



# Optimização

## Aula 15



# Programação Linear (PL)

## Aula 15. Dualidade

### Interpretação económica.

- Problema dual: preços sombra e perdas de oportunidade.
- Propriedade dos desvios complementares



## Dualidade

A cada problema primal de programação linear está associado um problema dual.

O valor óptimo do primal = valor óptimo do dual (Teorema da Dualidade Forte).

O dual pode ser interpretado como um mercado paralelo onde se atribuem preços aos recursos limitados.

Importância:

Facilita a análise económica.

Permite compreender melhor o impacto das restrições.



## Interpretação Económica

Primal → representa decisões operacionais: quanto produzir, que recursos usar, como alocar.

Dual → representa a avaliação económica dos recursos: preços sombra, valor marginal.

Interpretação prática:

- O primal dá planos de acção.

- O dual mostra quanto valem os recursos para suportar esse plano.

Assim, o dual responde à pergunta: “Qual o valor de uma unidade adicional de recurso?”



## Preços Sombra

Definição: variação no valor óptimo da função objectivo quando o lado direito de uma restrição aumenta em uma unidade.

Se a restrição é limitante (sem folga)  $\rightarrow$  preço sombra positivo.

Se a restrição tem folga  $\rightarrow$  preço sombra = 0.

Exemplos:

Se a mão-de-obra extra aumenta o lucro em 1500 Mt, o preço sombra da restrição da mão-de-obra é 1500 Mt/hora.

Se uma máquina não está totalmente utilizada, o preço sombra da sua restrição é 0.



## Perdas de Oportunidade

Também conhecidas como custos reduzidos (reduced costs).

Mostram o quanto o coeficiente de uma variável teria de melhorar para justificar a sua entrada na solução óptima.

Se uma variável não está na solução ( $x=0$ ):

- Perda de oportunidade positiva  $\rightarrow$  essa actividade não é rentável nas condições actuais.
- Ex.: Para uma linha de produto, o custo reduzido = 5 significa que o lucro unitário teria de aumentar em 5 Mt para ser viável.

**Relevância:** ajudam a identificar actividades que não compensam incluir na estratégia actual.



# Formulação do Problema de PL em termos de Actividades. Exemplo Protótipo.

Actividade Principal  
 $P_1$  produção de portas por minuto

Actividade Auxiliar  
 $P_3$  não utilização da capacidade de produção da Secção 1 por minuto

Actividade Auxiliar  
 $P_5$  não utilização da capacidade de produção da Secção 3 por minuto

Actividade Auxiliar  
 $P_4$  não utilização da capacidade de produção da Secção 2 por minuto

Maximizar  $Z=3x_1+ 5 x_2$

sujeito a

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Actividade Principal  
 $P_2$  produção de janelas por minuto

As variáveis  $x_j$  correspondem aos níveis das actividades



# Exemplo Protótipo. Problema Primal. Interpretação Económica das Variáveis.

## • variáveis de decisão:

- $x_1$  - nível de produção de portas por minuto;
- $x_2$  - nível de produção de janelas por minuto;

*unidade de medida: unidade física*

## • variáveis de folga:

- $x_3$  - capacidade de produção não utilizada na 1ª secção, por minuto;
- $x_4$  - capacidade de produção não utilizada na 2ª secção, por minuto;
- $x_5$  - capacidade de produção não utilizada na 3ª secção, por minuto;

*unidade de medida: unidade física*

## • função objectivo → max:

Maximizar o lucro total por minuto.

