



Optimização

Aula 23



Programação Dinâmica

Aula 23: Programação Dinâmica

- Programação Dinâmica Determinística; e
- Programação Dinâmica Probabilística.



Programação Dinâmica



O que é a Programação Dinâmica?



A Programação Dinâmica é uma técnica matemática útil para criar uma sequência de decisões inter-relacionadas. Ela fornece um procedimento sistemático para determinar a combinação de decisões óptimas. Ao contrário da Programação Linear, não existe uma formulação matemática padrão do problema de programação dinâmica. Em vez disso a programação dinâmica é um tipo genérico de metodologia para a resolução de problemas e as equações particulares usadas têm de ser desenvolvidas para cada situação.



Programação Dinâmica



Que tipos de problemas de Programação Dinâmica existem?



Os problemas de Programação Dinâmica podem se dividir em de:

Programação Dinâmica Determinística; e

Programação Dinâmica Probabilística.



Programação Dinâmica



Quais são as características básicas da Programação Dinâmica?

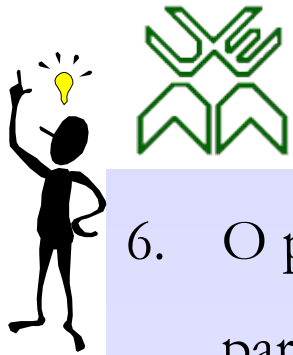


1. O problema pode ser dividido em **estágios**, e uma decisão sobre a política a ser adoptada é necessária a cada **estágio**.
2. Cada estágio possui um número de **estados** associados ao início desse estágio.
3. O efeito da decisão sobre a política a ser adoptada em cada estágio é o de transformar o estado actual num estado associado ao início do estágio seguinte.



Programação Dinâmica

4. O procedimento de resolução é desenhado para encontrar uma **política óptima** para o problema como um todo, isto é, estender a fórmula de decisão sobre a política óptima em cada estágio para cada um dos estágios possíveis.
5. Dado o estado actual uma política óptima para os estágios restantes é independente das decisões sobre as políticas adoptadas nos estágios anteriores. Portanto a decisão imediata óptima depende somente do estado actual e não de como se chegou lá. Esse é o **princípio da optimalidade** para a programação dinâmica.



Programação Dinâmica

6. O procedimento de resolução começa encontrando a política ótima para o último estágio. A política ótima para o último estágio prescreve a decisão sobre a política ótima para cada um dos possíveis estados naquele estágio.
7. Há uma **relação recursiva** que identifica a política ótima para o estágio n , dada a política ótima para o estágio **$n+1$** ao início desse estágio.
8. A forma precisa da relação recursiva difere um pouco entre os problemas de programação dinâmica. Entretanto uma notação comum pode ser usada, como se sintetiza a seguir:



Notação (I)



$n \rightarrow$, designa o número do *Estágio Actual*.



$N \rightarrow$, designa o *Número de Estágios*.



$s_n \rightarrow$, designa o *Estado actual do Estágio n* .



$x_n \rightarrow$, designa a *variável de decisão para o Estágio n* .



$x_n^* \rightarrow$, designa o *valor óptimo da variável de decisão (dado s_n)*.



Notação (II)



$f_n(s_n, x_n) \rightarrow$, *Função de Transição* (contribuição dos Estágios $n, n+1, \dots, N$ para a função objectivo se o sistema começa no Estado s_n no Estágio n , a decisão imediata é x_n e as decisões óptimas são tomadas daí para frente)



$f_n^*(s_n) = f_n^*(s_n, x_n^*) \rightarrow$, *Valor da Política Óptima para cada Estágio.*



Notação (III)

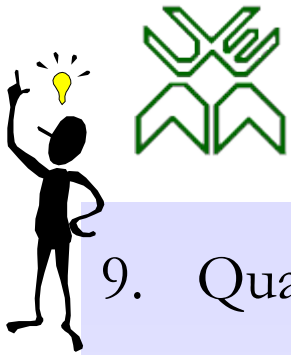


A relação Recursiva é dada por $\rightarrow$

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\} \text{ ou } f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$$



