Optimização

Aula 4

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Aula 4. Programação Linear (PL)

- O modelo de Programação Linear.
  - **Forma Padrão (“standard”) e Forma Canónica.**
  - **Conceitos fundamentais.**
  - **Outras formas do modelo:**
    - forma cartesiana
    - forma matricial
    - forma vectorial
- Propriedades fundamentais da Programação Linear:
  - **Redução à Forma Padrão**
  - **Conceitos Fundamentais.**
  - **Teorema Fundamental da PL.**

O Modelo de PL.

Função objectivo

Maximizar (minimizar) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_Nx_N$

sujeito a:

coluna j *restrições*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1N}x_N \ \{\leq, =, \geq\} \ b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2N}x_N \ \{\leq, =, \geq\} \ b_2$$

$$\ldots$$

linha i $\longrightarrow$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{iN}x_N \ \{\leq, =, \geq\} \ b_i$

$$\ldots$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{Mj}x_j + \ldots + a_{MN}x_N \ \{\leq, =, \geq\} \ b_M$$

$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0$ $\longleftarrow$ *Condições de não negatividade*

onde a_{ij}, b_i e c_j ($i=1,2,\ldots,M$, $j=1,2,\ldots,N$) *são constantes* e *em cada restrição apenas se verifica uma e só uma das relações* $\{\leq, =, \geq\}$.

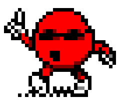
Forma Padrão (“standard”).

Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de equações* diz-se que esse modelo está na *forma padrão* (ou “*standard*”).

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$
(Minimizar)
sujeito a

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
&\;\;\ldots \\
a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N &= b_M \\
x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N &\geq 0
\end{aligned}
$$

Forma Canónica.



Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de inequações* diz-se que esse modelo está na *forma canónica*.

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N \leq b_2$$
$$\ldots\ \ldots$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N \leq b_M$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0$$

Minimizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N \geq b_2$$
$$\ldots\ \ldots$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N \geq b_M$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0$$

Operações de Reformulação

I. Qualquer problema de maximização pode converter-se num problema de minimização, pois:

$$\textit{máximo } Z = -\textit{ mínimo } (-Z)$$

Operações de Reformulação.

II. Qualquer restrição de desigualdade de tipo **"≤"** pode ser convertida numa restrição do tipo **"≥"** multiplicando por (-1) ambos os seus membros.

$$a_{i\,1}x_1 + a_{i\,2}x_2 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i$$

$$\Updownarrow$$

$$- a_{i\,1}x_1 - a_{i\,2}x_2 - \ldots - a_{i\,N}x_N \geq - b_i$$

Operações de Reformulação.

III. Qualquer restrição de igualdade pode ser convertida em duas restrições de desigualdades "≤" equivalentes àquela.

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N = b_i \iff \begin{array}{l} a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \le b_i \\ a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \ge b_i \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{l} a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \le b_i \\ -a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N \le -b_i \end{array}$$

Operações de Reformulação.

IV. Qualquer restrição de desigualdade pode ser convertida numa restrição de igualdade, através da introdução de uma nova variável (*variável de desvio* ou *folga*) x_{N+1} de valor não negativo.

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad b_i - a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{N+1} = b_i - a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N + x_{N+1} = b_i \qquad x_{N+1} \geq 0$$

Operações de Reformulação.

V. Qualquer *variável livre* x_j, (*não restringida pela condição de não negatividade*) pode ser substituída por um par de variáveis não negativas $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$, fazendo:

$$\boldsymbol{x_j = x_j' - x_j''}$$

e deste modo formulando de novo o problema em função destas duas variáveis.

Conceitos Fundamentais(1).

A função a maximizar (minimizar),

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N,$$

designa-se por **função objectivo** (f.o).

As equações (inequações)

designam-se por **restrições.**

As desigualdades $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_N \geq 0$

designam-se por **condições de não negatividade**.

Conceitos Fundamentais(2).

As variáveis $x_1, x_2, \dots, x_N$,
designam-se por ***variáveis de decisão.***

As constantes a_{ij},
designam-se por ***coeficientes tecnológicos.***

As constantes b_i,
designam-se por ***termos independentes.***

As constantes c_j,
designam-se por ***coeficientes da função objectivo***

Conceitos fundamentais(3).

Qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ que satisfaça as restrições do modelo e as condições de não negatividade

designa-se por ***solução admissível***.

O conjunto de todas as soluções admissíveis

designa-se por ***região de admissibilidade***.

Uma ***solução óptima*** *maximiza (minimiza) a função objectivo sobre toda a região de admissibilidade.*

Objectivo da PL

O objectivo da PL é determinar de entre as soluções admissíveis, ***uma que seja a “melhor”****, medida pelo valor da* ***função objectivo*** *do modelo. Por* ***"melhor"*** *entende-se o* ***maior*** *ou* ***menor valor****, dependendo se o objectivo é* ***maximizar*** *ou* ***minimizar****.*

Soluções do Problema de PL

- Um problema de PL pode ter:
  - uma única solução óptima
- *ou*
  - múltiplas soluções óptimas (*uma infinidade*)
- *ou*
  - não ter óptimo finito
- *ou*
  - não ter nenhuma solução (*neste caso o problema é impossível*)

Exemplo Protótipo: Formulação

	Capacidade utilizada por unidade de produção		
Secção Nº	Produto 1	Produto 2	Capacidade disponível
1	**1**	**0**	4
2	**0**	**2**	12
3	**3**	**2**	18
Lucro unitário (mil Mt)	3	5	

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2,$
sujeito a

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

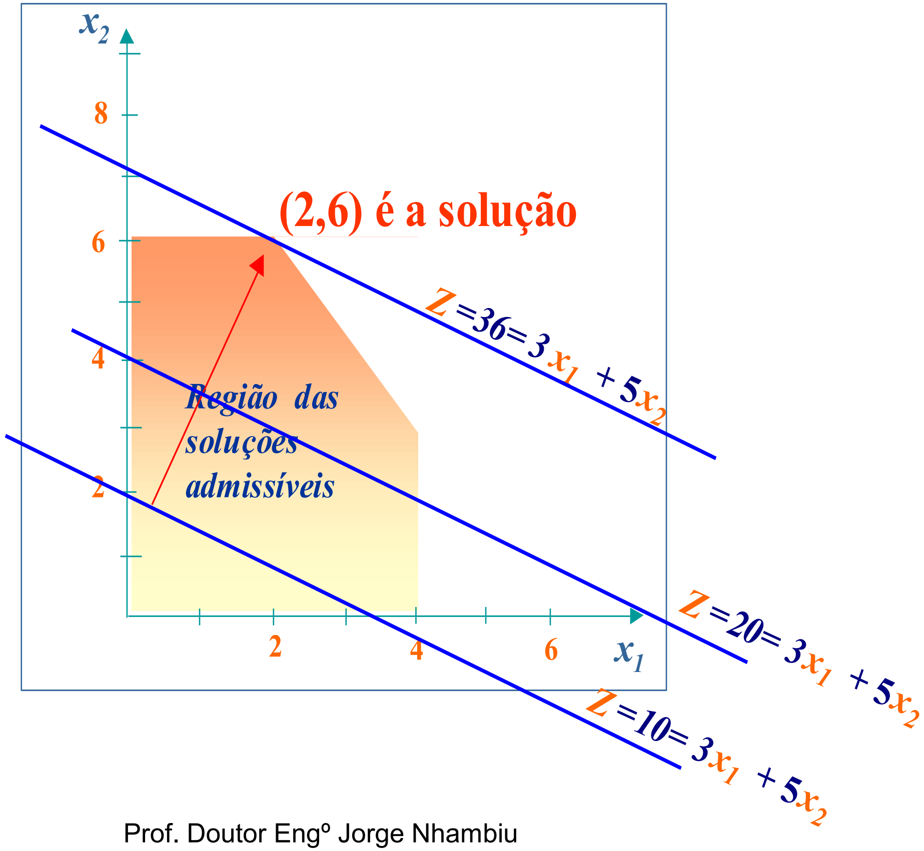
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

x_i – *o número de unidades do produto produzidas por minuto, i= 1,2.*

Z – *o lucro total por minuto.*

Uma Única Solução Óptima

No exemplo protótipo determinamos *uma única solução óptima*: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, **onde a *função objectivo* alcança o seu** *valor máximo Z=36*.