*unidade de medida: unidade monetária (Meticais)*



## Interpretação Económica do Problema Dual. Preços Sombras.

*o valor da f.o. traduz o valor total atribuído aos recursos*

*minimizar*  $w = 4 y_1 + 12 y_2 + 18 y_3$

*As variáveis de decisão duais*

$$y_1, y_2, y_3$$

*são valorizações unitárias a atribuir a cada recurso e podem ser interpretadas como a contribuição ao lucro total por cada unidade de recurso  $i$  utilizada.*

*Estes são **preços internos**, também designados como **preços sombra***

$$y_1 + 3 y_3 \geq 3$$

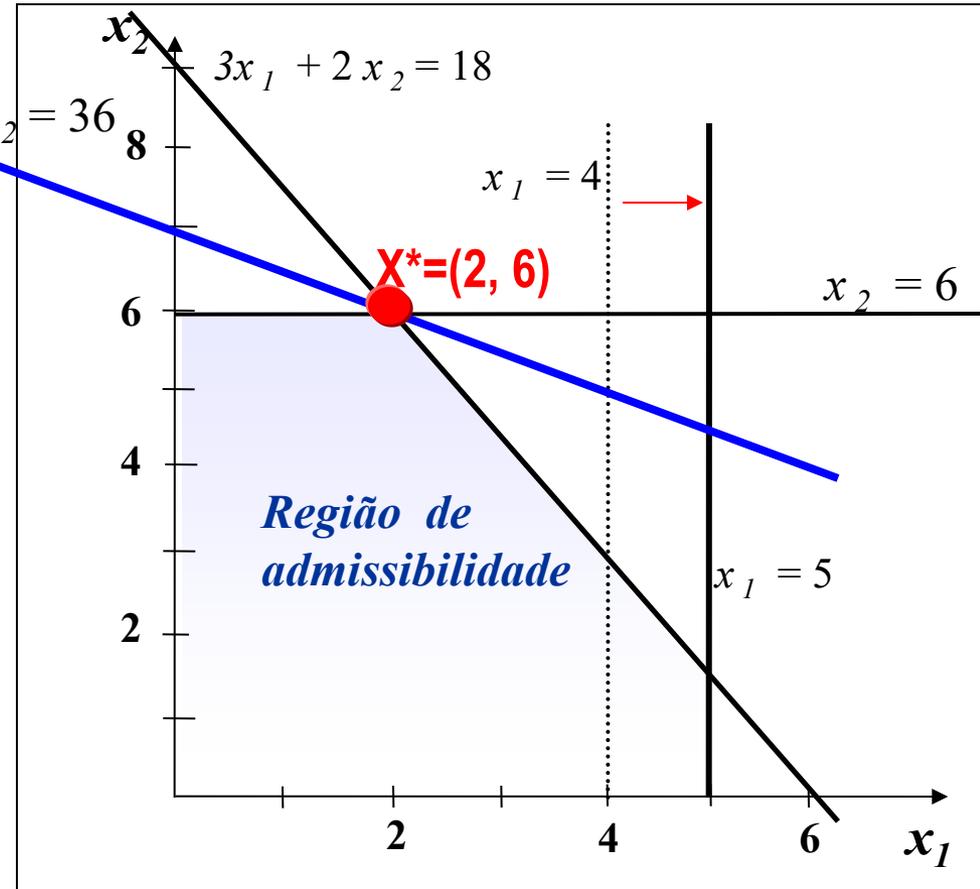
$$2 y_2 + 2 y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



## Exemplo Protótipo: Recurso 1. Preços Sombras. Representação Gráfica.

$y_1^* = 0$   
*Se incrementar a capacidade de produção da Secção 1 em 1 unidade ( $b_1 = 5$ ) o valor óptimo ( $z^*=36$ ) não muda. Este recurso é abundante ("grátis")*