*$C_{sX_n} \rightarrow$, Valor dos encargos de transição entre **Estados**.*



Programação Dinâmica

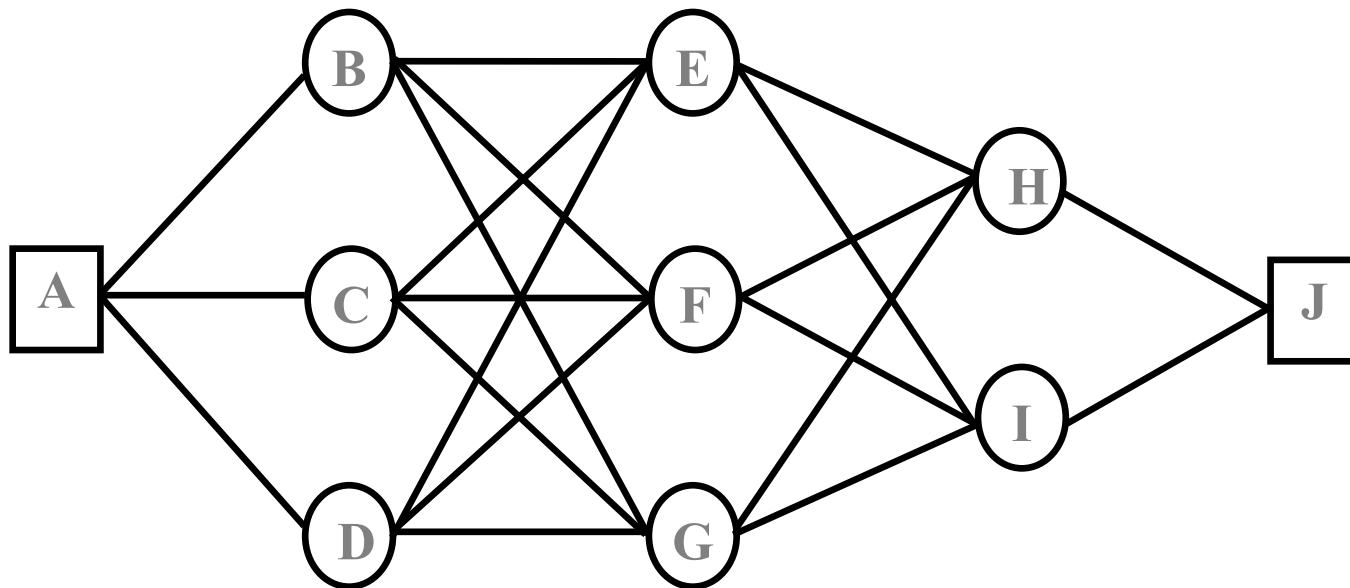
9. Quando se usa a relação recursiva o procedimento de solução começa no fim e vai voltando para trás estágio por estágio – cada vez encontrando a política óptima para aquele estágio - até ela encontrar a política óptima começando no estágio inicial.
10. Para todos os problemas de programação dinâmica uma tabela como se mostra a seguir será obtida a cada estágio:

s_n \ x_n	$f_n(s_n, x_n) = C_{sx_n}$	$f_n^*(s_n)$	x_n^*



Exemplo do Protótipo

Um aluno pretende *minimizar* o custo do transporte entre a sua residência e a faculdade utilizando vários meios de transporte disponíveis na rede seguinte:





O custo (*u.m.*) associado às ligações existentes traduz-se nas seguintes matrizes de transição:

	B	C	D
A	1	3	2

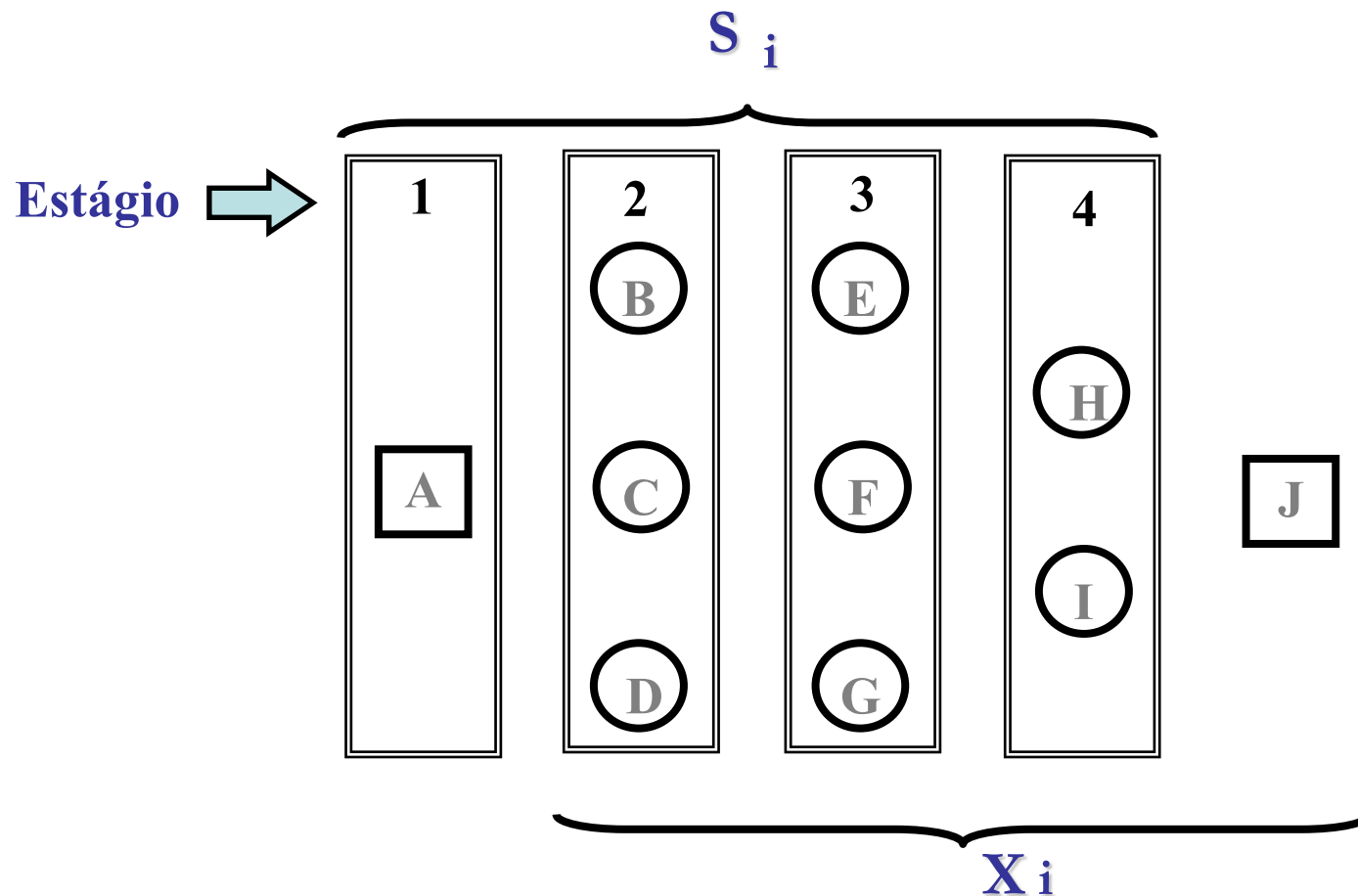
	H	I
E	1	3
F	5	2
G	2	2

	E	F	G
B	6	3	5
C	2	1	3
D	3	1	4

	J
H	2
I	3



Sendo a casa do aluno o ponto inicial do percurso e a faculdade o ponto final tem-se quatro estágios ($n = 4$) como mostra a figura.





Exemplo do Protótipo



Como solucionar o problema?



Observe-se primeiramente que a metodologia de visão limitada de seleccionar a viagem mais barata oferecida por estágio sucessivo não conduz necessariamente a uma solução óptima global. Seguir essa estratégia resultaria na rota $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$, a um custo total igual a 9. Entretanto, sacrificar um pouco em um estágio pode vir a permitir maiores economias mais a frente, por exemplo $A \rightarrow D \rightarrow F$ é no geral mais barato que $A \rightarrow B \rightarrow F$.



Exemplo do Protótipo



Como se faz a **formulação** do problema?