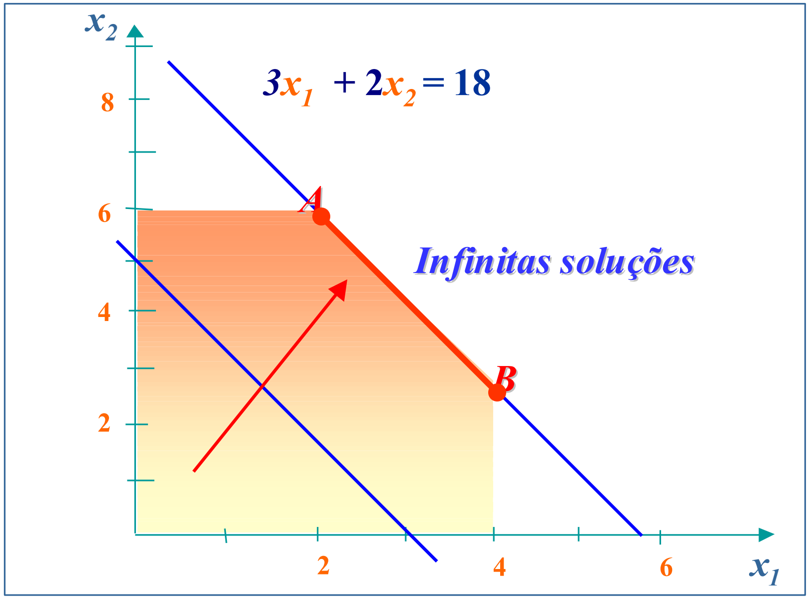
Múltiplas Soluções

Se um problema de PL tem soluções óptimas múltiplas então tem um *número infinito* delas.

No exemplo protótipo mudámos o lucro unitário do *produto 2* de 5 para 2 Mts, i.e., a função objectivo é agora a recta Z=3x_1+ 2x_2.

(a f.o. tem o mesmo gradiente da recta da 3ª restrição 3x_1+ 2x_2=18).

Todos os pontos (uma infinidade) do segmento de recta AB, são soluções óptimas, pois todas alcançam o melhor valor da f.o.: z=18.

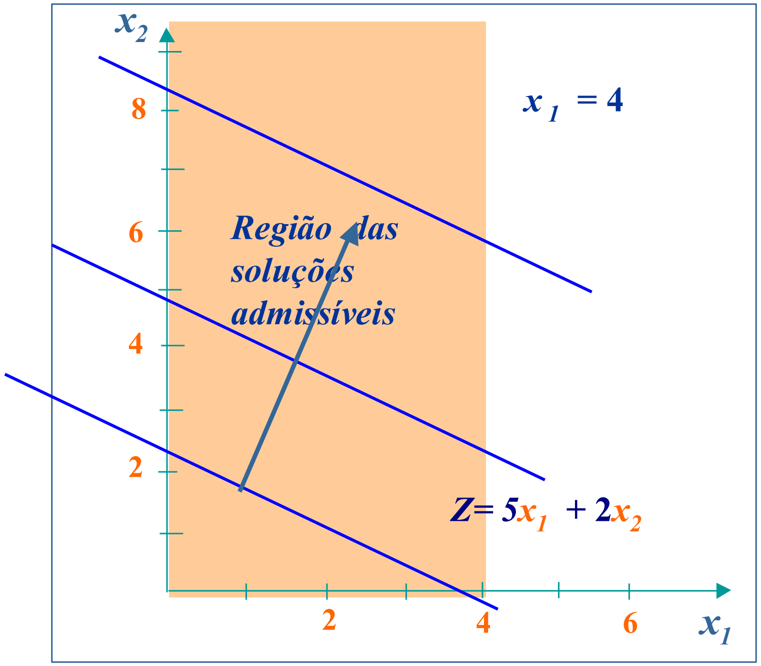


O Problema não tem Óptimo Finito.