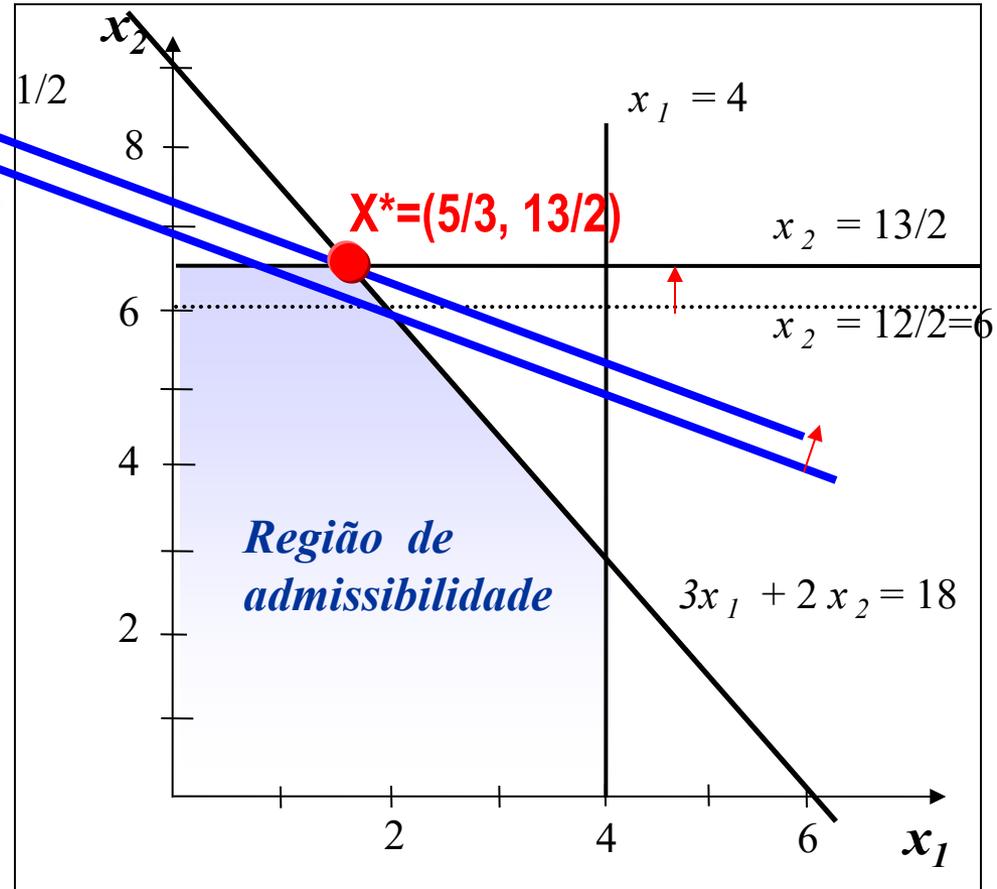
## Exemplo Protótipo: Recurso 2. Preços Sombras. Representação Gráfica.

