



Optimização

Aula 8



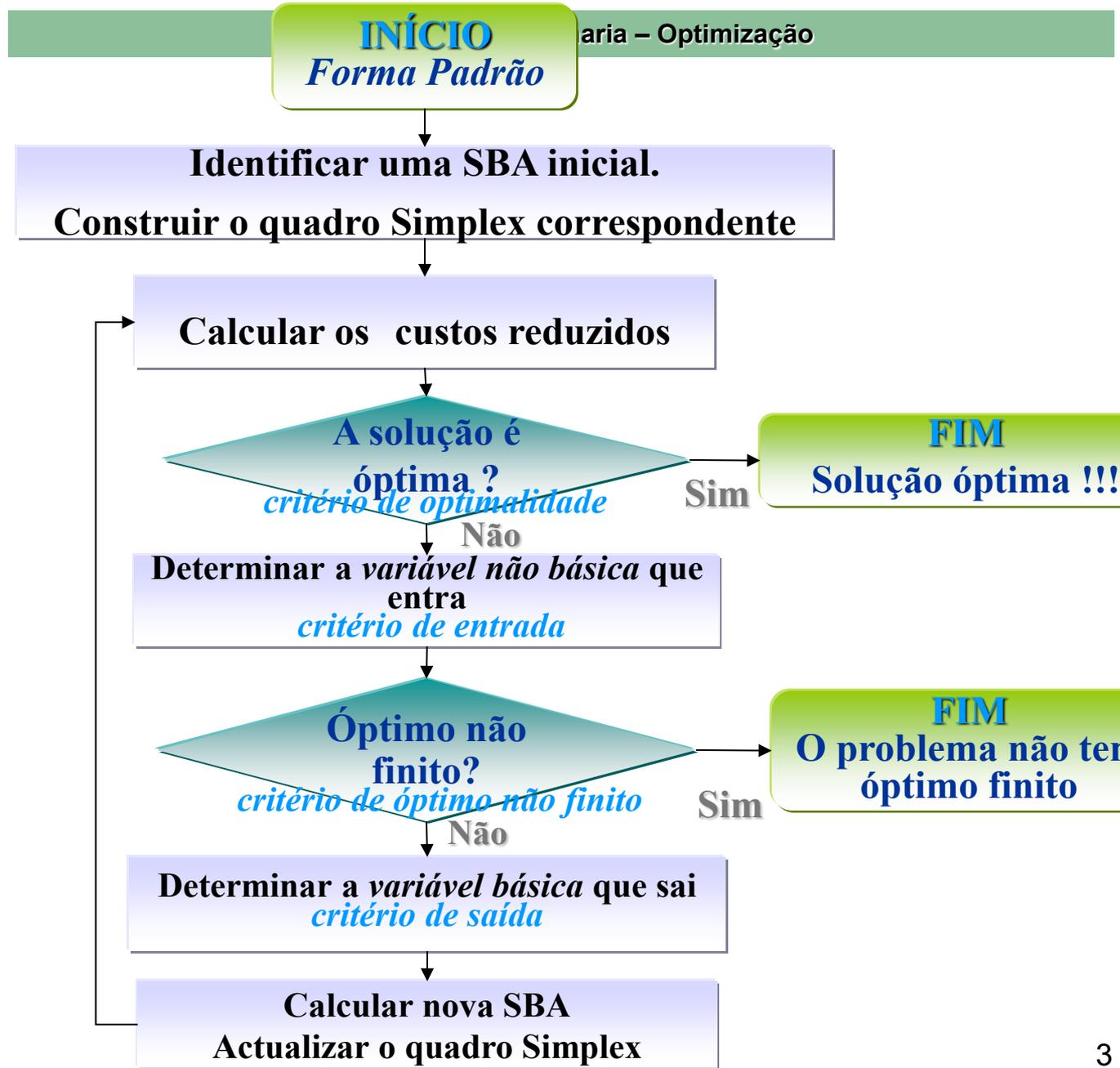
Programação Linear (PL)

Aula 8 : O método Simplex. Casos particulares.

- Empate no critério de entrada.
- Ótimo não finito.
- Soluções ótimas alternativas.
- Degenerescência.



F
I
L
I
O
G
R
A
M
A





Caso 1: Empate no critério de entrada

O máximo dos custos reduzidos é atingido em mais do que numa variável *não básica*.

Critério de entrada:

$$\max \{ c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0 \} = c_{j_1} - z_{j_1} = c_{j_2} - z_{j_2} = \dots = c_{j_k} - z_{j_k}$$

Solução:

Escolhe-se arbitrariamente uma para entrar. Qualquer que seja a escolha o processo converge para o óptimo.

