



# Optimização

## Aula 17



# Programação Linear (PL)

## Aula 17: Análise pós-optimal

- Alterações discretas nos termos independentes.
- Alterações discretas nos coeficientes da função objectivo.



## O que é Análise Pós-Optimal?

Processo realizado após encontrar a solução óptima em Programação Linear.

**Objectivo:** avaliar a estabilidade da solução face a variações nos parâmetros do modelo.

**Permite responder a perguntas como:**

- Até que ponto a solução óptima se mantém válida?
- Quais são os limites de alteração dos dados sem comprometer a optimalidade?

**Importância prática:**

- Apoia a tomada de decisão em ambientes incertos;
- Reduz riscos associados a mudanças inesperadas (mercado, recursos, custos).



## Impacto nas Restrições do Modelo

Alterações discretas → modificações não contínuas e de magnitude significativa que afectam o lado direito das restrições (termos independentes).

### Exemplos práticos:

- Redução no fornecimento de matérias-primas;
- Aumento da disponibilidade de horas de trabalho;
- Alterações em limites de capacidade (armazenamento, transporte).

### Questões fundamentais:

- A solução óptima continua viável?
- Há necessidade de reoptimização?
- Como quantificar o impacto no valor óptimo?



## Impacto na Função Objectivo

Relacionam-se com os pesos ou ganhos associados às variáveis.

Exemplo: alteração de custos unitários, preços de venda, margens de lucro.

### Efeitos típicos:

- Reordenação das prioridades na alocação de recursos;
- Alteração da variável que entra ou sai da base óptima;
- Alteração do valor óptimo obtido.

### Perguntas a analisar:

- Existe alteração na estrutura da solução óptima?
- Quais os novos limites de validade para os coeficientes?
- Que implicações práticas isso traz na decisão?



## Alteração dos termos independentes.

Um termo independente  $b_k$  sofre um acréscimo (ou decréscimo), mantendo-se inalterados todos os restantes parâmetros do modelo.

⇒  $\exists k, k=1, \dots, m$  tal que  $b_k \rightarrow b_k + \Delta b_k, \Delta b_k \neq 0$

⇒ no quadro óptimo simplex fica alterada apenas a coluna  $b$

⇒ 
$$X_B^* \rightarrow B^{-1}b + B^{-1}\Delta_k b = X_B^* + B^{-1}\Delta_k b, \\ \Delta_k b = (0, \dots, 0, \Delta b_k, 0, \dots, 0)$$

⇒ se  $X_B^* + B^{-1}\Delta_k b \geq 0$ , então a nova solução mantém a admissibilidade, logo também é óptima, e  $z^* \rightarrow z^* + y_k^* \Delta b_k$ .

⇒ caso contrário, aplica-se o algoritmo dual simplex, uma vez que a solução é primal não admissível e os custos reduzidos mantêm-se não positivos.



# Alteração dos termos independentes. Exemplo protótipo

Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se a capacidade de produção da *Secção 2* passa de 12 para 24 unidades:  $b_2 \rightarrow b_2 + 12$

$$X_B^* \rightarrow X_B^* + B^{-1}\Delta b, \Delta b=(0,12,0)$$

$$X_B^* + B^{-1} \Delta b = \text{nova}$$

$$\begin{bmatrix} X_B^* \\ \mathbf{b} \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

<0

B<sup>-1</sup>

**Quadro óptimo**

		$C_j$					
		3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	$Z_j$	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$C_j - Z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

Como a nova solução é primal não admissível e dual admissível (as linhas dos custos reduzidos não sofreram alteração) então pode ser aplicado o algoritmo dual simplex para atingir uma solução óptima admissível.



## Alteração dos termos independentes. Exemplo gráfico.

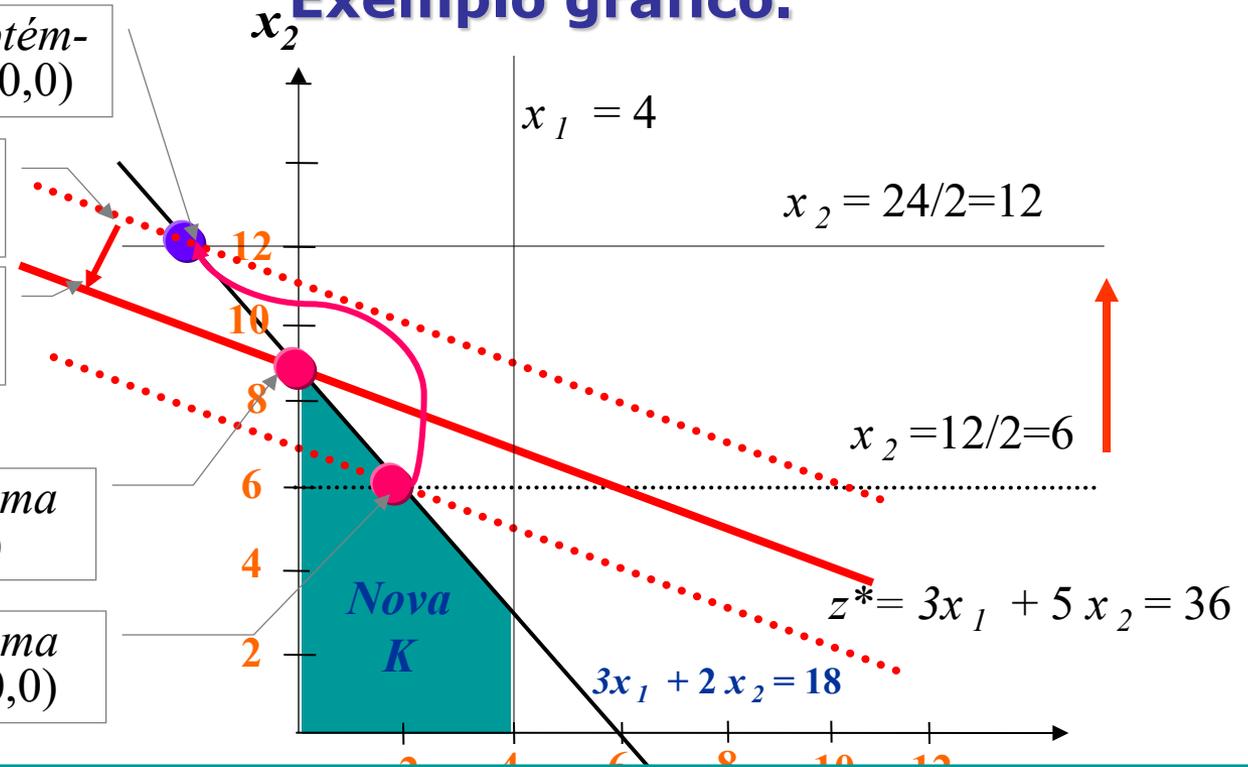
Alterando a restrição 2 obtém-se a SBNA  $X = (-2, 12, 6, 0, 0)$