Se as restrições não evitarem o crescimento indefinido do valor da função objectivo Z, no sentido favorável (positivo ou negativo) então *o problema não tem óptimo finito.*

No exemplo protótipo, eliminando as restrições:

$\mathbf{2x_2 \leq 12,\ \ 3x_1 + 2x_2 \leq 18,}$ a região de admissibilidade fica não limitada e o valor da função objectivo pode crescer *indefinidamente* nesta região.



O problema é Impossível

Se não existirem soluções admissíveis (o conjunto de soluções admissíveis é vazio), então o problema não tem nenhuma solução, *o* ***problema é impossível***.

Outras formas do modelo.
1º. Forma Cartesiana.

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

sujeito a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N \le b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N \le b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{MN} x_N \le b_M$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \ge 0$$

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i$$

$$x_j \ge 0$$

$$i = 1,2,\ldots\ldots M$$
$$j = 1,2,\ldots\ldots N$$

Outras formas do modelo.
2º. Forma Matricial.

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N &\le b_2 \\ &\ldots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N &\le b_M \\ x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N &\ge 0 \end{aligned}$$

Maximizar $Z = c' X$

$$AX \le b$$

$$X \ge 0$$

$$c = [c_1, c_2, \ldots c_N]', X = [x_1, x_2, \ldots x_N]$$

$$b = [b_1, b_2, \ldots b_M]',$$

$$A = [a_{ij}]_{(M \times N)}, 0 = [0, 0, \ldots 0]'$$

Outras formas do Modelo.
3º. Forma Vectorial

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$

sujeito a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N \leq b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{MN} x_N \leq b_M$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N \geq 0$$

Maximizar $Z = c' X$

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_N P_N \leq P_o$$
$$x_j \geq 0$$
$$j = 1, 2, \ldots\ldots N$$
$$c = [c_1, c_2, \ldots c_N]', X = [x_1, x_2, \ldots x_N]'$$
$$P_j = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots a_{Mj}]' \qquad P_0 = [b_1, b_2, \ldots b_M]'$$

Redução à Forma Padrão (1)

O primeiro passo para a resolução de um problema de PL consiste na sua *redução à* ***Forma Padrão***. Para isto é preciso *converter* as *restrições funcionais* de *desigualdade* em *restrições equivalentes* de *igualdade*.

uma *restrição de desigualdade* de tipo **"≤"** pode ser convertida numa *restrição de igualdade adicionando uma nova variável* ***não negativa*** *(variável de desvio ou folga)* x_{N+1}:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{iN}x_N \leq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \ldots + a_{iN}x_N + x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

Redução à Forma Padrão (2)

uma *restrição de desigualdade* de tipo **"≥"** pode ser convertida numa *restrição de igualdade subtraindo uma nova variável não negativa (variável de desvio ou folga)* x_{N+1}:

$$\boldsymbol{a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \geq b_i \Leftrightarrow a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N} - x_{N+1} \boldsymbol{= b_i}$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

Exemplo Protótipo. Redução à Forma Padrão.

	Restrição de desigualdade	Variável de folga	Restrição de igualdade
1ª	$x_1 \leq 4$	x_3	$x_1 + x_3 = 4$
2ª	$2x_2 \leq 12$	x_4	$2x_2 + x_4 = 12$
3ª	$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	x_5	$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$

Exemplo Protótipo. Redução à Forma Padrão.

As variáveis de folga têm coeficientes nulos na f.o.

Forma Canónica

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad & \le 4 \\
2x_2 & \le 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \le 18
\end{aligned}
$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Forma Padrão

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad + x_3 \qquad\qquad\quad & = 4 \\
2x_2 \qquad + x_4 \qquad & = 12 \\
3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 18
\end{aligned}
$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$$

A introdução destes conceitos são necessários para a compreensão do método Simplex.

Conceitos Fundar

- Suponha-se que:
  - m - número de restrições funcionais,
  - n - número total de variáveis (*de decisão e de folga*);
  - $b_i \geq 0$, (i=1,2,…,m) - em caso contrário multiplicar por (-1)
  - o problema de PL se encontra na forma padrão:

$$\text{Maximizar} \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (4.1)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (4.2)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n \geq 0 \quad (m \leq n) \qquad (4.3)$$

Conceitos Fundamentais

Qualquer conjunto de valores para as variáveis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *que satisfaça as restrições do modelo, i,e, que seja uma solução do sistema de equações lineares* (4.2) *designa-se por* **solução**.