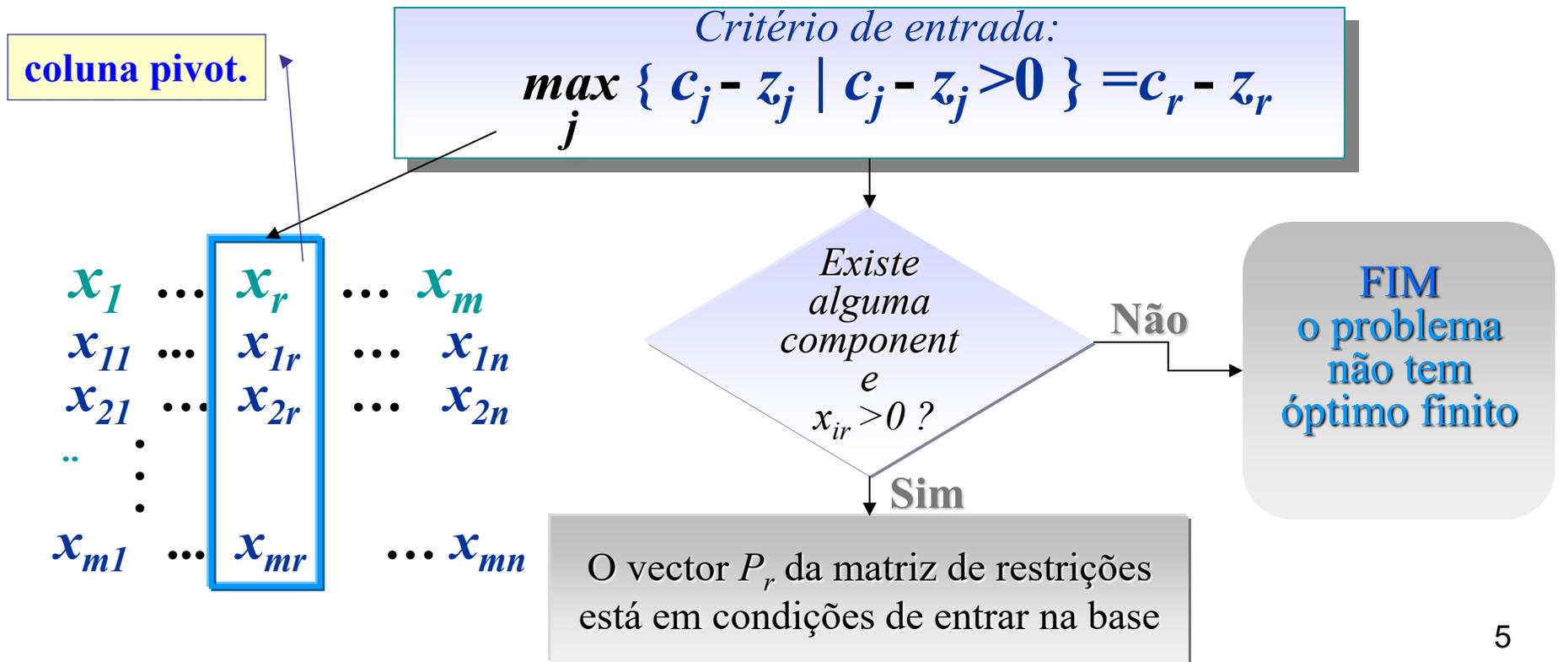


Caso 2: Ótimo não finito.

A região de admissibilidade é não limitada e o valor da f.o. cresce indefinidamente nesta região.

Critério de ótimo não finito:

Não existe nenhuma componente positiva na coluna pivotal.





Caso2: Óptimo não finito. Exemplo.

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
 sujeito a
 $2x_1 + 2x_2 \geq 6$
 $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $x_2 \leq 3$
 $x_1, x_2 \geq 0$

	C_j	2	3	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
2	x_1	1	0	-1/4	-1/2	0	1
3	x_2	0	1	-1/4	1/2	0	2
0	x_5	0	2	1/4	-1/2	1	1
	Z_j	2	3	-5/4	-1	0	8
	$C_j - Z_j$	0	0	5/4	1	0	
2	x_1	1	0	0	-1	1	2
3	x_2	0	1	0	0	1	3
0	x_3	0	0	1	-2	4	4
	Z_j	2	3	0	-2	5	13
	$C_j - Z_j$	0	0	0	2	-5	

máximo

Todas as componentes da coluna pivotal são não positivas (são todas ≤ 0):
 o problema não tem óptimo finito