super-óptima  
 $z^* = 3x_1 + 5x_2 = 54$

óptima  
 $z = 3x_1 + 5x_2 = 45$

Nova solução óptima  
 $X^* = (0, 9, 4, 6, 0)$

Solução óptima  
 $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$



Ao ser incrementada a capacidade de produção da secção 2 em 12 unid., obtém-se uma nova solução super-óptima,  $X = (-2, 12, 6, 0, 0)$ , primal não admissível.

Neste caso, pode-se aplicar o algoritmo dual simplex para atingir uma solução primal admissível, logo óptima.

A solução  $X^* = (0, 9, 4, 6, 0)$  é a nova solução óptima com um valor óptimo de 45 U.M..



# Alteração dos termos independentes. Algoritmo Dual Simplex

$$X^* = (0, 9, 4, 6, 0)$$

$$Y^* = (0, 0, 5/2, 9/2, 0)$$

$$x_1 \cdot y_3 = 0 \times 9/2 = 0$$

$$x_3 \cdot y_1 = 4 \times 0 = 0$$

$$x_2 \cdot y_4 = 9 \times 0 = 0$$

$$x_4 \cdot y_2 = 6 \times 0 = 0$$

$$x_5 \cdot y_3 = 0 \times 5/2 = 0$$

	$C_j$	3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	0	0	1	1/3	-1/3	6
5	$x_2$	0	1	0	1/2	0	12
3	$x_1$	1	0	0	-1/3	1/3	-2
	$Z_j$	3	5	0	3/2	1	54
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-3/2	-1	
0	$x_3$	1	0	1	0	0	4
5	$x_2$	3/2	1	0	0	1/2	9
0	$x_4$	-3	0	0	1	-1	6
	$Z_j$	15/2	5	0	0	5/2	45
	$C_j - Z_j$	-9/2	0	0	0	-5/2	



## Alteração dos termos independentes. Interpretação económica.

### Plano óptimo antes do incremento

$$\mathbf{X}^* = (2, 6, 2, 0, 0), \quad z^* = 36$$
$$\mathbf{Y}^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$$

A capacidade de produção  
da secção 2  
passa de 12 para 24 unidades

### Plano óptimo depois do incremento

$$\mathbf{X}^* = (0, 9, 4, 6, 0), \quad z^* = 45$$
$$\mathbf{Y}^* = (0, 0, 5/2, 9/2, 0)$$

#### • Referente à produção:

Ao incrementar a capacidade de produção da secção 2 de 12 para 24 unidades por minuto, o novo plano óptimo:

- não contempla a produção de portas  
*a perda de oportunidade da produção dum porta é igual a 4.5 U.M (y<sub>4</sub>=9/2)*
- serão produzidas 9 janelas por minuto  
*evidentemente a perda de oportunidade da produção dum janela é nula (y<sub>5</sub>=0)*

• **Economicamente é vantajoso este incremento da capacidade de produção da secção 2 em 12 unidades por minuto, pois obtém-se um incremento de 9 U.M. no lucro total (45 = 36 + 9).**



# Alteração dos termos independentes. Interpretação económica

## Plano óptimo antes do incremento

$$\mathbf{X}^* = (2, 6, 2, 0, 0), \quad z^* = 36$$
$$\mathbf{Y}^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$$

A capacidade de produção  
da secção 2  
passa de 12 para 24 unidades

## Plano óptimo depois do incremento

$$\mathbf{X}^* = (0, 9, 4, 6, 0), \quad z^* = 45$$
$$\mathbf{Y}^* = (0, 0, 5/2, 9/2, 0)$$

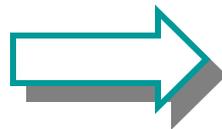
### • Referente aos recursos:

- O recurso 1 continua sendo um *recurso abundante* pelo que o seu preço sombra mantém-se nulo ( $x_3=4, y_1=0$ ).  
*Como o novo plano não inclui a produção de portas, a capacidade de produção não utilizada da secção 1 é igual ao seu valor máximo disponível ( $x_3=4$ ).*
- O recurso 2 passa de *recurso escasso* para *recurso abundante* pelo que o seu preço sombra é agora nulo ( $x_4=6, y_2=0$ ).  
*No novo plano sobram 6 unidades do recurso 2, e o seu preço sombra cai de 3/2 até zero ( $y_2=3/2 \rightarrow y_2=0$ ).*
- O recurso 3 continua sendo um *recurso escasso* e o seu preço sombra aumenta de 1 para 2,5 U.M. ( $x_5=0, y_3=5/2$ ).  
*Como a capacidade de produção da secção 3 é a única que fica esgotada, sendo utilizada ao seu nível máximo disponível para a produção das 9 janelas ( $3 \cdot 0 + 2 \cdot 9 = 18$ ), o seu preço sombra é positivo e igual a 2,5 U.M.*  
O lucro total  $z^* = c_2 x_2 = 5 \cdot 9 = 45$  U.M.  $= b_3 y_3 = 18 \cdot 2,5 = w^*$

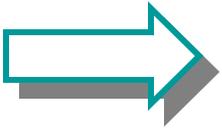


## Alteração dos coeficientes da função objectivo

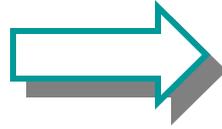
Um coeficiente  $c_l$  sofre um acréscimo ( ou decréscimo),  
mantendo-se todos os restantes parâmetros do modelo inalterados.



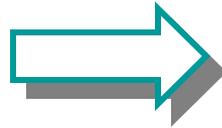
$\exists l, l=1, \dots, n$  tal que  $c_l \rightarrow c_l + \Delta c_l, \Delta c_l \neq 0$



*no quadro óptimo simplex é alterada a linha dos custos reduzidos*



*a admissibilidade da solução primal mantém-se, mas pode deixar de ser óptima*

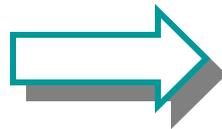


*a solução dual complementar pode deixar de ser admissível.*



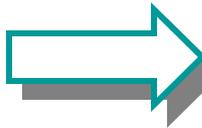
# Alteração dos coeficientes da função objectivo

Um coeficiente  $c_l$  sofre um acréscimo ( ou decrécimo),  
mantendo-se todos os restantes parâmetros do modelo inalterados.

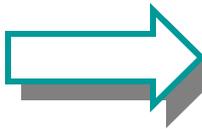


$\exists l, l=1, \dots, n$  tal que  $c_l \rightarrow c_l + \Delta c_l, \Delta c_l \neq 0$

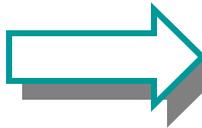
**Caso 1:** o coeficiente  $c_l$  corresponde a uma variável não básica.



fica alterado apenas o custo reduzido correspondente a esta variável não básica:  $c_l - z_l$



se  $c_l - z_l \rightarrow (c_l + \Delta c_l) - z_l \leq 0$ , a solução primal mantém a optimalidade, o valor da f.o. não fica alterado

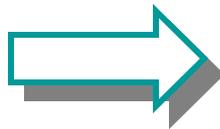


caso contrário:  $c_l - z_l \rightarrow (c_l + \Delta c_l) - z_l > 0$   
aplica-se o algoritmo primal simplex para atingir uma nova solução óptima.



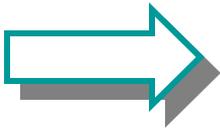
# Alteração dos coeficientes da função objectivo

Um coeficiente  $c_l$  sofre um acréscimo ( ou decréscimo),  
mantendo-se todos os restantes parâmetros do modelo inalterados.

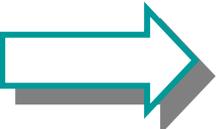


$\exists l, l=1, \dots, n$  tal que  $c_l \rightarrow c_l + \Delta c_l, \Delta c_l \neq 0$

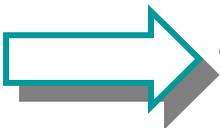
**Caso 2:** o coeficiente  $c_l$  corresponde a uma variável básica.



*todos os custos reduzidos ficam afectados (exceptuando evidentemente os correspondentes às variáveis básicas que são sempre nulos)*



*se  $\forall j: c_j - z_j \leq 0$ , então a solução primal mantém a optimalidade e o valor da f.o. fica alterado:  $z^* \rightarrow z^* + \Delta c_l x_l$*