Uma **solução admissível** *é uma solução* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $X \in \Re^n$, *que também verifica as condições de não negatividade* (4.3), *i.e., todos os seus valores são não negativos.*

O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por **região de admissibilidade.**

Uma **solução óptima** *maximiza (minimiza) a função objectivo sobre toda a região de admissibilidade.*

Como determinar uma solução do problema de PL na forma Padrão?

$$\text{Maximizar} \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (4.1)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (4.2)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n \geq 0 \quad (m \leq n) \qquad (4.3)$$

***c(A)* - característica de uma matriz A_{mxn} que corresponde ao número máximo de colunas de *A* linearmente independentes**

Para determinar uma solução do problema de PL é preciso resolver o sistema de equações lineares (4.2). Este sistema é constituído por *m equações* e *n incógnitas,* Suponha que a *característica* da matriz do sistema é igual a *m*, *c(A)=m,* e que $m \leq n$. Este sistema tem uma *infinidade de soluções*, tratando-se portanto dum sistema *possível e indeterminado de grau n-m*. Isto significa que podemos exprimir *m* variáveis em função das *n-m* restantes.

Exemplo Protótipo.
Resolução do Sistema de Equações Lineares.

O sistema de equações lineares é constituído por **3** ***equações*** e **5** ***incógnitas***, onde **3 ≤ 5**. A característica **c(A)=3.**

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 4 \\ 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad + x_5 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} \end{array} \quad \mathbf{X} \quad\quad \mathbf{P_0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem uma ***infinidade de soluções,*** tratando-se portanto dum ***sistema possível e indeterminado de grau*** **5-3=2,** o que significa que podemos exprimir **3** ***variáveis*** em ***função das restantes*** **2.**

Resolução do sistema de equações lineares pelo Método Gauss-Jordan.

I- Reduzir 3 colunas de A a uma matriz identidade I.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \end{array} \\
\begin{array}{c} L1 \rightarrow \\ L2 \rightarrow \\ L3 \rightarrow \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right)
\end{array}
$$

1º: L2 / 2

2º: L1 x(-3) + L3

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)
\end{array}
$$

3º: L2x(-2)+L3

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)
\end{array}
$$

4º: L3 / -3

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \end{array}\right)
\end{array}
$$

5º: L1-L3

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \end{array}\right)
\end{array}
$$

Ficam reduzidas as colunas {P1, P2, P3} a uma matriz identidade I.

Resolução do sistema de equações lineares pelo Método Gauss-Jordan.

II- Atribuindo valores arbitrários a x_4 e x_5 , as variáveis x_1, x_2, x_3 podem ser expressas em função de x_4 *e* x_5 .

$$\begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \end{array}\right)$$

Infinidade de soluções

$x_4 = \lambda_1, \quad \lambda_1 \in \Re$

$x_5 = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \Re$

$x_1 = 2 + 1/3\ \lambda_1 - 1/3\ \lambda_2$

$x_2 = 6 - 1/2\ \lambda_1$

$x_3 = 2 - 1/3\ \lambda_1 + 1/3\ \lambda_2$

Obviamente, quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, uma solução seria: $x_1=2$, $x_2=6$, $x_3=2$, $x_4=0$, $x_5=0$, i.e., $X=(2, 6, 2, 0, 0)$.

Base do Sistema. Variáveis básicas e não básicas.

Se uma submatriz $B_{m \times m}$ *da matriz A do sistema de equações correspondente às restrições* (4.2) *é não singular, i.e., o determinante de* $B_{m \times m}$ *é não nulo,*

então $B_{m \times m}$ *designa-se por* ***base.***

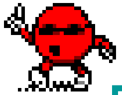
As m variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *, correspondentes às colunas de* $B_{m \times m}$ *,designam-se por* ***variáveis básicas*** *e as restantes n-m variáveis* x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_n$

designam-se por ***variáveis não básicas****.*

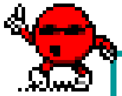
Solução Básica e Solução Básica Admissível.