Faça-se as variáveis de decisão x_n ($n=1,2,3,4$) como destino imediato no estágio n (a n -ésima viagem que pode ser realizada). Logo a rota seleccionada é $A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ em que $x_4=J$.

Façamos $f_s(s, x_n)$ o custo total da melhor rota como um todo para os estágios restantes dado que o estudante se encontra no estado s pronto para iniciar o **estado n** e selecciona x_n como seu destino imediato.



Exemplo do Protótipo

Sendo c_{sx_n} o custo de transporte associado à decisão x_n , quando o aluno se encontra no Estado S_n esta relação recursiva é da forma:

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} \{c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)\}$$

O cálculo da solução óptima é feito pela ordem:

$$f_n^*(4), f_n^*(3), f_n^*(2), f_n^*(1)$$



Exemplo do Protótipo



Qual o procedimento de **resolução** do problema?



Quando estudante tiver apenas mais uma etapa a cumprir ($n=4$), daí em diante sua rota é determinada inteiramente pelo seu estado actual **s** (H ou então I) e seu destino final $x_4=J$, de modo que a rota final para a viagem do estudante seja $s \rightarrow J$.

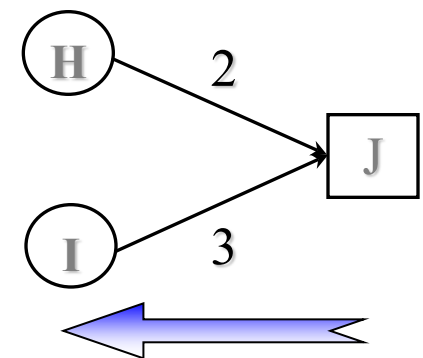
Consequentemente já que $f_4^* = f_4(s, J) = c_{s,J}$

A solução imediata para o problema $n=4$ toma então o seguinte aspecto:



O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 4**:

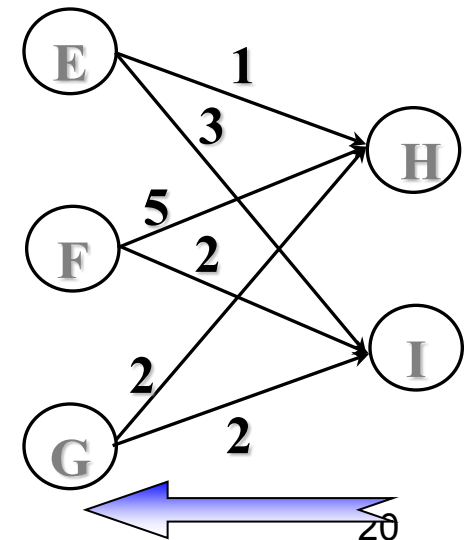
$\begin{matrix} X_4 \\ \text{S} \end{matrix}$	$f_4(S, X_4) = C_{SX_4}$	$f_4^*(S)$	X_4^*
	J		
H	2	2	J
I	3	3	J





O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 3**:

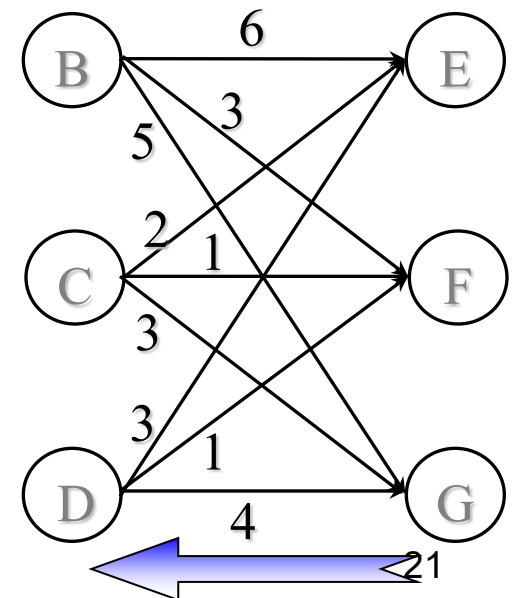
S \ X_3	$f_3(S, X_3) = C_{SX_3} + f_4^*(S)$		$f_3^*(S)$	X_3^*
	H	I		
E	1+2=3	3+3=6	3	H
F	5+2=7	2+3=5	5	I
G	2+2=4	2+3=5	4	H