$$z^* = 3x_1 + 5x_2 = 37 \frac{1}{2}$$

$$z^* = 3x_1 + 5x_2 = 36$$

$$y_2^* = 3/2$$

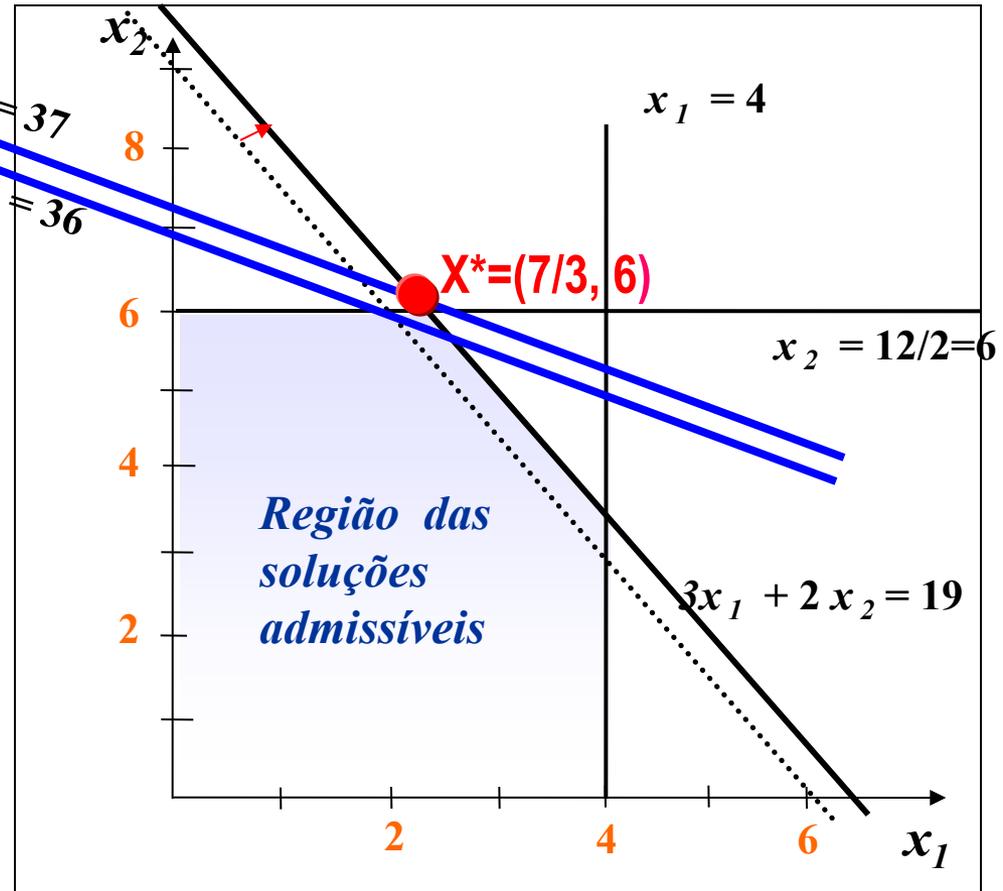
*Se incrementar a capacidade de produção da Secção 2 em 1 unidade ( $b_2 = 13$ ) o valor óptimo será incrementado em  $3/2$  mil Mt ( $z^* = 37 \frac{1}{2}$ ). Este recurso é escasso.*





## Exemplo Protótipo. Recurso 3. Preços Sombras. Representação Gráfica.

$y_3^* = 1$   
Se incrementar a  
capacidade de produção da  
Secção 3  
em 1 unidade  
( $b_3 = 19$ ) o valor  
óptimo será incrementado  
em 1 unidade  
( $z^* = 37$  ).  
Este recurso é escasso.





## Restrições Funcionais Duais. Interpretação Económica.

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

esta restrição significa que a valorização interna atribuída aos recursos gastos na produção de uma porta não deve ser inferior ao seu respectivo lucro unitário: 3 Unidades

Se  $y_1$  e  $y_3$  são os *preços sombra* em U.M. (“*custo*”, *valorização interna*), dos recursos 1 e 3 respectivamente, e sabendo que *a produção de uma porta gasta 1 unidade* de produção da Secção 1 e *3 unidades* de produção da Secção 3 então a expressão  $y_1 + 3y_3$  pode ser interpretada como *a valorização interna (“custo interno”) em U.M. atribuída aos recursos gastos para produzir uma porta.*

Como **3 U.M.** é o lucro unitário dum porta, é evidente que *no plano óptimo* se a produção dum porta está activada até um nível positivo é porque

se verifica a igualdade (equilíbrio), i.e. “*custo interno = lucro*”.

Caso contrário se o “*custo interno > lucro*” não é *economicamente rentável* activar esta actividade, i.e., *não se produziriam portas.*



## Restrições Funcionais Duais. Interpretação Económica.

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

esta restrição significa que a valorização interna atribuída aos recursos gastos na produção de uma janela não deve ser inferior ao seu respectivo lucro unitário: 5 U.M.,

Se  $y_2$  e  $y_3$  são os *preços sombra* em U.M. (“*custo*”, *valorização interna*), dos recursos 2 e 3 respectivamente, e sabendo que *a produção de uma janela gasta 2 unidades* de produção da Secção 2 e *2 unidades* de produção da Secção 3 então a expressão  $2y_2 + 2y_3$  pode ser interpretada como *a valorização interna (“custo interno”) em U.M. atribuída aos recursos gastos para produzir uma janela.*

Como 5 U.M. é o lucro unitário dum janela, é evidente que *no plano óptimo* se a produção dum janela está activada até um nível positivo é porque

se verifica a igualdade (equilíbrio), i.e. “*custo interno = lucro*”.