Sem perda de generalidade, suponha que a ***base*** B é composta pelas m primeiras colunas, i.e., $B = \{ P_1, P_2, ..., P_m \}$

como o determinante de B é não nulo (pela definição de base), o sistema de equações $BX_B = b$ tem solução única



*Obtém-se uma **solução básica** para o sistema (4.2) atribuindo o valor 0 às **n-m variáveis não básicas** $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, e determinando uma solução para as restantes **m variáveis básicas** $x_1, x_2, \ldots, x_m$, i.e., $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$, onde $X_B = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é a única solução do sistema $B X_B = b$.*



*Se todas as variáveis básicas da solução básica $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ são **não negativas** então X é uma **solução básica admissível** (SBA).*

Solução Básica Degenerada.

Suponha-se X = (x_1, x_2,… , x_m,0,…,0) uma solução básica *para o sistema* (4.2) com as correspondentes variáveis básicas x_1, x_2,…, x_m.

Se alguma ***variável básica*** x_1, x_2,…, x_m ***for igual a zero,***
a solução básica *designa-se por*
solução básica degenerada.

Se todas as variáveis básicas são ***não nulas***
a solução básica *designa-se por*
solução básica não degenerada.

Exemplo Protótipo: Base, SBA.

• *A matriz B composta pelas colunas B*={ P_3 , P_4 , P_5 } é uma *base do sistema*. O determinante de *B* é não nulo, pelo que o sistema de equações $BX_B=b$ tem solução única.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|ccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \quad B = \{P_3, P_4, P_5\}$$

$$\xrightarrow{\text{resolvendo } BX_B=b}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} X_B \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{array}\right]$$

Obviamente $x_3=4$, $x_4=12$, $x_5=18$ *é a única solução deste sistema.*

X = (0, 0, 4, 12, 18) *é uma* ***solução básica admissível*** *(SBA) correspondente a esta base.*

$x_3=4$, $x_4=12$, $x_5=18$ *são* ***variáveis básicas*** *e* $x_1=0$, $x_2=0$ são ***variáveis não básicas.***

Quantas soluções básicas tem um problema de PL?

Matriz das restrições do exemplo Protótipo

$$A = \begin{array}{ccccc} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O número de ***soluções básicas*** é igual ao número de matrizes 3x3 que podem ser extraídas da matriz A com determinante não nulo

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = 10$$

Existem 10 submatrizes candidatas a bases:

$$B_1 = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$
$$B_2 = \{ P_1, P_3, P_4 \}$$
$$B_3 = \{ P_1, P_4, P_5 \}$$
$$B_4 = \{ P_1, P_2, P_4 \}$$
$$B_5 = \{ P_1, P_2, P_5 \}$$
$$B_6 = \{ P_1, P_3, P_5 \} \rightarrow \textit{determinante nulo}$$
$$B_7 = \{ P_2, P_3, P_4 \}$$
$$B_8 = \{ P_2, P_3, P_5 \}$$
$$B_9 = \{ P_2, P_4, P_5 \} \rightarrow \textit{determinante nulo}$$
$$B_{10} = \{ P_3, P_4, P_5 \}$$

Exemplo Protótipo: Matrizes com determinante nulo.

$$A = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_4=0]{x_2=0} B_6 = \begin{array}{ccc} P_1 & P_3 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B_6| = 0$$

O *determinante de* B_6 *é nulo* $\Rightarrow$ B não é base $\Rightarrow$ *o sistema é indeterminado*

$$A = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_3=0]{x_1=0} B_9 = \begin{array}{ccc} P_2 & P_4 & P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B_9| = 0$$

O *determinante de* B_9 *é nulo* $\Rightarrow$ B não é base $\Rightarrow$ *o sistema é indeterminado*

Exemplo Protótipo.
Soluções Básicas Admissíveis.

$$X_B = B^{-1} P_0$$

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_2=0]{x_1=0} B_{10} = \begin{pmatrix} P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Det(B_{10}) *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X=(0, 0, 4, 12, 18)

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_4=0} B_1 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Det(B_1) *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X= (2, 6, 2, 0, 0)

Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_3=0} B_4 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_4)$ *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X=(4, 3, 0, 6, 0)

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_3=0]{x_2=0} B_3 = \begin{pmatrix} P_1 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$Det(B_3)$ *não nulo* $\Rightarrow$ *SBA* X= (4, 0, 0, 12, 6)

Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Admissíveis.

$$X_B = B^{-1} P_0$$

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_4=0]{x_1=0} B_8 = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{Det}(B_8)\ \mathit{não\ nulo} \Rightarrow \mathit{SBA}\ X = (0, 6, 4, 0, 6)$$

Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA).