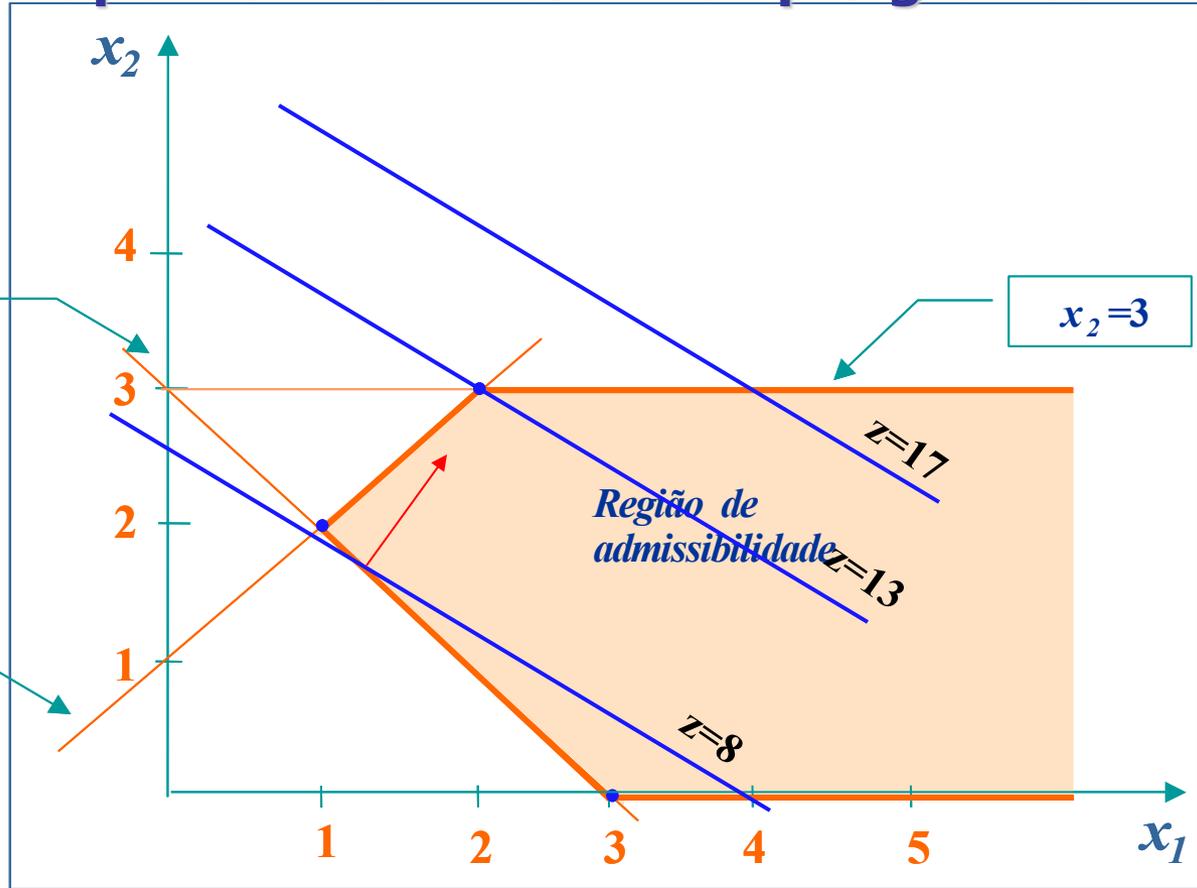
Caso 2: Óptimo não finito. Exemplo gráfico.

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeito a
 $2x_1 + 2x_2 \geq 6$
 $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $x_2 \leq 3$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$2x_1 + 2x_2 = 6$

$-x_1 + x_2 = 1$

$x_2 = 3$

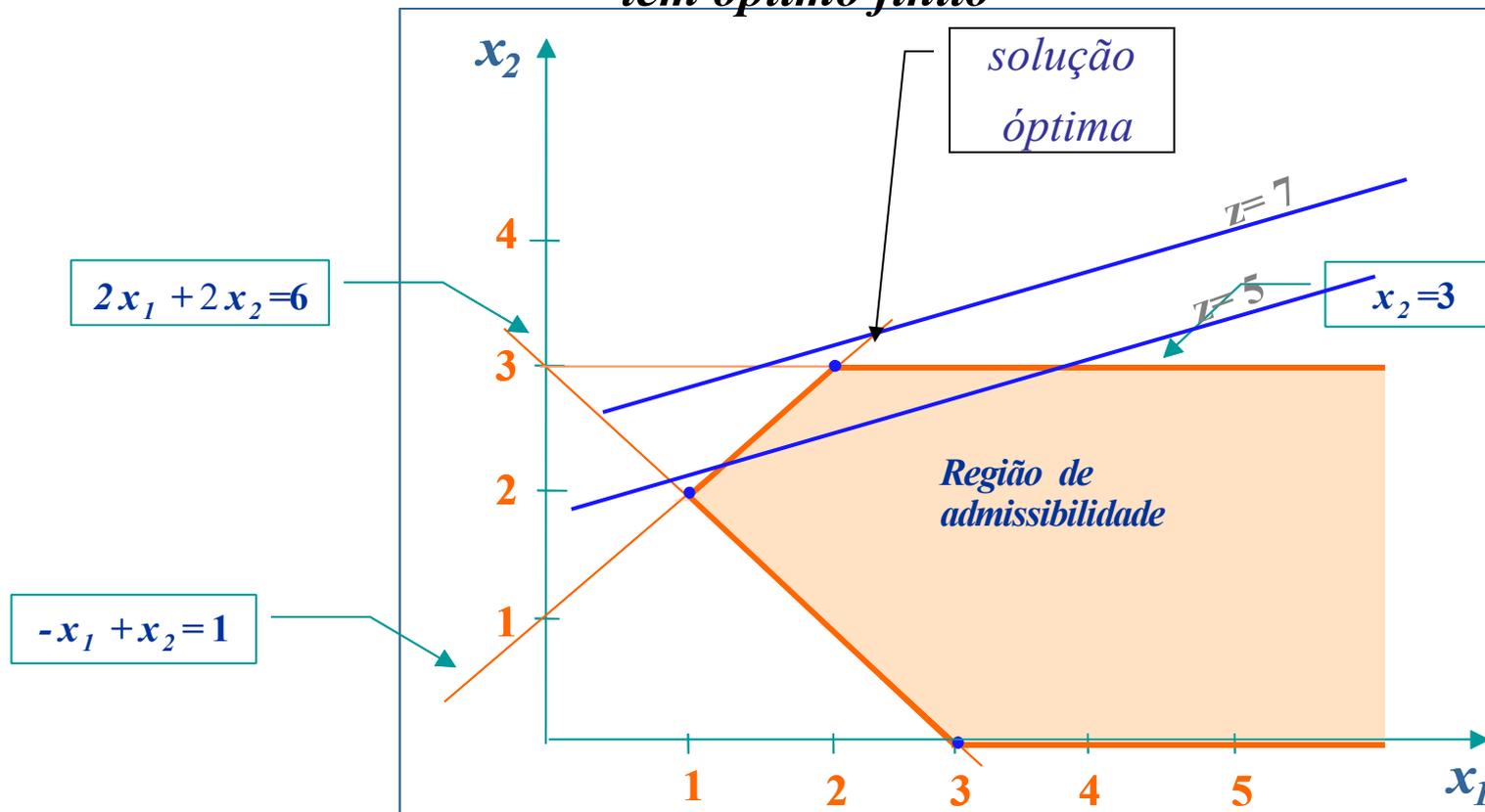


A região de admissibilidade é não limitada e o valor da f.o. cresce indefinidamente nesta região, o que significa que o problema **não tem óptimo finito**.