*caso contrário:  $\exists j: c_j - z_j > 0$*

*aplica-se o algoritmo primal simplex para atingir uma nova solução óptima.*



## Alteração dos coeficientes da f.o. Exemplo protótipo

Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se o lucro unitário do produto 1 passa de 3 a 8 mil Meticais

$$c_1 \rightarrow c_1 + \Delta c_1 = 3 + 5 = 8$$

Foi alterado o lucro unitário duma variável básica

### Quadro óptimo

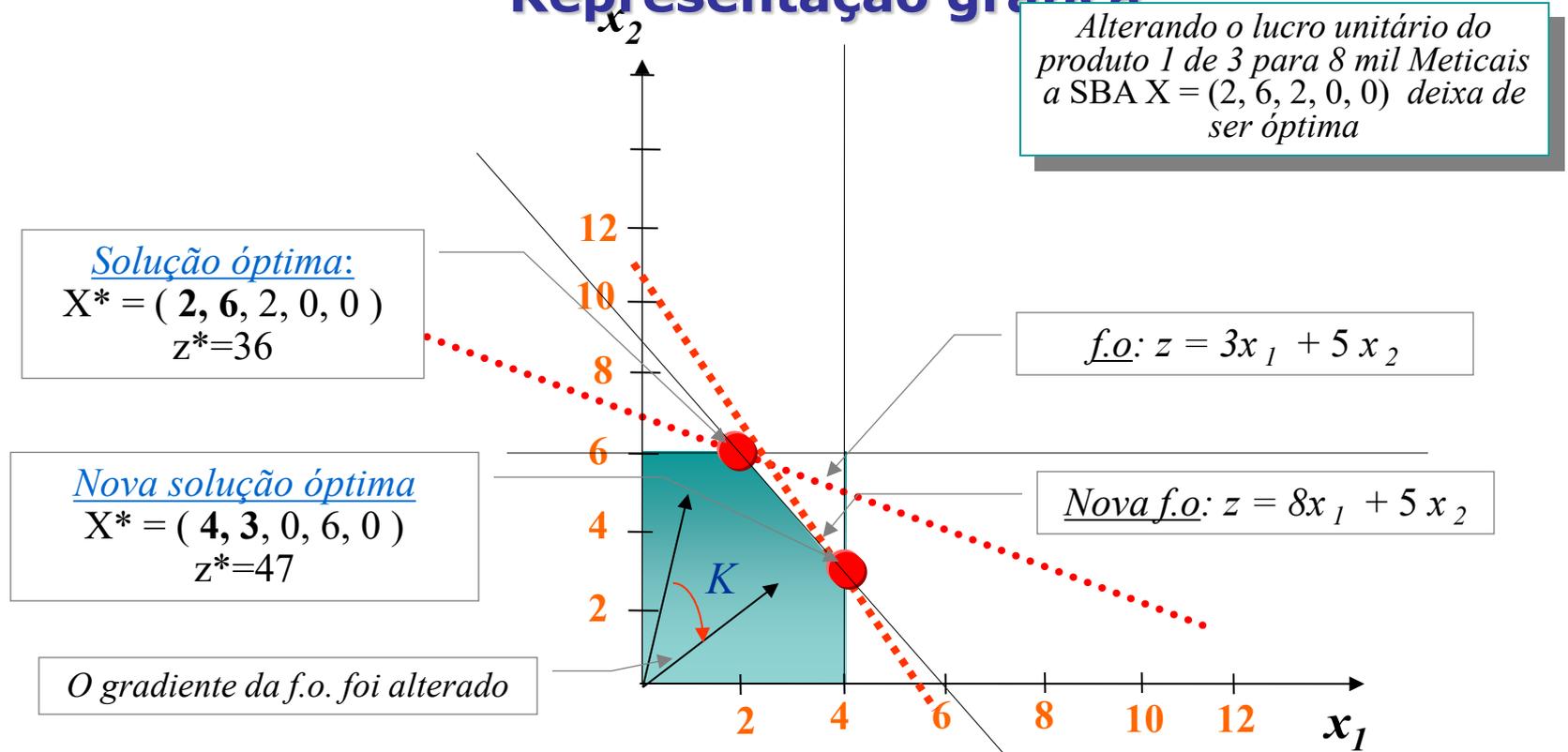
		$c_j$					
		3	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
3	$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	$z_j$	3	5	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

		$c_j$					
		8	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
5	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
8	$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	$z_j$	8	5	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{8}{3}$	46
	$c_j - z_j$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{3}$	

Como a solução deixa de ser óptima (existe um custo reduzido positivo), então pode ser aplicado o algoritmo primal simplex para determinar uma nova solução óptima.



## Alteração dos coeficientes da f.o. Representação gráfica



Ao ser alterado o gradiente da função objectivo a solução  $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$  deixa de ser óptima. Neste caso para obter a solução óptima pode-se aplicar o **algoritmo primal simplex**. A solução  $X^* = (4, 3, 0, 6, 0)$  é a nova solução óptima com um valor de 47 U.M. para o lucro total.



# Alteração dos coeficientes da f.o. Exemplo protótipo. Algoritmo Primal Simplex.

$$X^* = (4, 3, 0, 6, 0)$$

$$Y^* = (1/2, 0, 5/2, 0, 0)$$

$$x_1 \cdot y_3 = 4 \times 0 = 0$$

$$x_3 \cdot y_1 = 0 \times 1/2 = 0$$

$$x_2 \cdot y_4 = 3 \times 0 = 0$$

$$x_4 \cdot y_2 = 6 \times 0 = 0$$

$$x_5 \cdot y_3 = 0 \times 5/2 = 0$$

	$C_j$	8	5	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\bar{b}$
0	$x_3$	0	0	1	1/3	-1/3	2
5	$x_2$	0	1	0	1/2	0	6
8	$x_1$	1	0	0	-1/3	1/3	2
	$Z_j$	8	5	0	-1/6	8/3	46
	$C_j - Z_j$	0	0	0	1/6	-8/3	
0	$x_4$	0	0	3	1	-1	6
5	$x_2$	0	1	-3/2	0	1/2	3
8	$x_1$	1	0	1	0	1/3	4
	$Z_j$	8	5	1/2	0	5/2	47
	$C_j - Z_j$	0	0	-1/2	0	-5/2	



## Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica.