Caso contrário se o “*custo interno > lucro*” não é *economicamente rentável* activar esta actividade, i.e., *não se produziriam janelas.*



## Restrições Duais de Não Negatividade. Interpretação Económica.

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

estas restrições significam que a valorização unitária (preço sombra, “custo” interno) dos recursos deve ser não negativa, caso contrário, a utilização deste recurso não seria rentável, pelo que seria melhor não utilizar este recurso no absoluto.



## Variáveis de Folga Duais. Interpretação Económica

$$y_4 = y_1 + 3y_3 - 3$$

a variável de folga  $y_4$  representa a perda de oportunidade da produção de uma porta, i.e., a diferença entre a valorização interna atribuída aos recursos gastos (“custo interno”) na fabricação dum porta e o seu lucro unitário.

Se *a variável de folga é positiva* significa que “custo interno > lucro” pelo que não é *economicamente rentável* activar esta actividade, i.e., *há perda de oportunidade da produção dum porta*, caso contrário se *a variável de folga é nula*, a restrição é de igualdade, i.e., “custo interno = lucro” pelo que é *economicamente rentável* activar esta actividade e *a perda de oportunidade é nula*.



## Variáveis de Folga Duais. Interpretação Económica.

$$y_5 = 2y_2 + 2y_3 - 5$$

*a variável de folga  $y_5$  representa a perda de oportunidade da produção de uma janela, i.e., a diferença entre a valorização interna atribuída aos recursos gastos na fabricação duma janela e o seu lucro unitário.*

Se *a variável de folga é positiva* significa que **“custo interno > lucro”** pelo que não é *economicamente rentável* activar esta actividade, i.e., *há perda de oportunidade da produção duma janela*, caso contrário se *a variável de folga é nula*, a restrição é de igualdade, i.e., **“custo interno = lucro”** pelo que é *economicamente rentável* activar esta actividade e *a perda de oportunidade é nula*.



# Exemplo Protótipo. Variáveis de Decisão Duais.

## Interpretação Económica: Preços Sombras.

**Primal:**  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

$z^* = w^* = 36$

**Dual:**  $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

$y_1^* = 0$

*Se incrementarmos a capacidade de produção da Secção 1 em 1 unidade, o valor da f.o. (lucro) não é alterado.*

$y_2^* = 3/2$

*Se incrementarmos a capacidade de produção da Secção 2 em 1 unidade, o valor da f.o. (lucro) é incrementado em 3/2 de U.M.*

$y_3^* = 1$

*Se incrementarmos a capacidade de produção da Secção 3 em 1 unidade, o valor da f.o. (lucro) é incrementado em 1 U.M.*



## Exemplo Protótipo. Variáveis de Folga Duais.

Interpretação Económica: Perda de oportunidade

**Primal:**  $X^*=(2,6,2,0,0)$

$z^* = w^* = 36$

**Dual:**  $Y^*=(0,3/2,1,0,0)$

$$y_4^* = 0$$

*A perda de oportunidade da produção de uma porta por minuto é **nula**, obviamente se fosse positiva não eram produzidas portas*

$$y_5^* = 0$$

*A perda de oportunidade da produção de uma janela por minuto é **nula**, obviamente se fosse positiva não eram produzidas janelas*



# Exemplo Protótipo. Problema Dual. Interpretação Económica das Variáveis.

## • variáveis de decisão:

- $y_1$  - preço sombra da capacidade de produção da Secção 1
- $y_2$  - preço sombra da capacidade de produção da Secção 2
- $y_3$  - preço sombra da capacidade de produção da Secção 3

• *unidade de medida: unidade monetária (Meticais)*

## • variáveis de folga:

- $y_4$  - perda de oportunidade da produção dum porta
- $y_5$  - perda de oportunidade da produção dum janela

• *unidade de medida: unidade monetária (Meticais)*

## • função objectivo → min:

Minimizar a valorização interna total dos recursos gastos pelas actividades

• *unidade de medida: unidade monetária (Meticais)*



# Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica.