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_1=0} B_7 = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Det(B_7) *não nulo* ,$x_4 < 0 \Rightarrow$ *SBNA* $X = (0, 9, 4, -6, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_5=0]{x_2=0} B_2 = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Det(B_2) *não nulo*, $x_3 < 0 \Rightarrow$ *SBNA* $X = (6, 0, -2, 12, 0)$

Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA).

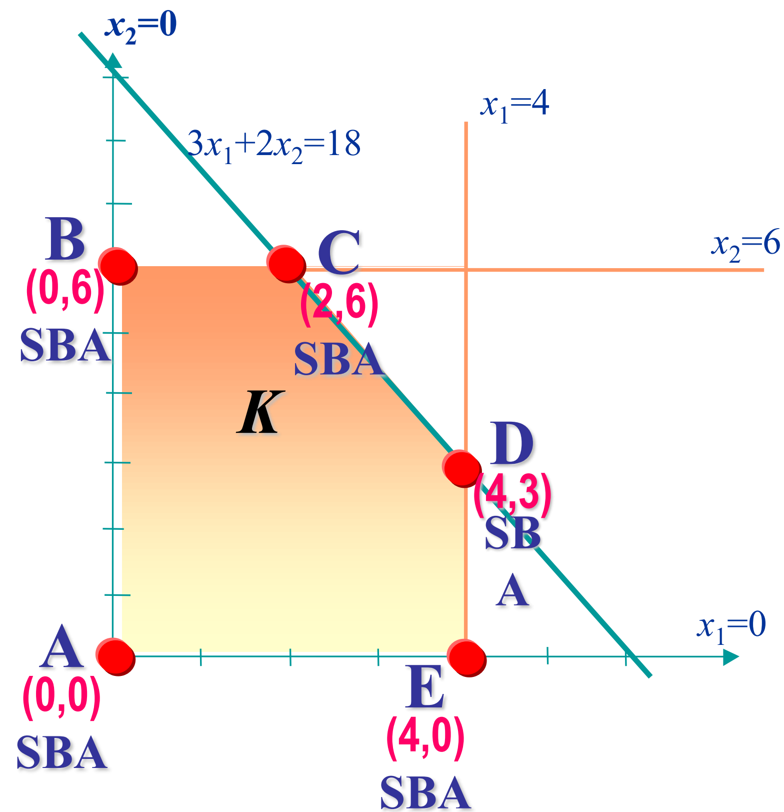
$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[x_4=0]{x_3=0} B_5 = \begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} X \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\textit{Det}(B_5) \textit{ não nulo, } x_5 < 0 \Rightarrow \textit{SBNA} \quad X = (4, 6, 0, 0, -6)}$$

Exemplo Protótipo.
Soluções Básicas Admissíveis (SBA).

Existem 5 SBA que correspondem a 5 pontos extremos de K.

