Optimização

Aula 5

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Programação Linear (PL)

- **Aula 5:**

- O Método Simplex.
- Algoritmo Primal Simplex.

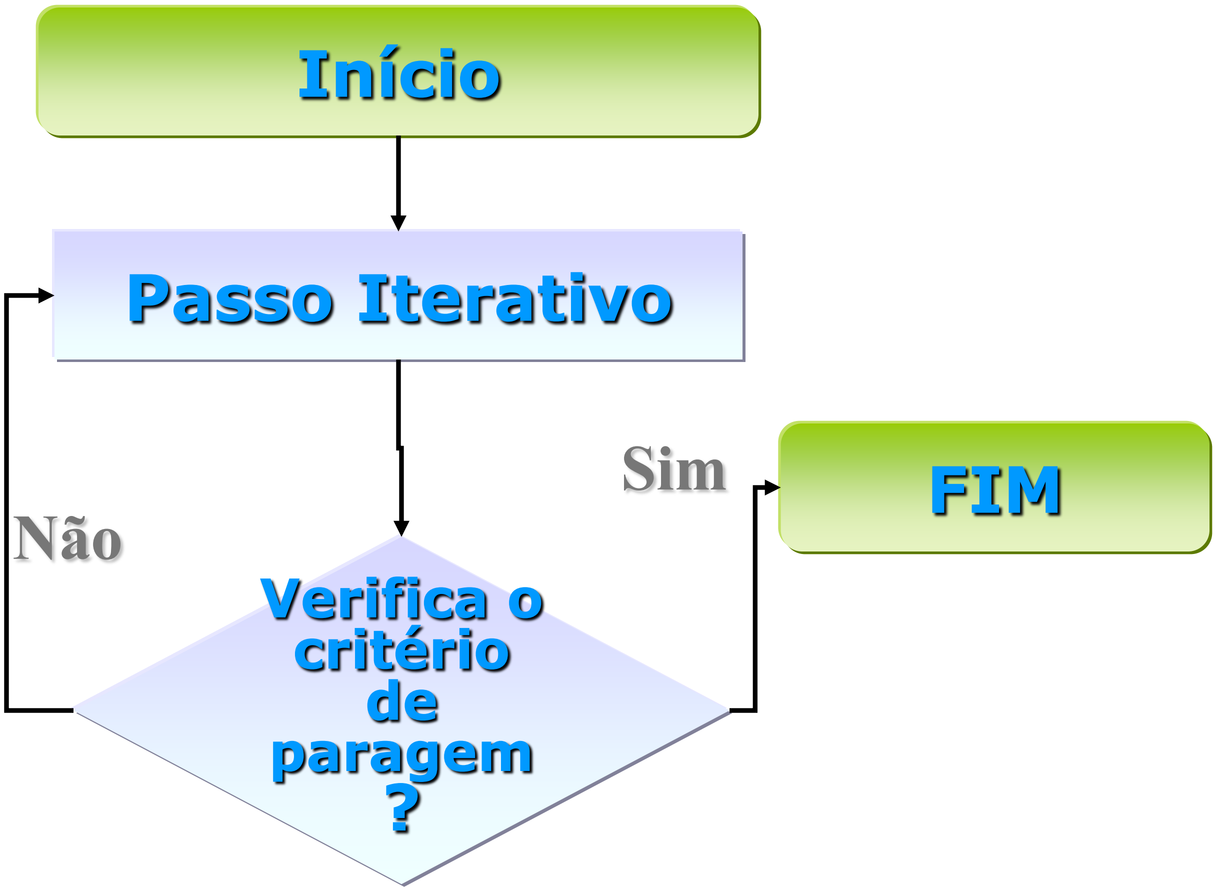
Algoritmo.

O que é um *algoritmo*?

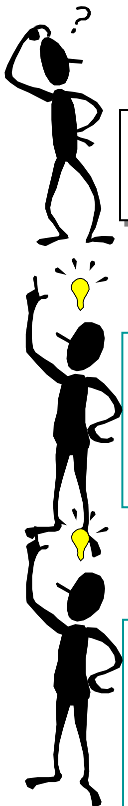
Qualquer procedimento iterativo e finito de solução é um *algoritmo*.

Um *algoritmo* é um processo que *repete* (*itera*) sucessivas vezes um procedimento sistemático até obter um resultado. Alem disso, também inclui um *procedimento para iniciar* e um *critério para terminar*.