Região de Admissibilidade Não Limitada e Ótimo finito. Exemplo gráfico.

Se mudamos a f.o de $z=2x_1+3x_2$ para $z=-x_1+3x_2$ este novo problema tem ótimo finito



A região de admissibilidade é não limitada e o problema tem ótimo finito. O ponto $(2,3)$ é a solução ótima com um valor ótimo igual a 7.



Caso 3: Soluções óptimas alternativas.

O problema tem uma **infinidade de soluções óptimas** das quais pelo menos duas são soluções básicas e as restantes podem ser obtidas por combinação linear convexa daquelas

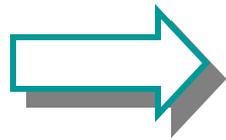


Como identificar a existência de soluções óptimas alternativas?

Quando no quadro simplex óptimo existe alguma **variável não básica** com **custo reduzido nulo** ($c_j - z_j = 0$) com pelo menos **uma componente positiva** na correspondente coluna do quadro.

**Caso 3: Soluções óptimas alternativas...**

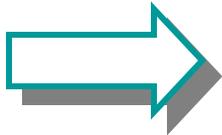
Suponha-se que foi encontrada, na iteração k , a solução óptima X^k com z^* como valor da f.o. e que no quadro Simplex existe uma variável não básica com custo reduzido nulo e com pelo menos **uma componente positiva** na correspondente coluna do quadro Simplex.



a entrada desta variável não básica corresponde a uma nova SBA X^{k+1}



$z^{k+1} = z^* + \theta (c_j - z_j) = z^* + \theta (0) = z^*$, i.e., os valores da f.o. coincidem



X^{k+1} é também solução óptima.

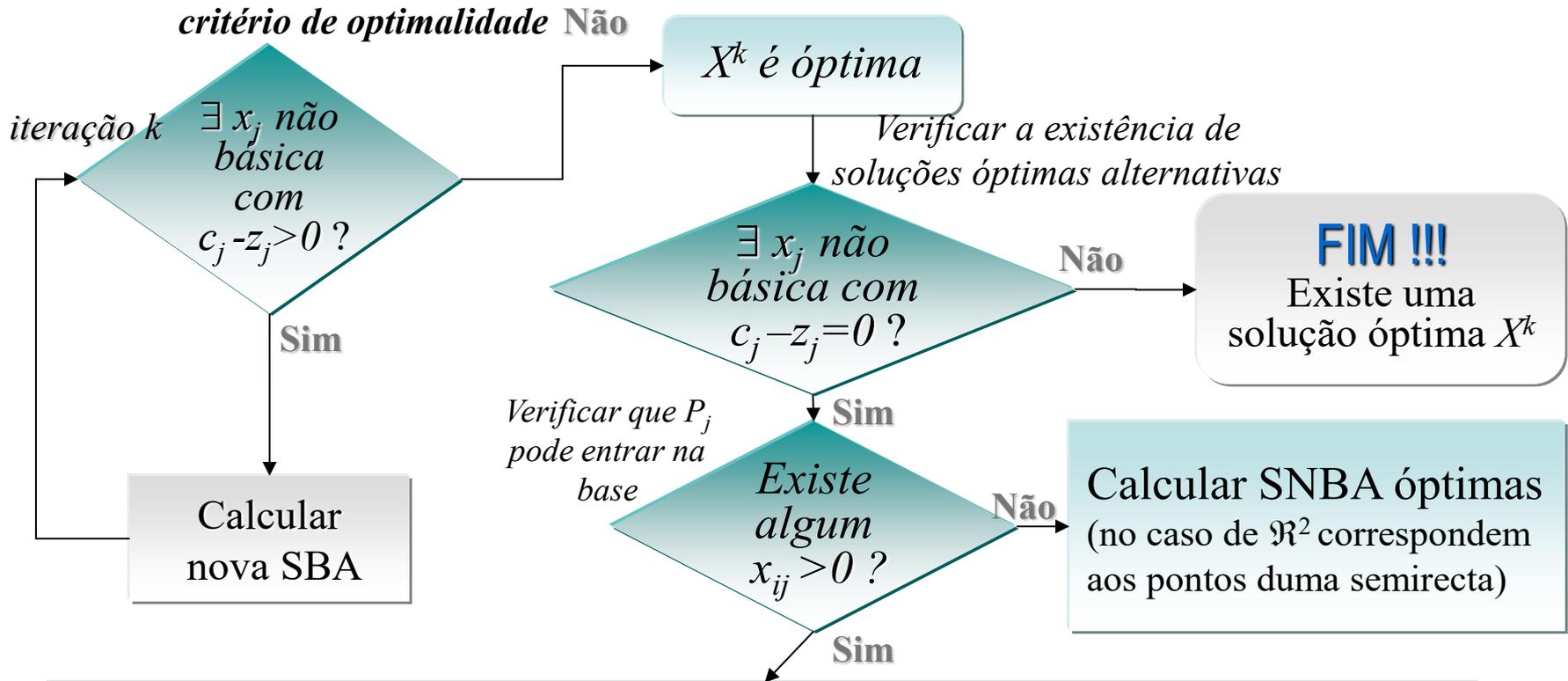
Assim podemos, sucessivamente, identificar todas as **soluções básicas alternativas**. As soluções óptimas **não básicas** podem ser calculadas como combinação linear convexa das soluções básicas óptimas:

$$X^* = \lambda X^*_1 + \lambda X^*_2 + \dots + \lambda X^*_n, \quad 0 < \lambda < 1$$

X^*_1, \dots, X^*_n – SB óptimas



Caso 3: Soluções óptimas alternativas. Algoritmo.



- 1°. Calcular SBA óptimas alternativas.
- 2°. Calcular SNBA óptimas como combinação linear convexa das SBA (no caso de \mathbb{R}^2 correspondem aos pontos dum segmento de recta)

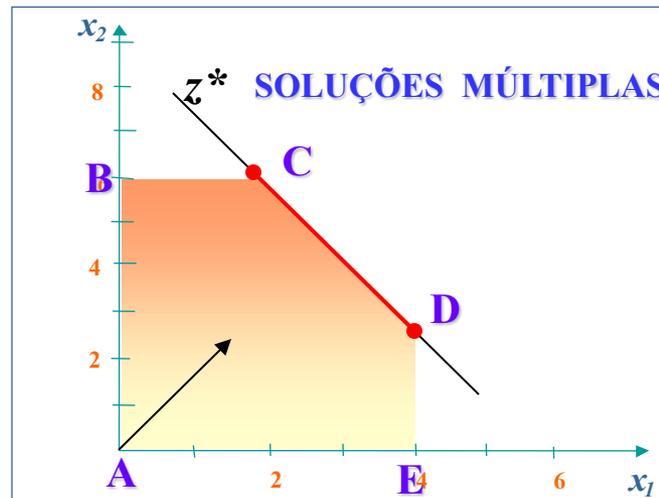


Caso 3: Soluções óptimas alternativas. Exemplo gráfico

A função objectivo alcança o seu valor máximo em qualquer ponto do segmento de recta CD. Este segmento de recta constitui o conjunto de todas as combinações lineares convexas dos pontos C e D.

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$
sujeito a

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 4 \\2x_2 &\leq 12 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



o gradiente da função objectivo coincide com o gradiente da recta da 3ª restrição do exemplo, i.e., as rectas da função objectivo seriam paralelas à recta $3x_1 + 2x_2 = 18$.



Regra da Estrela:

$$\begin{array}{r}
 1 / \\
 \swarrow \\
 3 \times
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 0 \\
 \downarrow \\
 2 -
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x \\
 \\
 \end{array}
 = 2 - (0 \times 3 / 1) = 2$$

32

$$\begin{array}{r}
 1 / \\
 \swarrow \\
 3 \times
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1 \\
 \downarrow \\
 0 -
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x \\
 \\
 \end{array}
 = 0 - (1 \times 3 / 1) = -3$$

33

$$\begin{array}{r}
 1 / \\
 \swarrow \\
 3 \times
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 0 \\
 \downarrow \\
 0 -
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x \\
 \\
 \end{array}
 = 0 - (0 \times 3 / 1) = 0$$

34

$$\begin{array}{r}
 1 / \\
 \swarrow \\
 3 \times
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \downarrow \\
 18 -
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x \\
 \\
 \end{array}
 = 18 - (4 \times 3 / 1) = 6$$

3b

Soluções óptimas alternativas. Exemplo: Quadro 1

C_j		3	2	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	3	2	0	0	1	18
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	3	2	0	0	0	
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	0	2	-3	0	1	6

Linha 1 e 2: NÃO MUDÃO

Linha 3:

	3	2	0	0	1	18
-(3)	1	0	1	0	0	4
	0	2	-3	0	1	6



Soluções óptimas alternativas. Exemplo: Quadro 2

Linha 1: NÃO MUDA

Linha 3: dividir pelo pivot

Linha 2:

	0	2	0	1	0	12
-(2)	0	1	-3/2	0	1/2	3
	0	0	3	1	-1	6

	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12
0	x_5	0	2	-3	0	1	6
	Z_j	0	0	3	0	0	12
	$C_j - Z_j$	0	2	-3	0	0	
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
2	x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3



Determinando soluções óptimas alternativas. Exemplo: Quadro óptimo

A solução $X=(4,3,0,6,0)$ que corresponde ao ponto $D=(4,3)$ é óptima. O valor óptimo é 18

A variável não básica x_3 tem : $c_3 - z_3 = 0$, e na coluna do quadro existem coeficientes positivos \Rightarrow existe soluções óptimas alternativas

A solução $X=(2,6,2,0,0)$ que corresponde ao ponto $C=(2,6)$ também é óptima com o mesmo valor óptimo 18

	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
2	x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3
	Z_j	3	2	0	0	1	18
	$C_j - Z_j$	0	0	0	0	-1	
3	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
2	x_2	0	1	0	1/2	0	6
	Z_j	3	2	0	0	1	18
	$C_j - Z_j$	0	0	0	0	-1	



Determinando soluções óptimas alternativas.