1°. Se a variável de decisão do primal é *positiva* então a variável de folga correspondente do dual é *nula*.

*pela propriedade de desvios complementares*

$$x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad y_{m+j}^* = 0$$

$$x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \dots + a_{mj}y_m^* = c_j$$

*Se interpretar a valorização interna atribuída aos recursos gastos numa actividade como um “custo interno”, esta restrição significa que “custo=lucro”, pelo que é rentável que esta actividade esteja activada a um nível positivo.*

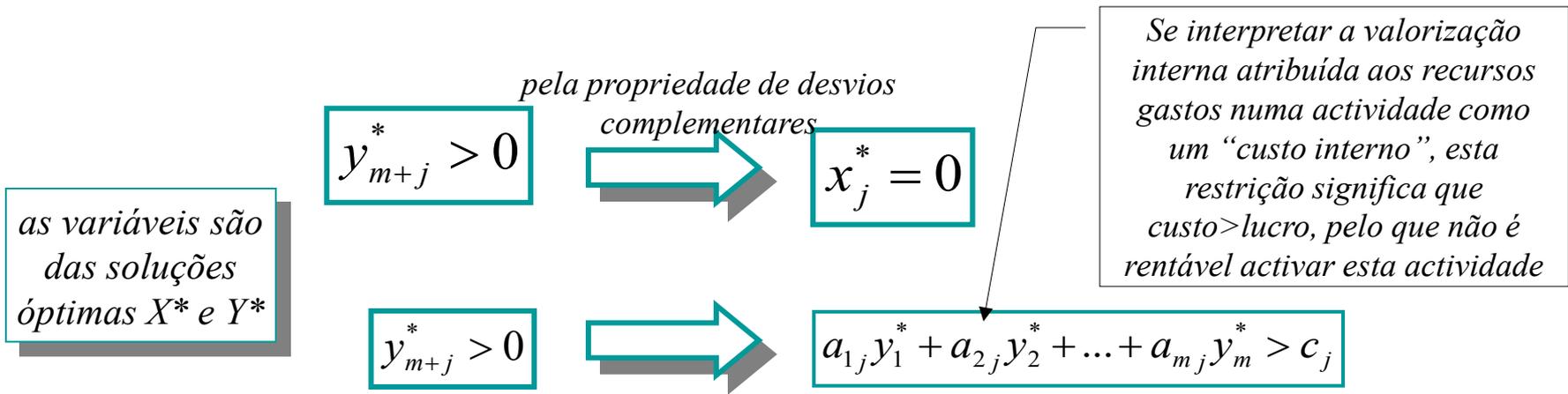
*as variáveis são das soluções óptimas  $X^*$  e  $Y^*$*

Sempre que uma actividade  $j$  seja activada a um nível estritamente positivo, a valorização interna atribuída aos recursos que utiliza ***deve ser igual*** ao lucro unitário que se obtém dessa actividade, i.e., a perda de oportunidade para esta actividade é nula



## Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica.

2º. Se a variável de folga do dual é *positiva* então a variável de decisão correspondente do primal é *nula*.