Estrutura de um algoritmo.



Método Simplex.

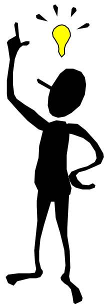


O que é o método *Simplex*?

O método *Simplex* é um *algoritmo* que permite resolver problemas de Programação Linear.

A ideia básica do método *Simplex* consiste em resolver repetidas vezes um sistema de equações lineares para obter uma sucessão de SBA, cada uma "melhor" do que a anterior, até se chegar a uma SBA óptima.

Método Simplex: Ideia Básica.



Cada nova SBA é obtida a partir da anterior, ***substituindo*** uma *variável básica* por uma *variável não básica:*

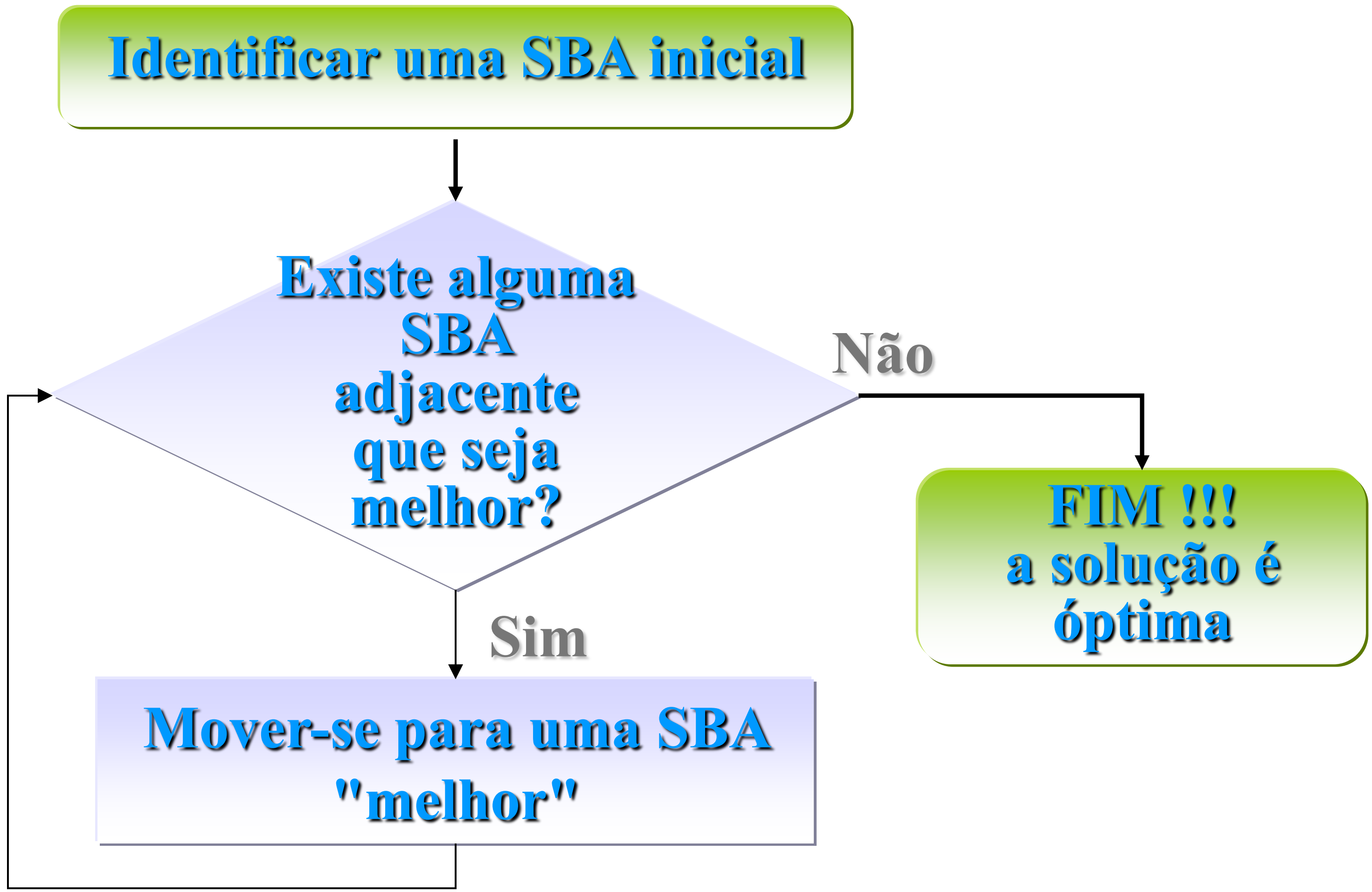
a *variável não básica* que entra é substituída pela *variável básica* que sai.