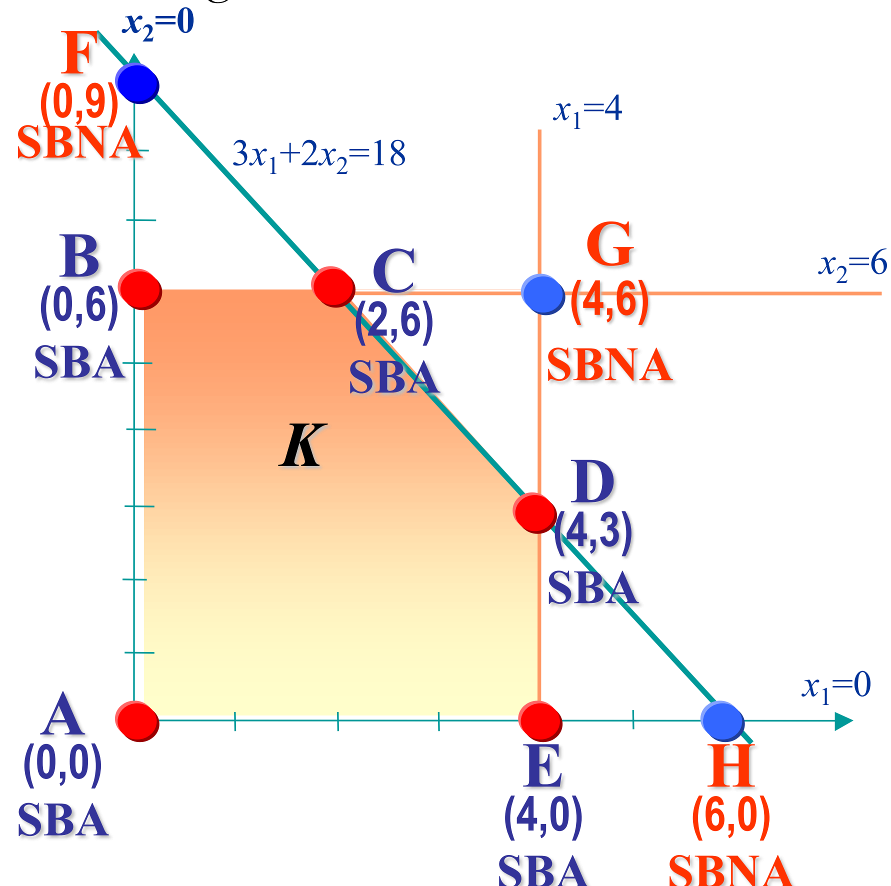
Pontos Extr.	SBA	Base
A=(0,0)	X=(0,0,4,12,18)	B={P_3 , P_4 , P_5 }
B=(0,6)	X=(0,6,4,0,6)	B={ P_2 , P_3 , P_5 }
C=(2,6)	X=(2,6,2,0,0)	B={ P_1 , P_2 , P_3 }
D=(4,3)	X=(4,3,0,6,0)	B={ P_1 , P_2 , P_4 }
E=(4,0)	X=(4,0,0,12,6)	B={ P_1 , P_4 , P_5 }



Exemplo Protótipo. Soluções Básicas Não Admissíveis (SBNA)

Existem 3 SBNA que correspondem àqueles pontos onde se intersectam pelo menos duas restrições e que ficam fora da região de admissibilidade.

	SBNA	Base
F=(0,9)	X=(0,9,4,-6, 0)	B={P_2 , P_3, P_4 }
G=(4,6)	X=(4,6,0,0,-6)	B={ P_1 , P_2 , P_5 }
H=(6,0)	X=(6,0,-2,12,0)	B={ P_1 , P_3 , P_4 }



Teorema Fundamental da PL.

Se existe uma solução admissível do problema de PL definido pelas expressões (4.1), (4.2) e (4.3), então existe uma solução básica admissível, e se existe uma solução óptima admissível então existe uma solução óptima básica admissível.

Número de Soluções Básicas.

- Do *teorema fundamental da PL* conclui-se que não é necessário *procurar a solução óptima* entre todas as soluções admissíveis, mas apenas entre as *soluções básicas admissíveis.*
- O *número máximo* destas *soluções básicas* para um problema com *m restrições* e *n variáveis*, é dado pelo número de possíveis combinações de *m* números que podem ser obtidas usando *n números*:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

A solução óptima poderia ser encontrada pela experimentação de todas as soluções básicas admissíveis, porém este método é tremendamente ineficaz.

Conclusões

A Programação Linear procura :

1. Desenvolver um método que permita passar de ***uma solução básica admissível*** para uma o***utra solução básica admissível*** que corresponda a um **melhor** valor da ***função objectivo;***
2. Dispor de um ***critério*** que permita saber quando se ***alcançou a solução óptima*** sem necessidade de experimentar todas ***as soluções básicas.***