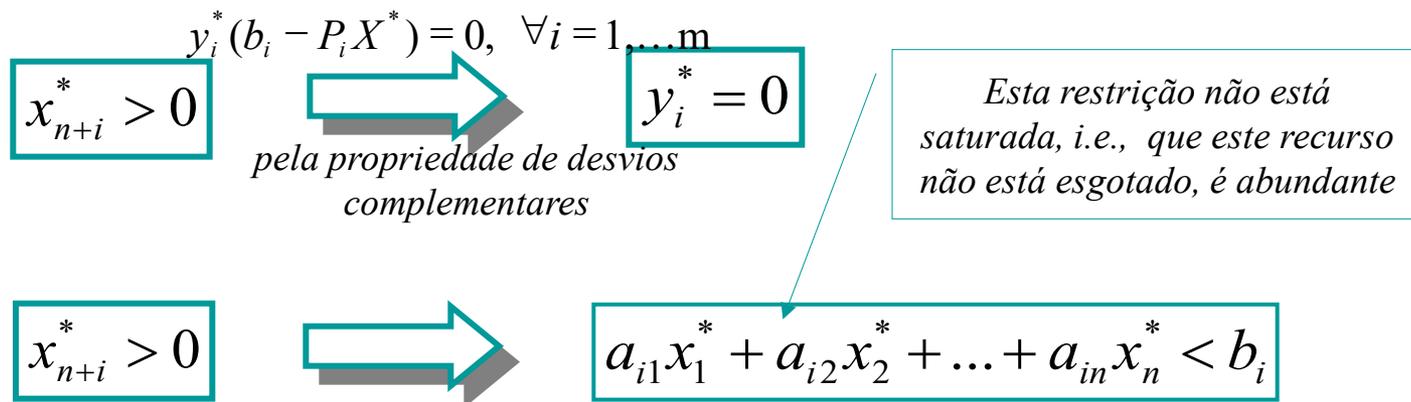


Se a valorização interna atribuída aos recursos gastos numa actividade  $j$  é **maior do que** o seu lucro unitário, então com a activação dessa actividade não se está a fazer uma utilização óptima destes recursos, i.e., essa actividade não é rentável pelo que não deve ser activada.



## Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica.

3°. Se a variável de folga do primal é *positiva* então a variável de decisão do dual é *nula*.

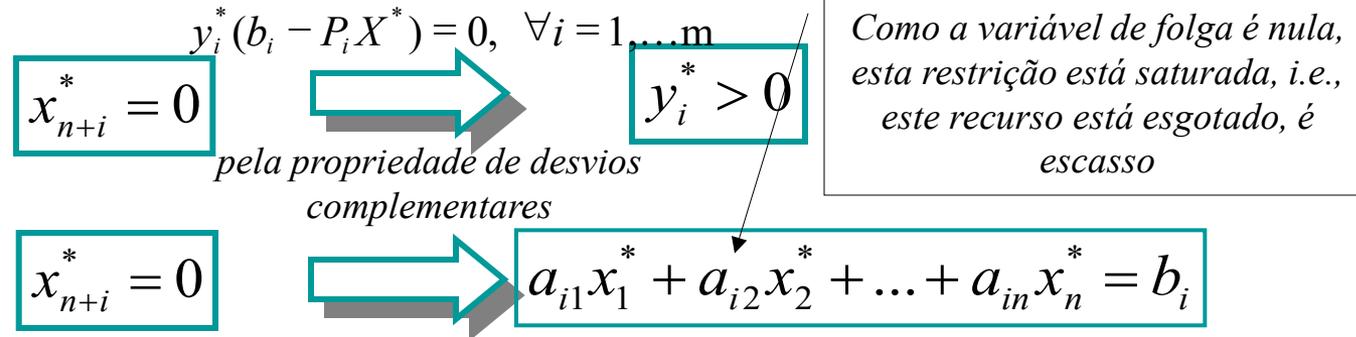


Se a capacidade não utilizada do recurso  $i$  é positiva, então a valorização interna (preço sombra) deste recurso é **nula**, i.e., este **recurso é abundante** ("mercadoria grátis"), o preço das mercadorias que estão em excesso, deve cair até zero por lei da oferta-procura.



## Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica.

4°. Se a variável de folga do primal é *nula* então a variável de decisão do dual é *positiva*.



Se a capacidade não utilizada do recurso  $i$  é nula, então a valorização interna (preço sombra) deste recurso é positiva, i.e., este **recurso é escasso** ("não há sobras"). Por cada unidade extra que seja incrementado este recurso  $i$ , obtém-se um incremento de  $y_i^*$  na f.o. (lucro total).



# Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica. Exemplo Protótipo.