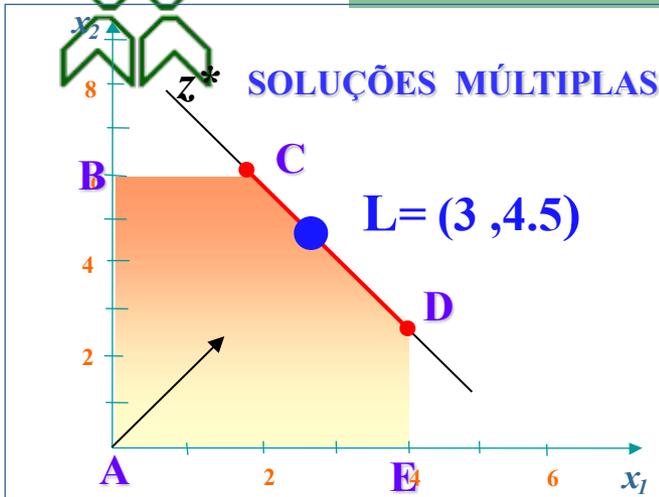
A solução $X^*=(2,6,2,0,0)$ que corresponde ao ponto $C=(2,6)$ também é óptima com o mesmo valor óptimo

18

	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
3	x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
0	x_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
2	x_2	0	1	0	1/2	0	6
	Z_j	3	2	0	0	1	18
	$C_j - Z_j$	0	0	0	0	-1	

A variável não básica x_4 tem $C_4 - Z_4 = 0$. A iteração extra não muda os custos reduzidos, i.e., a variável básica que sai fica com o mesmo valor nos seus custos igual a 0. Se continuar com outra iteração vamos a obter o quadro anterior, ou seja a primeira SBA óptima. Verificar!!!!...

Determinando as soluções óptimas alternativas não básicas.



Existem duas SBA óptimas com o valor óptimo 18:

- ▶ $X^*_1 = (4, 3, 0, 6, 0)$ - que corresponde ao ponto $D = (4, 3)$
- ▶ $X^*_2 = (2, 6, 2, 0, 0)$ - que corresponde ao ponto $C = (2, 6)$

Qualquer outra solução não básica admissível (SNBA) óptima, X^* , é obtida como combinação linear convexa de X^*_1 e X^*_2 , atribuindo a λ valores numéricos diferentes entre 0 e 1 :

$$X^* = \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{\substack{\text{Por exemplo} \\ \text{fixando} \\ \lambda = \frac{1}{2}}} {=} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \\ \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 0 \\ \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A SBNA óptima $X^* = (3, 4.5, 1, 3, 0)$ corresponde ao ponto $L = (3, 4.5)$ do segmento de recta CD



Caso 4: Degenerescência & “cycling”.

- Quando se está a definir qual a variável básica que sai e o mínimo é atingido *em mais do que um dos quocientes* (empate no critério de saída) obtém-se uma solução básica *degenerada*, i.e., com variáveis básicas nulas.
- O Algoritmo Simplex nos casos de soluções degeneradas pode entrar em ciclo (“cycling”) i.e., pode começar a reproduzir periodicamente as mesmas soluções básicas, mantendo-se constante o valor da f.o. e nunca atingir o valor óptimo.



Caso 4: Degenerescência. Exemplo.

Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$
 sujeito a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Escolhe-se
 arbitrariamente
 para sair x_3

A solução
 $X = (0, 2, 0, 0)$ é
degenerada
 (a variável básica x_4 é
 nula)

	C_j	3	9	0	0	<i>mínimos empatados</i>	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{b}	
0	x_3	1	4	1	0	8	$8/4 = 2$
0	x_4	1	2	0	1	4	$4/2 = 2$
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	3	9	0	0		
9	x_2	1/4	1	1/4	0	2	Solução degenerada
0	x_4	1/2	0	-1/2	1	0	
	Z_j	9/4	9	9/4	0	18	
	$C_j - Z_j$	3/4	0	-9/4	0		



Caso 4: Degenerescência. Exemplo

Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$

sujeito a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	C_j	3	9	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{b}	$2 \times 4 = 8$
9	x_2	1/4	1	1/4	0	2	$0 \times 2 = 0$
0	x_4	1/2	0	-1/2	1	0	mínimo
	Z_j	9/4	9	9/4	0	18	
	$C_j - Z_j$	3/4	0	-9/4	0		
9	x_2	0	1	1/2	-1/2	2	Solução degenerada
3	x_1	1	0	-1	2	0	
	Z_j	3	9	3/2	3/2	18	
	$C_j - Z_j$	0	0	-3/2	-3/2		

A solução $X = (0, 2, 0, 0)$ é óptima e degenerada (a variável básica x_1 é nula)



Caso 4: Degenerescência. Exemplo Gráfico.

