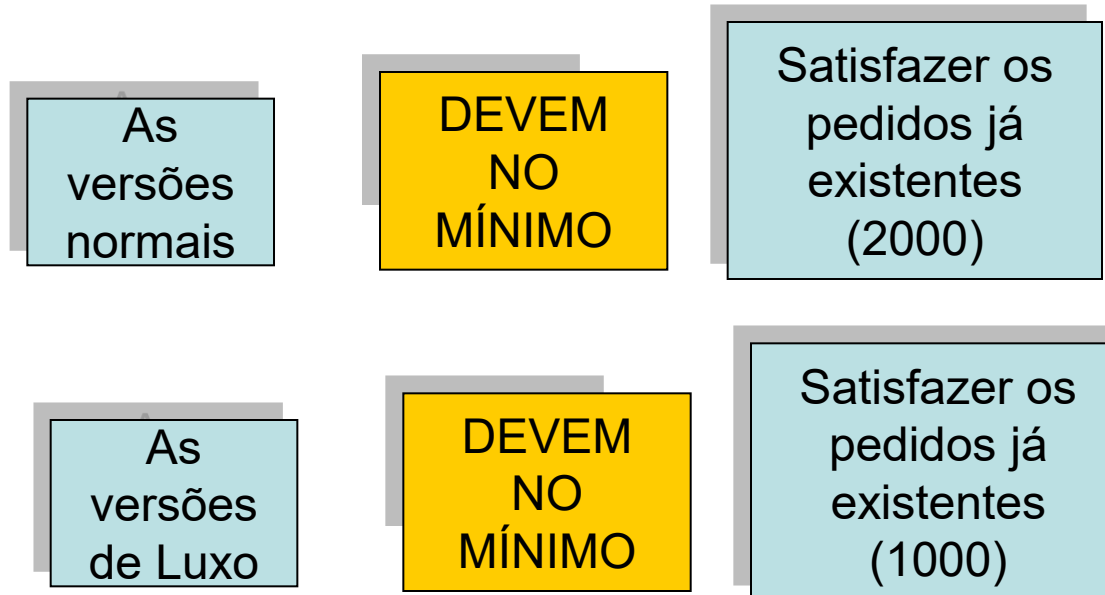
Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$\frac{1}{4}(x_N + x_L) \leq x_L$$



Problema 3.3 (Solução VI)

Já existem pedidos de 2000 versões N e 1000 versões L, que deverão ser satisfeitos na 1ª edição.



Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$x_N \geq 2000$$

$$x_L \geq 1000$$



Problema 3.3 (Solução VII)

O modelo de programação linear para este problema torna-se

$$\text{Maximizar } Z = 600x_N + 720x_L$$

sujeito a:

$$x_N + x_L \leq 10000$$

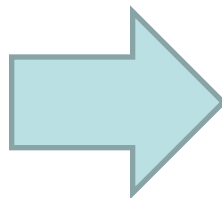
$$\frac{x_N}{12000} + \frac{x_L}{8000} \leq 1$$

$$\frac{x_N}{15000} + \frac{x_L}{9000} \leq 1$$

$$\frac{1}{4}(x_N + x_L) \leq x_L$$

$$x_N \geq 2000$$

$$x_L \geq 1000$$



$$\text{Maximizar } Z = 600x_N + 720x_L$$

sujeito a:

$$x_N + x_L \leq 10000$$

$$2x_N + 3x_L \leq 24000$$

$$3x_N + 5x_L \leq 45000$$

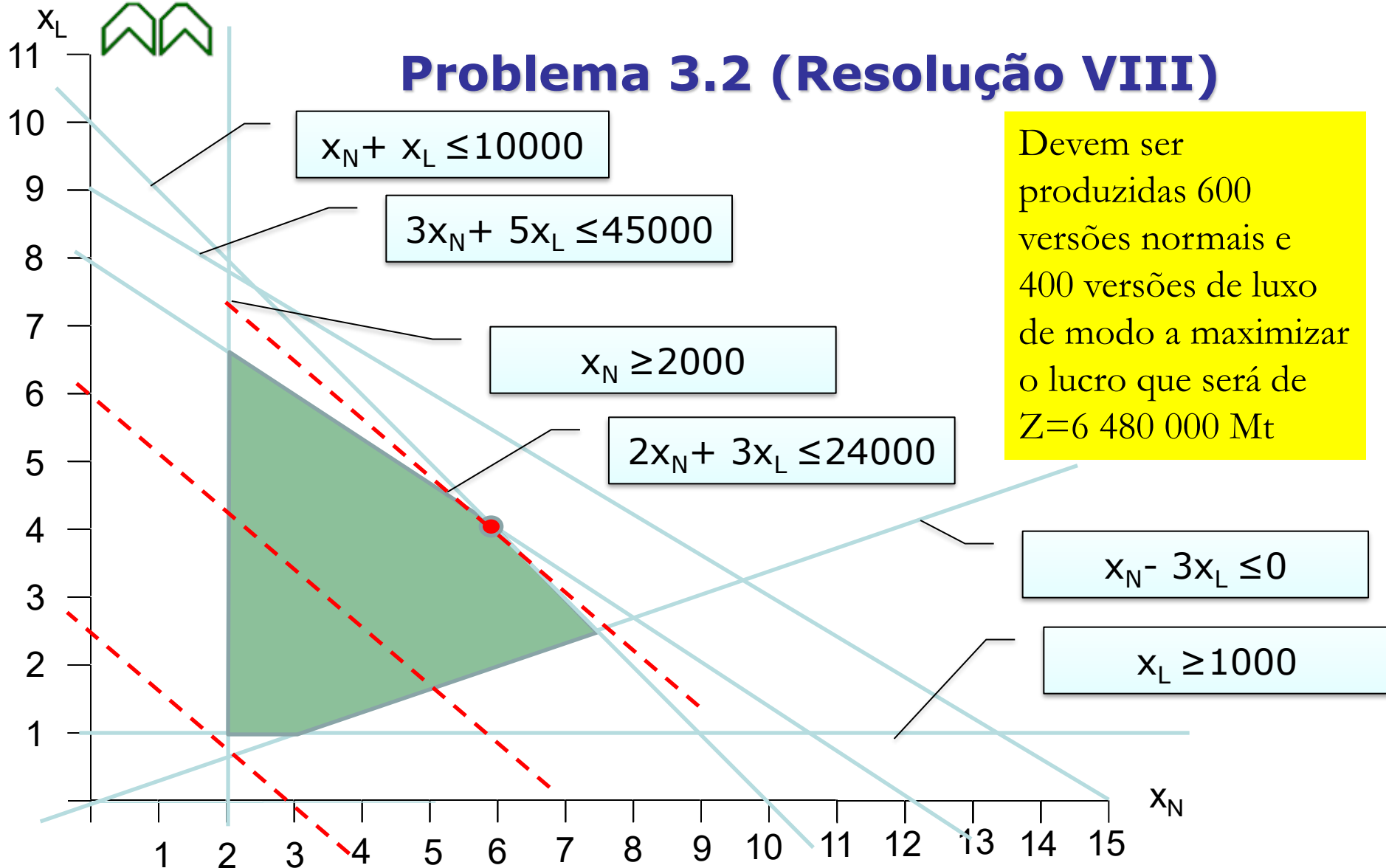
$$x_N - 3x_L \leq 0$$

$$x_N \geq 2000$$

$$x_L \geq 1000$$



Problema 3.2 (Resolução VIII)



Devem ser produzidas 600 versões normais e 400 versões de luxo de modo a maximizar o lucro que será de $Z = 6\,480\,000$ Mt



Problema 3.4 (I)

A direcção de Marketing de uma empresa de mobiliário metálico de escritório sugere o lançamento de dois novos produtos: um modelo de secretária e um modelo de estante, ambos em substituição de modelos actuais. Esta direcção não prevê dificuldade de colocação dos produtos no mercado para as estantes, enquanto que aconselha que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades. Após estudos levados a cabo pela Direcção de Produção, concluiu-se que:

A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 horas-máquina.



Problema 3.4 (II)

A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 horas-homem.

Cada secretária necessita de 2h-M de estampagem e 4h-H de montagem e acabamento.

Cada estante necessita de 4h-M de estampagem e 4h-H de montagem e acabamento. As margens brutas unitárias estimadas são de 6.000,00MT para as secretárias e 3.000,00MT para as estantes.

Formalize o problema de forma a se poder determinar o plano de produção mensal que maximize a margem bruta, para estes dois novos produtos e resolva o problema através do método gráfico.



Problema 3.4 (Resolução I)

A disponibilidade mensal do departamento de montagem e acabamento é de 880 horas-homem;

Cada secretária necessita de 2 H-M de estampagem e 4 H-H de montagem e Acabamento;

Cada estante necessita de 4 H-M de estampagem e 4 H-H de montagem e Acabamento.

Por outro lado as margens brutas unitárias estimadas são de 6 000,00 Mt para secretárias e 3 000,00 Mt para estantes.

A empresa pretende determinar o plano óptimo mensal para novos modelos que maximiza a margem bruta.



Problema 3.4 (Resolução II)

Sejam x_1 e x_2 o número de secretárias e de estantes de novos modelos , respectivamente a produzir mensalmente e z a margem bruta total no mesmo período. Tem-se evidentemente x_1 e x_2 como variáveis de decisão e como objectivo determinar valores para estas duas variáveis que maximizem:

$$z = 6x_1 + 3x_2 \text{ (em } 10^3 \text{ Mtn)}$$



Problema 3.4 (Resolução III)

Tendo em conta as restrições impostas pelas limitações da capacidade produtiva do mercado.

Relativamente ao departamento de estampagem sabe-se que:

- cada secretária necessita de 2 H - M, pelo que o número total de horas-máquina necessárias à produção de x_1 secretárias é de $2x_1$.
- cada estante necessita de 4 H - M, pelo que o número total de horas-máquina necessárias a produção de x_2 estantes é $4x_2$.
- a disponibilidade mensal é de 720 horas-máquina



Problema 3.4

Então a restrição relativa a este departamento é:

Tempo total de
máquina gasto
na produção de
secretárias

MAIS

Tempo total de
máquina gasto
na produção de
estantes

NÃO
PODE
EXCEDER

Disponibilidade
em
Horas - maquina

Que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 720$$

Analogamente tem-se para o Departamento de Montagem e Acabamento

$$4x_1 + 4x_2 \leq 880$$



Problema 3.4 (Resolução IV)

No que diz respeito ao mercado, a restrição traduz-se por:

$$x_1 \leq 160$$

Para além destas restrições, tem-se ainda:

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0,$$

Pois não fazem sentido produções negativas



Problema 3.4 (Resolução V)

Em síntese o problema consiste em escolher x_1 e x_2 por forma a:

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2$$

sujeito a:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 720$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 880$$

$$x_1 \leq 160$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Problema 4

Solução:

$Z=1.140.000$ Mt, $x_1=160$, $x_2=60$