**Primal:**  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

**Dual:**  $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

variáveis de decisão

variáveis de folga

$x_1 = 2$

$y_4 = 0$

$x_2 = 6$

$y_5 = 0$

variáveis de folga

variáveis de decisão

$x_3 = 2$

$y_1 = 0$

$x_4 = 0$

$y_2 = 3/2$

$x_5 = 0$

$y_3 = 1$

os produtos das variáveis de decisão do primal pelas correspondentes variáveis de folga do dual são nulos

os produtos das variáveis de decisão do dual pelas correspondentes variáveis de folga do primal são nulos



# Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica. Exemplo Protótipo.

**Primal:**  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

**Dual:**  $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

$$x_1^* \cdot y_4^* = 0$$

$$2 \cdot 0 = 0$$

*Devem ser produzidas 2 portas por minuto,  
sendo a valorização interna dos recursos gastos  
na fabricação de uma porta igual ao seu lucro unitário,  
pelo que é rentável produzir 2 portas ,i.e.,  
a perda de oportunidade é nula.  
Caso a perda de oportunidade fosse positiva,  
logicamente não se produziriam portas.*



# Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica. Exemplo Protótipo.

**Primal:**  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

**Dual:**  $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

$$x_2^* \cdot y_5^* = 0$$

$$6 \cdot 0 = 0$$

*Devem ser produzidas 6 janelas por minuto, sendo a valorização interna dos recursos gastos na fabricação de uma janela igual ao seu lucro unitário, pelo que é rentável produzir 6 janelas ,i.e., a perda de oportunidade é nula. Caso a perda de oportunidade fosse positiva, logicamente não se produziriam janelas.*



## Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica. Exemplo Protótipo.

**Primal:**  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

**Dual:**  $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

$$x_3^* \cdot y_1^* = 0$$

$$2 \cdot 0 = 0$$

*A valorização interna (preço sombra)  
da capacidade de produção da Secção 1 por minuto é nula, pelo facto deste ser  
um **recurso abundante**,  
do qual sobram 2 unidades da capacidade de produção.  
( a capacidade de produção não utilizada da Secção 1  
é igual a 2 unidades )*



# Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica. Exemplo Protótipo.

**Primal:**  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

**Dual:**  $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

$x_4^* \cdot y_2^* = 0$

$0 \cdot 3/2 = 0$

*A valorização interna (preço sombra) da capacidade de produção da Secção 2 por minuto é positiva (igual a 3/2), pelo facto, deste ser um **recurso escasso**, do qual não há sobras.*

*( a capacidade de produção da Secção 2 está esgotada )*

*A eventual disponibilidade adicional de 1 unidade da capacidade de produção na Secção 2 por minuto possibilitaria um incremento de 3/2 U.M. no valor do lucro total*



# Propriedade dos Desvios Complementares. Interpretação Económica. Exemplo Protótipo.

**Primal:**  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

**Dual:**  $Y^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

$$x_5^* \cdot y_3^* = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

*A valorização interna (preço sombra) da capacidade de produção da Secção 3 por minuto é positiva (igual a 1), pelo facto, deste ser um recurso **escasso**, do qual não há sobras.*

*( a capacidade de produção da Secção 3 está esgotada )*

*A eventual disponibilidade adicional de 1 unidade da capacidade de produção na Secção 3 por minuto possibilitaria um incremento de 1 U.M. no valor do lucro total*



# Par de problemas Primal - Dual. Interpretação Económica.

## Problema Primal

## Problema Dual

*unidades físicas*

*unidades monetárias*

**m recursos**

as variáveis de folga primais  
representam a capacidade não  
utilizada dos recursos

as variáveis de decisão duais  
representam os preços  
sombras dos recursos

**n actividades**

as variáveis de decisão primais  
representam os níveis das  
actividades

as variáveis de folga duais  
representam a perda de  
oportunidade das actividades

**f.o.**

lucro total das actividades →  
*maximizar*

valorização interna total dos  
recursos gastos pelas  
actividades → *minimizar*