Soluções Básicas Adjacentes.

Duas soluções básicas que apenas diferem numa variável básica designam-se por **soluções básicas adjacentes.**

Uma SBA é ***óptima*** *quando nenhuma das SBA adjacentes é "melhor", i.e., nenhuma melhora o valor da função objectivo.*

Algoritmo Primal Simplex: Fluxograma



Fluxograma

INÍCIO
Forma Padrão

Identificar uma SBA inicial.
Construir o quadro Simplex correspondente

Calcular os custos reduzidos

A solução é óptima ?
critério de optimalidade

Sim → **FIM** — **Solução óptima !!!**

Não ↓

Identificar a ***variável não básica*** **que entra**
critério de entrada

Óptimo não finito?
critério de óptimo não finito

Sim → **FIM** — **O problema não tem óptimo finito**

Não ↓

Identificar a ***variável básica*** **que sai**
critério de saída

Calcular nova SBA
Actualizar o quadro Simplex

Inicialização: Redução à Forma Padrão. Exemplo Protótipo.

Restrição de desigualdade	Variável de folga	Restrição de igualdade
1ª $x_1 \leq 4$	x_3	$x_1 + x_3 = 4$
2ª $2x_2 \leq 12$	x_4	$2x_2 + x_4 = 12$
3ª $3x_1 + 2x_2 \leq 18$	x_5	$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$

Inicialização: Redução à Forma Padrão.

Forma Canónica

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & \le 4 \\ & 2x_2 & \le 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & \le 18 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Forma Padrão

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & & + x_3 & & & = 4 \\ & 2x_2 & & + x_4 & & = 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$$

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: Passo 1

- Passo 1: Determinar uma SBA inicial X^0 .

  Construir o quadro Simplex correspondente.

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{B} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{resolvendo } BX_B=b} \left(\begin{array}{ccc} P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} X \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

variáveis básicas ⇒ x_3 , x_4 , x_5

variáveis não básicas ⇒ x_1 , x_2

O ponto extremo **A=(0,0)** *corresponde à SBA inicial* $\mathbf{X^0=(0,0,4,12,18)}$

Matriz A & Quadro Simplex.

Matriz A do problema de PL

$$
A=\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccc|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{B} & \multicolumn{3}{c}{N} \\
P_1 & \dots & P_m & P_{m+1} & \dots & P_n \\
a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1m+1} & & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2m} & a_{2m+1} & & a_{2n} \\
\vdots & & & & & \\
a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{mm+1} & \dots & a_{mn}
\end{array}
$$

$\times B^{-1}$

Quadro Simplex

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{B^{-1}B = I} & \multicolumn{3}{c}{B^{-1}N} \\
x_1 & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n \\
x_{11} & \dots & x_{1m} & x_{1m+1} & \dots & x_{1n} \\
x_{21} & \dots & x_{2m} & x_{2m+1} & \dots & \\
x_{2n} & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
x_{m1} & \dots & x_{mn} & x_{mm+1} & \dots & x_{mn}
\end{array}
$$

As colunas do quadro do simplex correspondentes ás variáveis de decisão $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots\ x_n\}$ correspondem aos vectores P_j da matriz original multiplicados pela inversa da base B

Algoritmo Primal Simplex. Custos reduzidos

Como calcular os custos reduzidos c_j-z_j?

c_j
coeficientes da f.o.

$$c_j - z_j \,,\ \forall\ j=1,2,\ n$$

x_{ij}
componente i da coluna j do quadro simplex

c_i
coeficientes das variáveis básicas na f.o .

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \quad , j = 1,2,\ldots,n$$

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 1º quadro, passo 1.