### Plano óptimo antes do incremento

$$\mathbf{X}^* = (2, 6, 2, 0, 0), \quad z^* = 36$$
$$\mathbf{Y}^* = (0, 3/2, 1, 0, 0)$$

O lucro unitário do produto 1



passa de 3 para 8 mil Metical

### Plano óptimo depois do incremento

$$\mathbf{X}^* = (4, 3, 0, 6, 0), \quad z^* = 47$$
$$\mathbf{Y}^* = (1/2, 0, 5/2, 0, 0)$$

#### • Referente à produção:

Ao incrementar o lucro unitário do produto 1 de 3 U.M. para 8 U.M., o novo plano óptimo vai incluir:

- a produção de 4 portas por minuto (em lugar das 2 portas)

*evidentemente a perda de oportunidade da produção dum porta é nula ( $y_4=0$ )*

- a produção de 3 janelas por minuto (em lugar das 6 janelas)

*evidentemente a perda de oportunidade da produção dum janela é nula ( $y_5=0$ )*

•Economicamente é vantajoso este incremento do lucro unitário do produto 1, pois obtém-se um incremento de 11 U.M. no lucro total ( $47 = 36 + 11$ ).



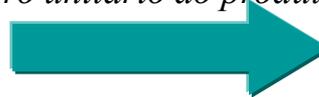
## Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica

Plano óptimo antes do  
incremento

Plano óptimo depois do  
incremento

$$\begin{aligned} X^* &= (2, 6, 2, 0, 0), \quad z^*=36 \\ Y^* &= (0, 3/2, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

O lucro unitário do produto 1



passa de 3 para 8 U.M.

$$\begin{aligned} X^* &= (4, 3, 0, 6, 0), \quad z^*=47 \\ Y^* &= (1/2, 0, 5/2, 0, 0) \end{aligned}$$

### •Referente aos recursos:

–O recurso 1 passa a ser um *recurso escasso* pelo que o seu preço sombra aumenta de 0 para 0,5 U.M.  
( $x_3=0, y_1=1/2$ ).

*no novo plano de produção a capacidade de produção da secção 1 fica esgotada.*

–O recurso 2 passa de *recurso escasso* para *recurso abundante* pelo que o seu preço sombra é agora nulo  
( $x_4=6, y_2=0$ ).

*no novo plano sobram 6 unidades do recurso 2 e o seu preço sombra cai de 3/2 até zero ( $y_2=3/2 \rightarrow y_2=0$ ).*

–O recurso 3 continua sendo um *recurso escasso* e o seu preço sombra aumenta de 1 para 2,5 U.M.  
( $x_5=0, y_3=5/2$ ).

*como a capacidade de produção da secção 3 fica esgotada, o seu preço sombra é positivo e igual a 2,5 U.M.*

O lucro total:  $z^* = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 47 = b_1 y_1 + b_3 y_3 = 4 \cdot 0,5 + 18 \cdot 2,5 = w^*$