O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 2**:

S \ X_2	$f_2(S, X_2) = C_{SX_2} + f_3^*(S)$			$f_2^*(S)$	X_2^*
	E	F	G		
B	6+3=9	3+5=8	5+4=9	8	F
C	2+3=5	1+5=6	3+4=7	5	E
D	3+3=6	1+5=6	4+4=8	6	E/F

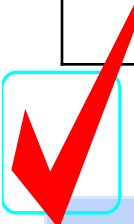




O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 1**:

$S \backslash X_1$	$f_1(S, X_1) = C_{SX_1} + f_2^*(S)$			$f_1^*(S)$	X_1^*
	B	C	D		
A	1+8=9	3+5=8	2+6=8	8	C/D

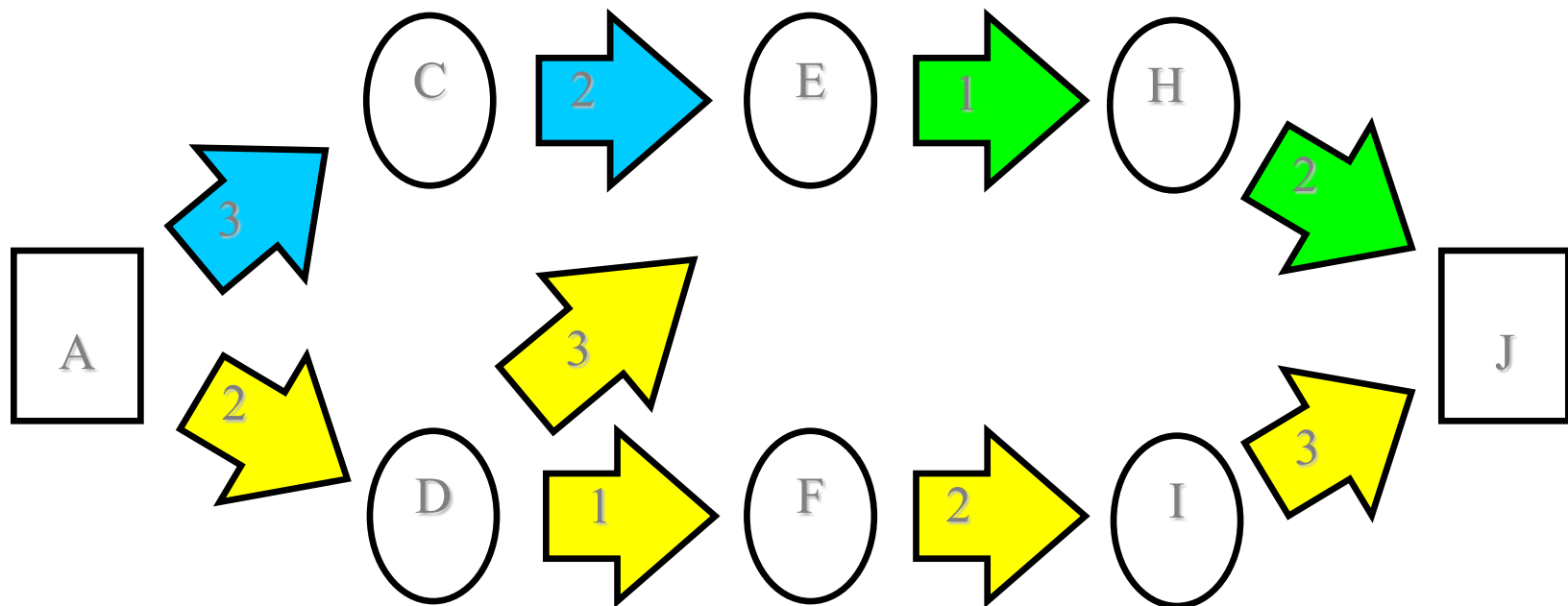
Diagram illustrating the decision process for Stage 1. A decision node A (square) branches into three chance nodes B, C, and D (circles). The branches are labeled 1, 3, and 2 respectively. A large blue arrow points from the right towards the table, indicating the flow of information or the result of the decision process.