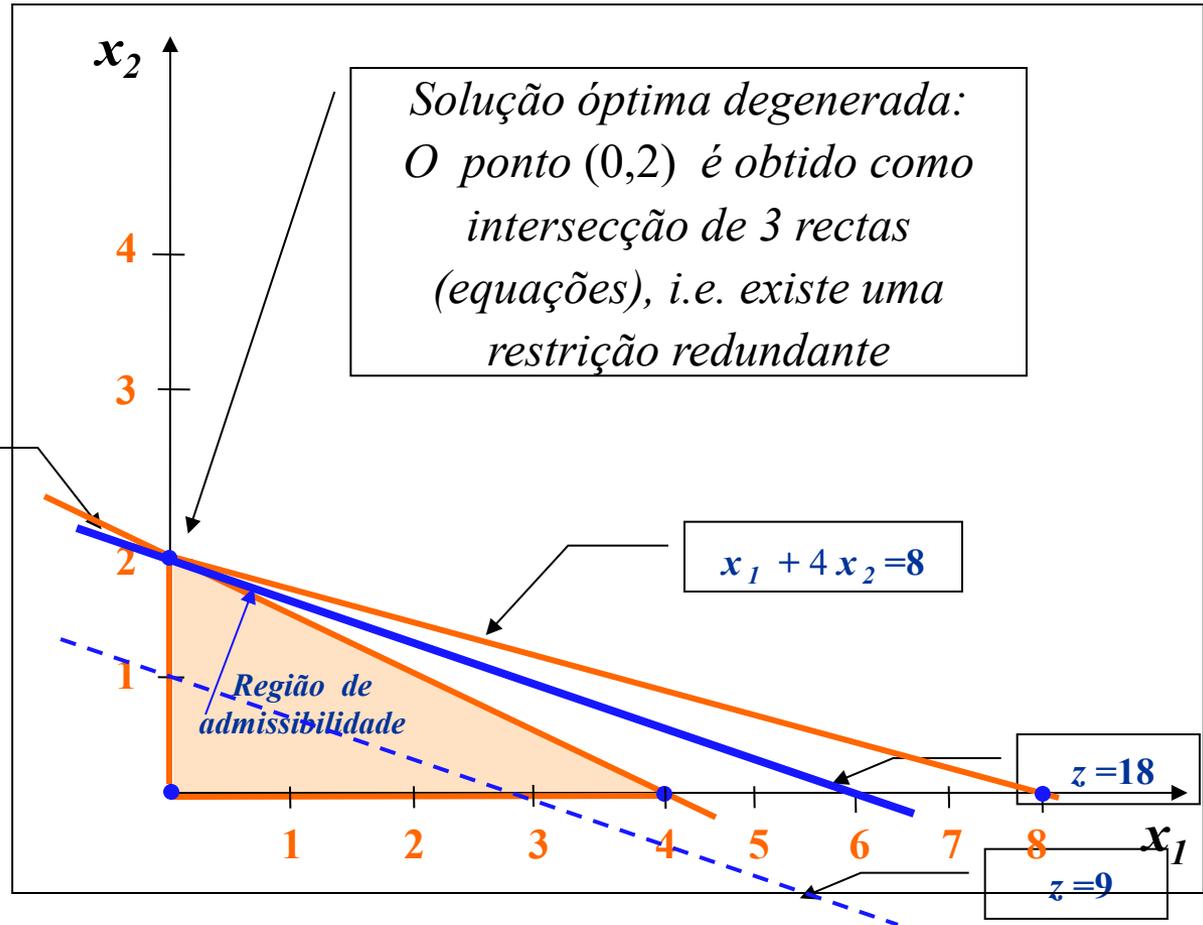
Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$
sujeito a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 4$$





Caso 4: Degenerescência.

Degenerescência acontece quando no percurso do algoritmo Simplex aparece uma SBA degenerada. Podem acontecer duas situações:

- O algoritmo Simplex pode *entrar em ciclo* (“*cycling*”), podendo repetir a mesma sequência de iterações, nunca atingindo a solução ótima.
- O algoritmo Simplex consegue continuar até atingir uma solução ótima. Neste caso diz-se que a solução é temporariamente degenerada.



Solução temporariamente degenerada. Exemplo gráfico.