## Pós-Optimização. Exemplo.

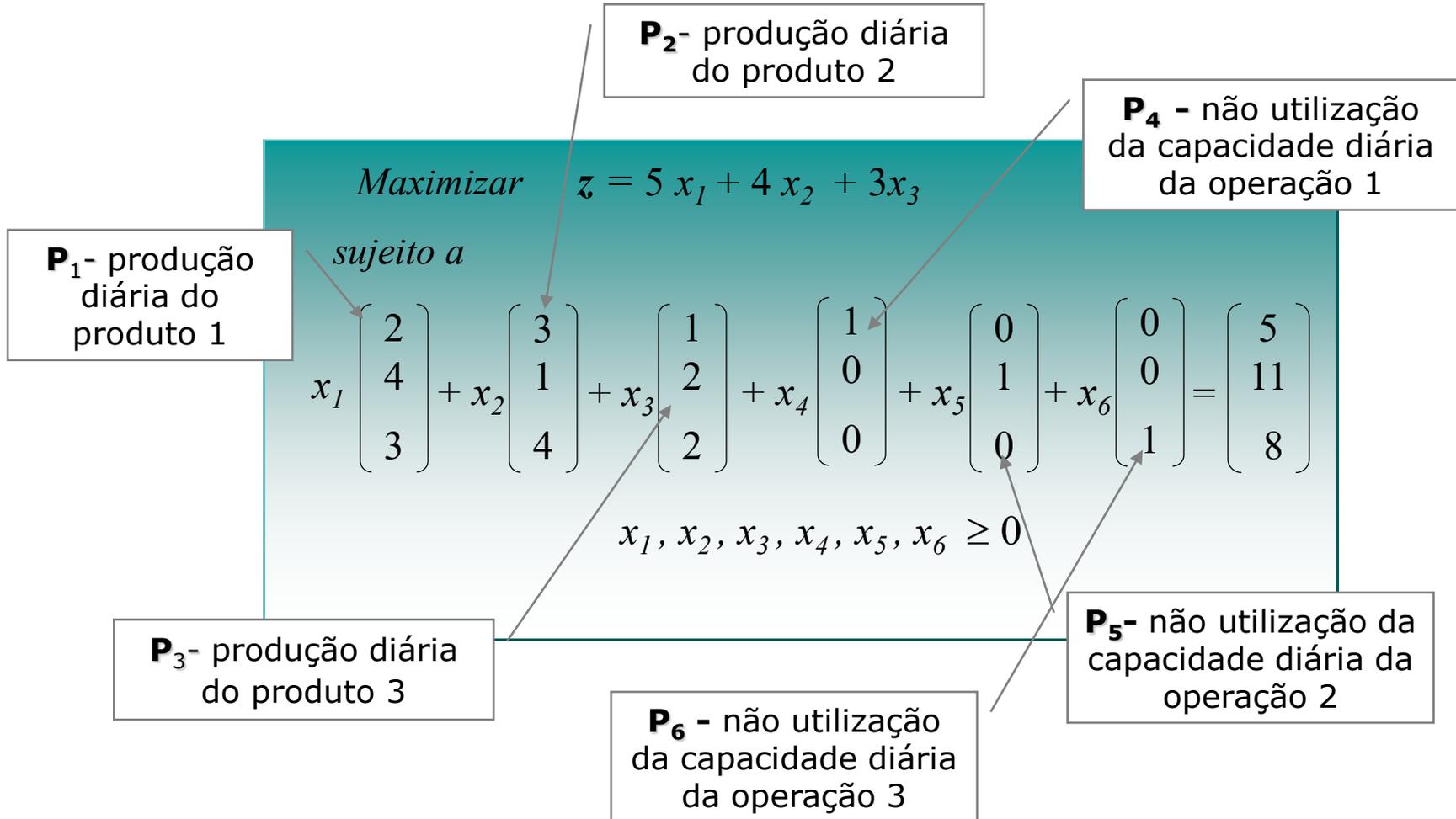
Num laboratório farmacêutico são manufacturados 3 produtos, passando por 3 operações diferentes.

O tempo (em horas) requerido por cada unidade de cada produto, a capacidade diária de cada operação (em h/dia) e o lucro unitário por unidade vendida de cada produto (em milhares de Meticais) são os seguintes:

<b>Operação N°</b>	<b><i>Tempo por unidade Produtos</i></b>			<b><i>Capacidade operativa</i></b>
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	
<b>1</b>	2	3	1	<b>5</b>
<b>2</b>	4	1	2	<b>11</b>
<b>3</b>	3	4	2	<b>8</b>
<b><i>Lucro unitário (mil. de Meticais)</i></b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	



## Pós-Optimização. Exemplo.





## Pós-Optimização. Exemplo. Soluções óptimas primal e dual.

a) Descreva as soluções óptimas primal e dual e justifique-as, economicamente, utilizando a complementaridade de slacks

$$\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

$$x_1 \cdot y_4 = 2 \times 0 = 0$$

$$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 1 = 0$$

$$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 3 = 0$$

$$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$$

$$x_3 \cdot y_6 = 1 \times 0 = 0$$

$$x_6 \cdot y_3 = 0 \times 1 = 0$$

		$B^{-1}$						
$C_j$		5	4	3	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\bar{b}$
5	$x_1$	1	2	0	2	0	-1	2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
3	$x_3$	0	-1	1	-3	0	2	1
	$C_j - Z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

valores simétricos dos valores das variáveis de folga duais

Valores simétricos dos valores das variáveis de decisão duais



## Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (1).

**Primal:**  $\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

**Dual:**  $\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$$x_1^* \cdot y_4^* = 0$$

$$2 \cdot 0 = 0$$

### Referente à produção do Produto 1:

Devem ser manufacturadas 2 unidades do produto 1 diariamente, sendo a valorização interna atribuída às horas gastas nas operações para produzir uma unidade do produto 1 igual ao seu lucro unitário, pelo que *a perda de oportunidade* da produção de uma unidade do produto 1 é *nula*.

*Caso a perda de oportunidade fosse positiva, a produção deste produto não seria contemplada*



## Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das *slacks* (2).

**Primal:**  $\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

**Dual:**  $\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$$x_2^* \cdot y_5^* = 0$$

$$0 \cdot 3 = 0$$

### Referente à produção do Produto 2:

A produção do Produto 2 não é contemplada, pois a valorização interna atribuída às horas que seriam gastas nas operações para produzir uma unidade do Produto 2 é maior do que o seu lucro unitário, i.e., a produção de uma unidade do produto 2 implicaria uma redução de 3 mil Meticais no lucro total, pelo que a perda de oportunidade da produção de uma unidade do Produto 2 é de 3 mil Meticais.



## Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (3).

$$\text{Primal: } \mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\text{Dual: } \mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

$$x_3^* \cdot y_6^* = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

### Referente à produção do Produto 3:

Deve ser manufacturada 1 unidade do Produto 3 diariamente, sendo a valorização interna atribuída às horas gastas nas operações para produzir uma unidade do Produto 3 igual ao seu lucro unitário, pelo que *a perda de oportunidade* da produção de uma unidade do Produto 3 é *nula*.

*Caso a perda de oportunidade fosse positiva, a produção deste produto não seria contemplada.*



## Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (4).