- Início: Construção do 1º QUADRO.

coeficientes das variáveis na f.o.

coeficientes das variáveis básicas na f.o.

valores das variáveis básicas

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	3	2	0	0	1	18
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	3	5	0	0	0	

$z_1 = 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 3$

$z_2 = 0 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 2$

valor da f.o.

custos reduzidos (no caso de minimização $z_j - c_j$)

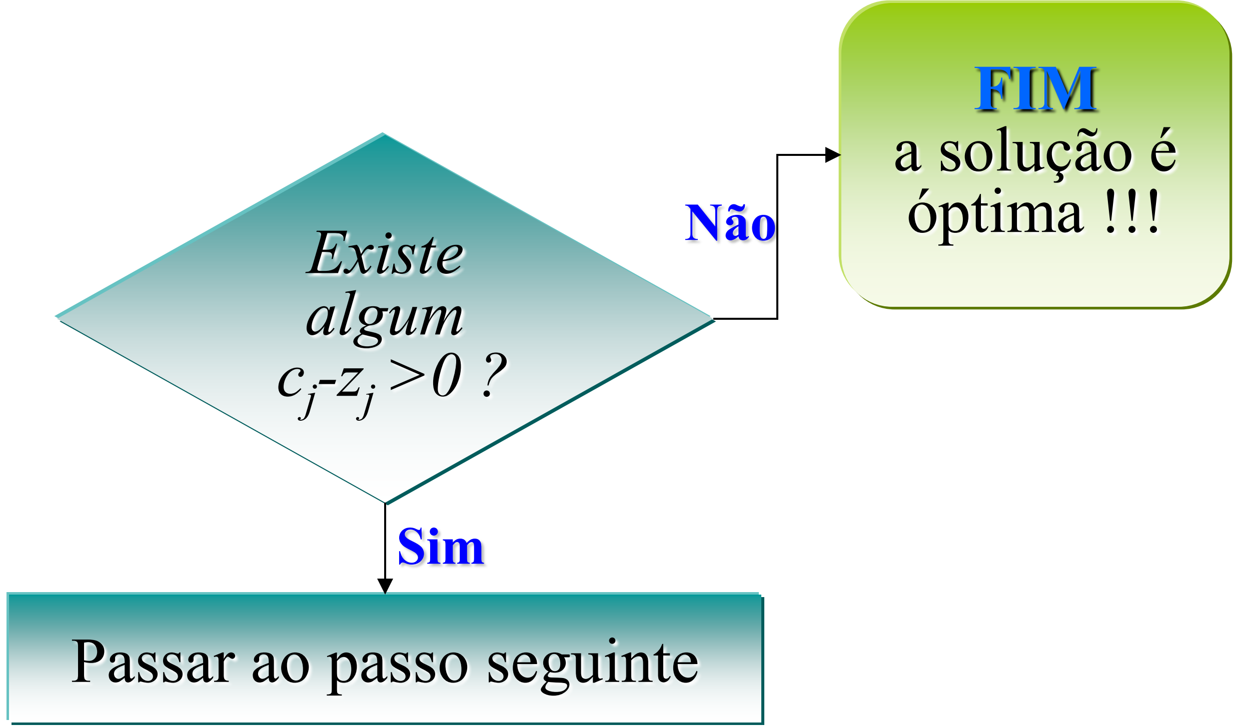
os custos reduzidos das variáveis básicas são sempre nulos

Algoritmo Primal Simplex.

- Passo 2: Critério de optimalidade:

  Existe algum custo reduzido positivo?

  - Se *sim*, o processo continua;
  - Se *não*, o processo termina, a SBA é uma solução óptima



Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 1º quadro, passo 2

- **Passo 2**: Critério de optimalidade:
  Existe algum custo reduzido positivo?

Calcular os c_j-z_j

$c_j - z_j$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	0	0	0

Existe algum c_j-$z_j > 0$?

$3 > 0$, $5 > 0$?

Sim

Passar ao passo seguinte

Sim

Passar ao passo seguinte

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Algoritmo Primal Simplex.

- **<u>Passo 3</u>:** Determinar a variável não básica que *entra*.

Critério de entrada:

$$\max_{j} \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = c_r - z_r$$

coluna pivot.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & \cdots & \boxed{x_r} & \cdots & x_m \\ x_{11} & \cdots & x_{1r} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2r} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & \\ x_{m1} & \cdots & x_{mr} & \cdots & x_{mn} \end{array}$$

Existe algum $x_{ir} > 0$?