Feasible Region in Decision Space

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

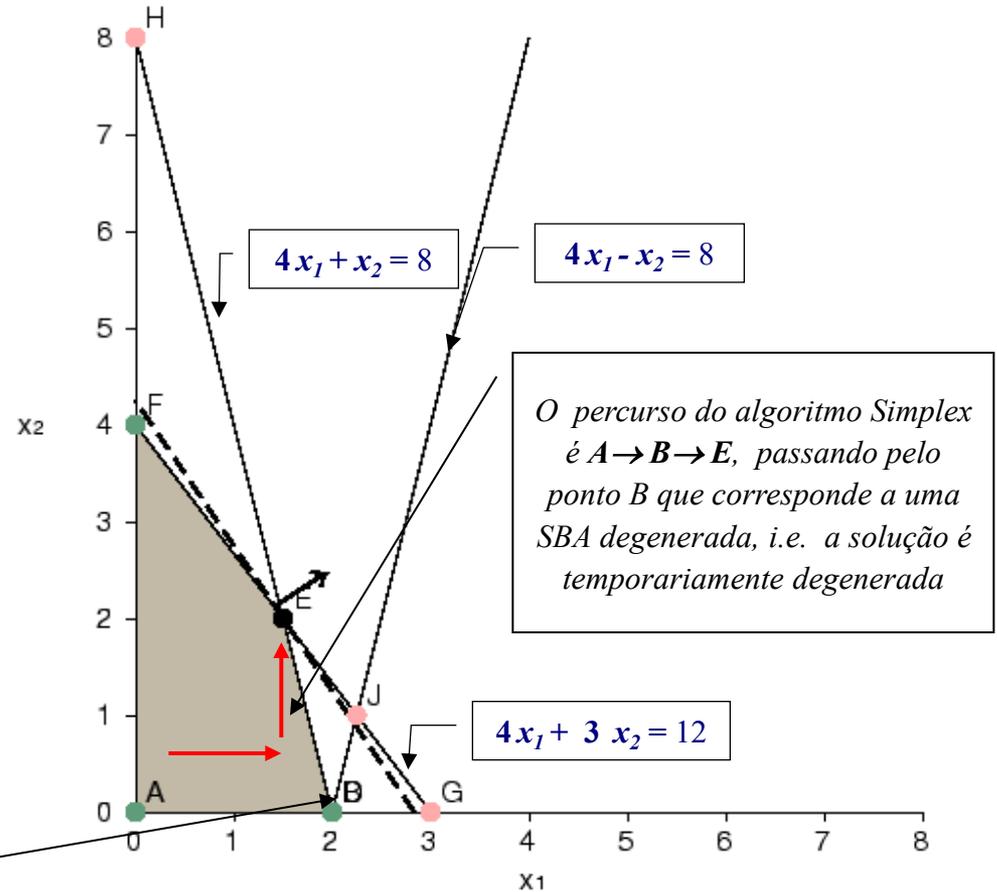
sujeito a

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



O percurso do algoritmo Simplex é $A \rightarrow B \rightarrow E$, passando pelo ponto B que corresponde a uma SBA degenerada, i.e. a solução é temporariamente degenerada

O ponto (2,0) é obtido como intersecção de 3 rectas:
 $4x_1 + x_2 = 8$, $4x_1 - x_2 = 8$, $x_2 = 0$
e corresponde a uma SBA degenerada

- optimal solution
- feasible extreme points
- infeasible extreme points



Técnicas para tratar a degenerescência.

- Para evitar a entrada em ciclo do Simplex pode ser utilizada uma das seguintes técnicas:
 - Técnica de perturbação:
“perturbando” ligeiramente o vector dos termos independentes condicionando a escolha dos índices da linha pivotal.
 - Regra de Bland:
condiciona a escolha dos índices da coluna e linha pivotal.
- A regra de Bland é mais elegante do que a técnica de perturbação, mas, computacionalmente menos eficiente.



Degenerescência. Técnica de perturbação.

Foi introduzida por Charnes, 1952, e é equivalente à outra regra: a regra lexicográfica apresentada por Dantzig, Orden and Wolfe em 1955

Suponha-se que a matriz básica inicial (matriz identidade) ocupa as m primeiras colunas do quadro.

1º. Calcular:

$$\theta = \theta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{im+1}} \mid x_{im+1} > 0 \right\}$$

Suponha-se que existe empate nos índices s, \dots, q (correspondentes às linhas do quadro)

$$\min_{i=s \dots q} \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sr}} = \dots = \frac{x_{q0}}{x_{qr}}$$

em lugar de calcular os quocientes entre os termos independentes, calcular entre as componentes com índice 1 nas colunas correspondentes

2º. Calcular:

$$\min_{i=s \dots q} \left\{ \frac{x_{i1}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 \right\}$$

Suponha-se que ainda existe empate nestes novos quocientes

$$\min_{i=s \dots q} \left\{ \frac{x_{i1}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s1}}{x_{sr}} = \dots = \frac{x_{q1}}{x_{qr}}$$



Degenerescência. Técnica de perturbação.

em lugar de calcular os quocientes entre os termos independentes, calcular entre as componentes com índice 2 nas colunas correspondentes

3º. Calcular::

$$\min_{i=s\dots q} \left\{ \frac{x_{i2}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \min_{i=s\dots q} \left\{ \frac{x_{i2}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 \right\} = \frac{x_{s2}}{x_{sr}} = \dots = \frac{x_{q2}}{x_{qr}}$$

Se o empate ainda persistir, repetir o processo com

$$\min_{i=s\dots q} \left\{ \frac{x_{ij}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0 : j = 2, 3, \dots, m \right\}$$

este processo garante o desempate.



Técnica de Perturbação . Exemplo.

Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$
 sujeito a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para aplicar a técnica de perturbação a matriz identidade deve ocupar as primeiras colunas do quadro

C_j	0	0	3	9	<i>mínimos empatados</i>		
C_B	X_B	x_3	x_4	x_1	x_2	\bar{b}	$8/4 = 2$
0	x_3	1	0	1	4	8	$8/4 = 2$
0	x_4	0	1	1	2	4	$4/2 = 2$
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	0	0	3	9		

recalcular quocientes:

1/4 em lugar
de $8/4 = 2$

0/2 em lugar
de $4/2 = 2$

Como existe empate nos mínimos dos quocientes para lograr um desempate é preciso “perturbar” os termos independentes. i.e., em lugar de calcular os quocientes entre os termos independentes, calcular entre as componentes da linha 1 nas colunas das variáveis onde existe o empate (neste caso : x_3 e x_4) : $\min (1/4, 0/2) = 0$ em lugar de $\min (8/4, 4/2) = 2$.
 Como existe agora um desempate a variável a sair da base é x_4



Degenerescência. Regra de Bland.

Foi introduzida
por Bland em
1977

1°. Escolher a coluna para entrar a base:
aquela que tem menor índice j que verifica $(c_j - z_j) > 0$

2°. Regra do quociente mínimo:

$$\theta = \theta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{im+1}} \mid x_{im+1} > 0 \right\}$$

Se existir empate, escolher entre os quocientes que dão origem ao empate aquele com menor índice .