↓

**Primal:**  $\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, \mathbf{0}, 1, 0)$

↓

**Dual:**  $\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, \mathbf{3}, 0)$

$x_4^* \cdot y_1^* = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

### Referente ao Recurso 1:

O *preço sombra* (valorização interna)

de uma hora por dia na operação 1 é positivo e igual a mil Meticais, pelo facto deste ser *um recurso escasso*, do qual não há sobras, i.e., a capacidade diária para a operação 1 (5 h/dia) está esgotada.

*A disponibilidade adicional de 1 hora diária na operação 1 possibilitaria um incremento de mil Meticais no valor do lucro total.*



## Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (5).

↓

**Primal:**  $\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

↓

**Dual:**  $\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$x_5^* \cdot y_2^* = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

### Referente ao recurso 2:

O *preço sombra* (valorização interna) de uma hora por dia na operação 2 é *nulo*, pelo facto deste ser *um recurso abundante*, do qual sobra 1 hora diária do total das horas disponíveis para esta operação (11 h/dia).

*O tempo diário não utilizado na operação 2 é de 1 hora.*



## Interpretação económica das soluções óptimas utilizando a complementaridade das slacks (6).

$$\text{Primal: } \mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\text{Dual: } \mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

$$x_6^* \cdot y_3^* = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

### Referente ao Recurso 3:

O *preço sombra* (valorização interna)

de uma hora por dia na operação 3 é positivo e igual a mil Meticais, pelo facto deste ser *um recurso escasso*, do qual não há sobras, i.e., a capacidade diária para a operação 3 (8 h/dia) está esgotada.

*A disponibilidade adicional de 1 hora diária na operação 1 possibilitaria um incremento de mil Meticais no valor do lucro total.*



## Pós-Optimização. Exemplo. Alteração dos termos independentes.

b) Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se a capacidade diária da operação 3 passar de 8 h/dia para 12 h/dia.

$$X_B^* \rightarrow X_B^* + B^{-1}\Delta b, \quad \Delta b = (0, 0, 4)$$

$$X_B^* + B^{-1} x \Delta b = \text{nova}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ -2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

	$c_j$	5	4	3	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\bar{b}$
5	$x_1$	1	2	0	2	0	-1	2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
3	$x_3$	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

$B^{-1}$

<0

*Como a nova solução é primal não admissível e dual admissível (as linhas dos custos reduzidos não sofreram alteração) pode ser aplicado o algoritmo dual simplex para atingir uma solução ótima admissível.*



## Pós-Optimização. Exemplo. Alteração dos termos independentes.

$$\mathbf{X}^* = (0, 0, 5, 0, 1, 2)$$

$$\mathbf{Y}^* = (3, 0, 0, 1, 5, 0)$$

$$x_1 \cdot y_4 = 0 \times 1 = 0$$

$$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 3 = 0$$

$$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 5 = 0$$

$$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$$

$$x_3 \cdot y_6 = 5 \times 0 = 0$$

$$x_6 \cdot y_3 = 2 \times 0 = 0$$

	$C_j$	5	4	3	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\bar{b}$
5	$x_1$	1	2	0	2	0	-1	-2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
3	$x_3$	0	-1	1	-3	0	2	9
	$Z_j$	5	7	3	1	0	1	17
	$C_j - Z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	
0	$x_6$	-1	-2	0	-2	0	1	2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
3	$x_3$	2	3	1	1	0	0	5
	$Z_j$	6	9	3	3	0	0	15
	$C_j - Z_j$	-1	-5	0	-3	0	0	



## Exemplo. Alteração dos termos independentes. Interpretação económica.

### Plano óptimo antes do incremento

$$\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad z^* = 13$$
$$\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

### Plano óptimo depois do incremento

$$\mathbf{X}^* = (0, 0, 5, 0, 1, 2), \quad z^* = 15$$
$$\mathbf{Y}^* = (3, 0, 0, 1, 5, 0)$$

*A capacidade diária da operação 3*

*passa de 8 h/dia para 12 h/dia.*

• Referente à produção:

- Ao ser incrementada a capacidade diária da operação 3 de 8 h/dia para 12 h/dia, o novo plano óptimo:
  - não contempla agora a produção do produto 1  
*a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 1 passa a ser igual a 1 mil Meticais ( $y_4=1$ )*
  - continua sem contemplar a produção do produto 2  
*a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 2 é igual a 5 mil Meticais ( $y_5=5$ )*
  - aumenta a produção diária do produto 3 (de 1 para 5 unidades)  
*a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 3 continua nula ( $y_6=0$ )*
- Economicamente é vantajoso este incremento da capacidade de produção da operação 3 em 4 h/dia, pois obtém-se um incremento de 2 mil Meticais no lucro total diário ( $15 = 13 + 2$ ).



## Exemplo. Alteração dos termos independentes.

### Interpretação económica.

Plano óptimo antes do incremento

Plano óptimo depois do incremento

$$\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad z^* = 13$$
$$\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

A capacidade diária da operação 3



$$\mathbf{X}^* = (0, 0, 5, 0, 1, 2), \quad z^* = 15$$
$$\mathbf{Y}^* = (3, 0, 0, 1, 5, 0)$$

• Referente aos recursos:

passa de 8 h/dia para 12 h/dia.

- O Recurso 1 continua sendo um *recurso escasso* e o seu preço sombra aumenta de 1 para 3 mil Meticais por h/dia ( $x_4=0, y_1=3$ ).