Não

FIM
o problema não tem óptimo finito

Sim

Passar ao passo seguinte

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 1º quadro, passo 3

Passo 3: Determinar a variável não básica que *entra*.

a variável que entra: x_2

coluna pivotal

Procura-se melhorar (ou pelo menos não piorar) o valor da f.o. na próxima SBA

$$\max \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = 5$$

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	$\boxed{x_2}$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	3	2	0	0	1	18
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	3	$\boxed{5}$	0	0	0	

Algoritmo Primal Simp

Procura-se manter a admissibilidade na próxima solução básica

Passo 4: Determinar a variável básica que *sai*.

- 1º. Seleccionar os coeficientes $x_{ir} > 0$
- 2º. Dividir cada coeficiente x_{i0} da coluna dos termos independentes pelo coeficiente $x_{ir} > 0$ da coluna pivotal *r*.
- 3º. Seleccionar a linha *s* onde se alcance o menor dos quocientes (regra do menor quociente):

coluna pivotal.

x_1	…	x_r	…	x_m		$\bar{b}$
x_{11}	…	x_{1r}	…	x_{1n}		x_{10}
x_{21}	…	x_{2r}	…	x_{2r}		x_{20}
⋮						
x_{m1}	…	x_{mr}	…	x_{mn}		x_{m0}

$$\vartheta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ir}} \middle| x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sr}}$$

Coluna e linha pivotal. Elemento Pivot.

A *coluna r* onde se verifica o maior custo reduzido

$$\max_{j} \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = c_r - z_r > 0$$

designa-se por ***coluna pivotal***

A *linha* s onde se verifica o mínimo dos quocientes

$$\vartheta_0 = \min_{i} \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ir}} \middle| x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sr}}$$

designa-se por ***linha pivotal***.

O *elemento* x_{sr} onde se intersectam a *linha pivot s* e a *coluna pivot r*

designa-se por ***pivot***.

Algoritmo Primal Simplex: Exemplo: 1º quadro, passo 4

- Passo 4: Determinar a variável básica que *sai*.

linha pivotal: $i=2$

coluna pivotal: $j=2$

a variável que sai: x_4

pivot

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	1	0	1	0	0	4
0	$\boxed{x_4}$	0	$\boxed{2}$	0	1	0	12
0	x_5	3	2	0	0	1	18
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	3	$\boxed{5}$	0	0	0	

máximo

mínimo

12/2= 6

18/2= 9

Algoritmo Primal Simplex.

- **<u>Passo 5</u>:** 1º. Calcular nova SBA.

1ª *A variável não básica que entra* ⇒ $\boldsymbol{x_r}$

2ª *A variável básica que sai* ⇒ $\boldsymbol{x_s}$

SBA:
$(x_1, x_2, x_s, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$

$$\xrightarrow[x_s \text{ sai}]{x_r \text{ entra}}$$

nova SBA:
$(x_1, x_2, x_r, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$

Algoritmo Primal Simplex.

- **<u>Passo 5</u>:**
  2º. Construir um novo quadro simplex aplicando o Método de redução Gauss-Jordan.
  - Reduzir a 1 o número pivot.
    para isto é preciso dividir toda a linha pivotal pelo pivot.

$$Nova\ linha\ \ pivotal = \frac{linha\ \ pivotal}{pivot}$$

- Reduzir a 0 as outras componentes da coluna pivotal.

  para isto, é preciso calcular todas a linhas (excepto a linha pivotal), pela seguinte fórmula:

$$nova\ \ linha = \ linha - (componente\ da\ coluna\ pivo\text{tal}\ \ \text{x}\ \ \ nova\ linha\ \ pivotal)$$

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 1º quadro, passo 5

- **<u>Passo 5</u>:** Calcular a nova SBA X^1.

1ª *A variável não básica que entra* → $\boldsymbol{x_2}$

2ª *A variável básica que sai* → $\boldsymbol{x_4}$

$$\text{SBA } X^0_B = (x_3, \boldsymbol{x_4}, x_5) \xrightarrow[x_4 \text{ sai}]{x_2 \text{ entra}} \text{SBA } X^1_B = (x_3, \boldsymbol{x_2}, x_5)$$

Algoritmo Primal Simplex.
Passo 5: construir o 2º quadro.

Linha 1: NÃO MUDA o coeficiente na coluna pivot é igual a 0.