*a capacidade de produção da operação 1 mantém-se esgotada, sendo utilizada ao seu nível máximo disponível para a produção de um único produto: o produto 3 ( 1 h/dia \* 5 unidades do produto 3 = 5 h/dia )*

- O Recurso 2 continua sendo um *recurso abundante* pelo que o seu preço sombra continua nulo ( $x_5=1, y_2=0$ ).  
*no novo plano também sobra 1 hora da Operação 2*

- O Recurso 3 passa de *recurso escasso* para *recurso abundante* pelo que o seu preço sombra cai até zero ( $x_6=2, y_3=0$ ).

*No novo plano sobram agora 2 horas da Operação 3, e o seu preço sombra cai de 1 até zero ( $y_3=1 \rightarrow y_3=0$ )*

O lucro total  $z^* = c_3 x_3 = 3 \cdot 5 = 15$  mil Meticais =  $b_1 y_1 = 5 \cdot 3 = w^*$



## Pós-Optimização. Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o.

c) Analise as consequências económicas e de produção que decorrem se o lucro unitário do Produto 1 passa de 5 a 7 mil Meticais.

$$c_1 \rightarrow c_1 + \Delta c_1 = 5 + 2 = 7$$

	$c_j$	5	4	3	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\bar{b}$
5	$x_1$	1	2	0	2	0	-1	2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
3	$x_3$	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

	$c_j$	7	4	3	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\bar{b}$
7	$x_1$	1	2	0	2	0	-1	2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
3	$x_3$	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-7	0	-5	0	1	17

Como a solução admissível primal deixa de ser óptima (existe um custo reduzido positivo) pode ser aplicado o algoritmo primal Simplex para determinar uma nova solução óptima .



## Pós-Optimização. Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o.

$$X^* = ( 5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2 )$$

$$Y^* = ( 7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2 )$$

$x_1 \cdot y_4 = 5/2 \times 1 = 0$	$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 7/2 = 0$
$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 13/2 = 0$	$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$
$x_3 \cdot y_6 = 0 \times 1/2 = 0$	$x_6 \cdot y_3 = 1/2 \times 0 = 0$

	$C_j$	7	4	3	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\bar{b}$
7	$x_1$	1	2	0	2	0	-1	2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
3	$x_3$	0	-1	1	-3	0	2	1
	$Z_j$	7	11	3	5	0	-1	17
	$C_j - Z_j$	0	-7	0	-5	0	1	
7	$x_1$	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2
0	$x_5$	0	-5	0	-2	1	0	1
0	$x_6$	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2
	$Z_j$	7	21/2	7/2	7/2	0	0	35/2
	$C_j - Z_j$	0	-13/2	-1/2	-7/2	0	0	



## Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica.

### Plano óptimo antes do incremento

$$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad z^* = 13$$
$$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

O lucro unitário do produto  
1 passa de 5 para 7 mil

Meticais

### Plano óptimo depois do incremento

$$X^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2), \quad z^* = 17,5$$
$$Y^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$$

#### •Referente à produção:

Ao incrementar o lucro unitário do produto 1 de 5 mil Meticais para 7 mil Meticais, o novo plano óptimo:

–contempla a produção diária de 2,5 unidades do produto 1

*evidentemente a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 1 é nula ( $y_4=0$ )*

–não contempla a produção dos produtos 2 e 3

*as perdas de oportunidade da produção duma unidade do produto 2 e do produto 3 são positivas e iguais a 6,5 mil Meticais e 0,5 mil Meticais respectivamente ( $y_5=13/2, y_6=1/2$ ).*

Economicamente é vantajoso este incremento do lucro unitário do produto 1, pois obtém-se um incremento de 4,5 mil Meticais no lucro total diário.



## Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação económica.

### Plano óptimo antes do incremento

$$\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad z^* = 13$$
$$\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

O lucro unitário do produto  
1 passa de 5 para 7 mil

### Plano óptimo depois do incremento

$$\mathbf{X}^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2), \quad z^* = 17,5$$
$$\mathbf{Y}^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$$

Meticais



#### •Referente aos recursos:

- O recurso 1 continua sendo um *recurso escasso* e o seu preço sombra aumenta de 1 para 3,5 mil Meticais por h/dia ( $x_4=0, y_1=7/2$ ).  
*a capacidade de produção da operação 1 mantém-se esgotada, sendo utilizada ao seu nível máximo disponível para a produção de um único produto: o produto 1 ( 2 h/dia \* 2,5 unidades do produto 3 = 5 h/dia )*
- O recurso 2 continua sendo um *recurso abundante* pelo que o seu preço sombra continua nulo ( $x_5=1, y_2=0$ ).  
*no novo plano também sobra 1 hora da operação 2*
- O recurso 3 passa de *recurso escasso* para *recurso abundante* pelo que o seu preço sombra é agora nulo ( $x_6=1/2, y_3=0$ ).  
*no novo plano sobram agora 0,5 horas da operação 3, e o seu preço sombra cai de 1 até zero ( $y_3=1 \rightarrow y_3=0$ )*

$$\mathbf{O} \text{ lucro total } z^* = \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1 = 7 \cdot 2,5 = 17,5 \text{ mil Meticais} = \mathbf{b}_1 \mathbf{y}_1 = 5 \cdot 3,5 = \mathbf{w}^*$$