Linha Pivotal: Nova linha 2= Linha 2 / pivot

Nova linha 3= linha 3 - (2 x *nova linha pivotal*)

	3	2	0	0	1	18
-(2)	0	1	0	1/2	0	6
	3	0	0	-1	1	6

C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
	c_j	3	5	0	0	0	
0	x_3	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	3	2	0	0	1	18
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	3	5	0	0	0	
0	x_3	1	0	1	0	0	4
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	x_5	3	0	0	-1	1	6

A SBA X^1=(0, 6, 4, 0, 6)

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro.

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	1	0	1	0	0	4
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	x_5	3	0	0	-1	1	6
	z_j	$\boxed{0}$	$\boxed{5}$	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	$c_j - z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	

$z_1 = 0 \text{ x } 1 + 5 \text{ x } 0 + 0 \text{ x } 3$

$z_2 = 0 \text{ x } 0 + 5 \text{ x } 1 + 0 \text{ x } 0$

Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro, passo 2.

- **<u>Passo 2</u>:** Critério de optimalidade:
  Existe algum custo reduzido positivo?

Calcular os c_j-z_j

$\boxed{3} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{5}{2} \quad 0$

Existe algum c_j-z_j >0 ?

3 > 0

Sim

Passar ao passo seguinte

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro, passo 3.

- **Passo 3:** Determinar a variável não básica que entra.

a variável que entra: x_1

coluna pivotal

C_B	X_B \ c_j	3	5	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	1	0	1	0	0	4
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	x_5	3	0	0	-1	1	6
	z_j	0	5	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	$c_j - z_j$	$\boxed{3}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	

$\max \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = 3$

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro, passo 4.

- **Passo 4:** Determinar a variável básica que sai.

coluna pivotal: $j = 1$

	c_j	3	5	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
0	x_3	1	0	1	0	0	4	4/1= 4
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	6/3= 2
0	x_5	3	0	0	-1	1	6	***mínimo (menor quociente)***
	z_j	0	5	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
	$c_j - z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0		
		máximo						

a variável que sai: x_5

linha pivotal: $i = 3$

pivot

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 2º quadro, passo 5.

- **Passo 5**: Calcular a nova SBA X^2.

1ª *A variável não básica que entra* → x_1

2ª *A variável básica que sai* → x_5

$$\text{SBA } X^1_B = (x_3, x_2, x_5) \xrightarrow[x_5 \text{ sai}]{x_1 \text{ entra}} \text{SBA } X^2_B = (x_3, x_2, x_1)$$

Algoritmo Primal Simplex.
Passo 5: construir o 3º quadro.

Linha Pivotal:
Nova linha 3= Linha 3 / pivot

linha 2: NÃO MUDA
o coeficiente na coluna pivotal é igual a 0.

Nova linha 1= linha 1 -
(1 x nova linha pivotal)

	1	0	1	0	0	4
-(1)	1	0	0	-1/3	1/3	2
	0	0	1	1/3	-1/3	2

	c_j	3	5	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	1	0	1	0	0	4
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	x_5	3	0	0	-1	1	6
	z_j	0	5	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	$c_j - z_j$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 3º quadro.

C_B	c_j	3	5	0	0	0	
	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	z_j	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

todos os custos reduzidos são não positivos, logo a solução é óptima

A SBA $\mathbf{X^2} = (2, 6, 2, 0, 0)$ é a solução óptima

Algoritmo Primal Simplex. Exemplo: 3º quadro, passo 2.

- **<u>Passo 2</u>:** Critério de optimalidade:
  Existe algum custo reduzido positivo?

Calcular os $c_j\text{-}z_j$ → $0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{3}{2} \quad -1$

Existe algum $c_j\text{-}z_j > 0$?

Não →

FIM !!!

a SBA $X^2 = (\, 2\,, 6,\, 2,\, 0,\, 0\,)$

é óptima !!!

Algoritmo Primal Simplex. Conclusões

O Algoritmo Primal Simplex envolve os seguintes elementos:

- ✓ uma SBA como ponto de partida ;
- ✓ um mecanismo que determina a passagem para uma nova SBA "melhor" do que a anterior;
- ✓ critérios de paragem que indicam quando se está perante uma *solução óptima* (finita) ou perante a *inexistência de óptimo finito* (o valor da f.o. cresce indefinidamente).