Podemos então concluir que a política óptima tem um custo total mínimo de $= 8 \text{ u.m.}$



Problema com múltiplas soluções. Existem três caminhos distintos com o mesmo valor óptimo (com custo = 8 *u.m.*)





Problema de afectação múltipla (PD determinística e discreta)

Um aluno está prestes a iniciar a sua época de exames em três cadeiras sendo de 3 dias o tempo disponível para preparação. Adicionalmente, o aluno durante um dia só estuda para um dos exames, por uma questão de método, e quer estar presente em todos eles.



- A previsão do aluno para a classificação em cada uma das cadeiras, em função do tempo (dias) de preparação para cada uma delas é a seguinte:

Cadeiras Dias	1	2	3
0	8	7	8
1	10	11	11
2	13	12	13
3	16	15	17

- O aluno pretende saber qual o plano de estudo (dias de estudo/cadeira) que *maximizará* a média das classificações dos exames.



- x_n ($n = 1, 2, 3$), as variáveis de decisão que representam o número de dias a estudar para cada estágio (exame) n ;
- s_n = número de dias de estudo disponíveis para o estágio (exame) n , que pode ser 0, 1, 2 ou 3;
- $c_i(x_i)$ = nota obtida à cadeira i com um estudo de x_i dias;



Objectivo do problema:

- escolher x_1, x_2, x_3 de forma a maximizar $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 c_i(x_i)$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 3$$

com $x_i \geq 0$ e inteiro



A contribuição dos estágios $n, n + 1, \dots, N$ para a função objectivo é dada por:

$$f_n(s_n, x_n) = c_n(x_n) + \max \sum_{i=n+1}^N c_i(x_i)$$

em que N representa o número de estágios (no nosso caso $N = 3$) com $\sum_{i=n}^3 x_i = s_n$ e,

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} f_n(s_n, x_n)$$

portanto,

$$f_n(s_n, x_n) = c_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$



Consequentemente a relação recursiva relativa às funções f_1^* , f_2^* e f_3^* para este problema é

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} \{c_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}, \text{ para } n = 1, 2$$

Para o último estágio ($n = 3$) temos,

$$f_3^* = \max_{x_3=0,1,\dots,s_3} c_3(x_3)$$



- O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 3 (cadeira 3)**:

$s_3 \backslash x_3$	$f_3(s_3, x_3) = C_3(x_3)$	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	8	8	0
1	11	11	1
2	13	13	2
3	17	17	3



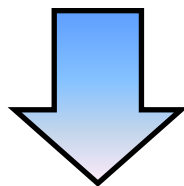
•O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 2 (cadeira 2)**:

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = c_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2)$				$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3		
0	$7 + 8 = 15$				15	0
1	$7 + 11 = 18$	$11 + 8 = 19$			19	1
2	$7 + 13 = 20$	$11 + 11 = 22$	$12 + 8 = 20$		22	1
3	$7 + 17 = 24$	$11 + 13 = 24$	$12 + 11 = 23$	$15 + 8 = 23$	24	0 ou 1



O quadro seguinte ilustra as decisões associadas ao **Estágio 1 (cadeira 1)**:

De notar que neste Estágio há 3 dias disponíveis



$$s_1 = 3$$

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = c_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1)$				$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3		
3	$8 + 24 = 32$	$10 + 22 = 32$	$13 + 19 = 32$	$16 + 15 = 31$	32	0 ou 1 ou 2



- No quadro seguinte indicam-se as soluções óptimas de 32 valores acumulados:

Solução	Cadeira 1 (Dias)	Cadeira 2 (Dias)	Cadeira 3 (Dias)	Classificação Acumulada
I	0	0	3	$8+7+17=32$
II	0	1	2	$8+11+13=32$
III	1	1	1	$10+11+11=32$
IV	2	1	0	$13+11+8=32$

A política óptima é a que permite acumular 32 valores a que corresponde a média de $32/3 \approx 10,67$ valores.



Programação Dinâmica Probabilística



Em que difere a Programação Dinâmica Probabilística da Determinística?

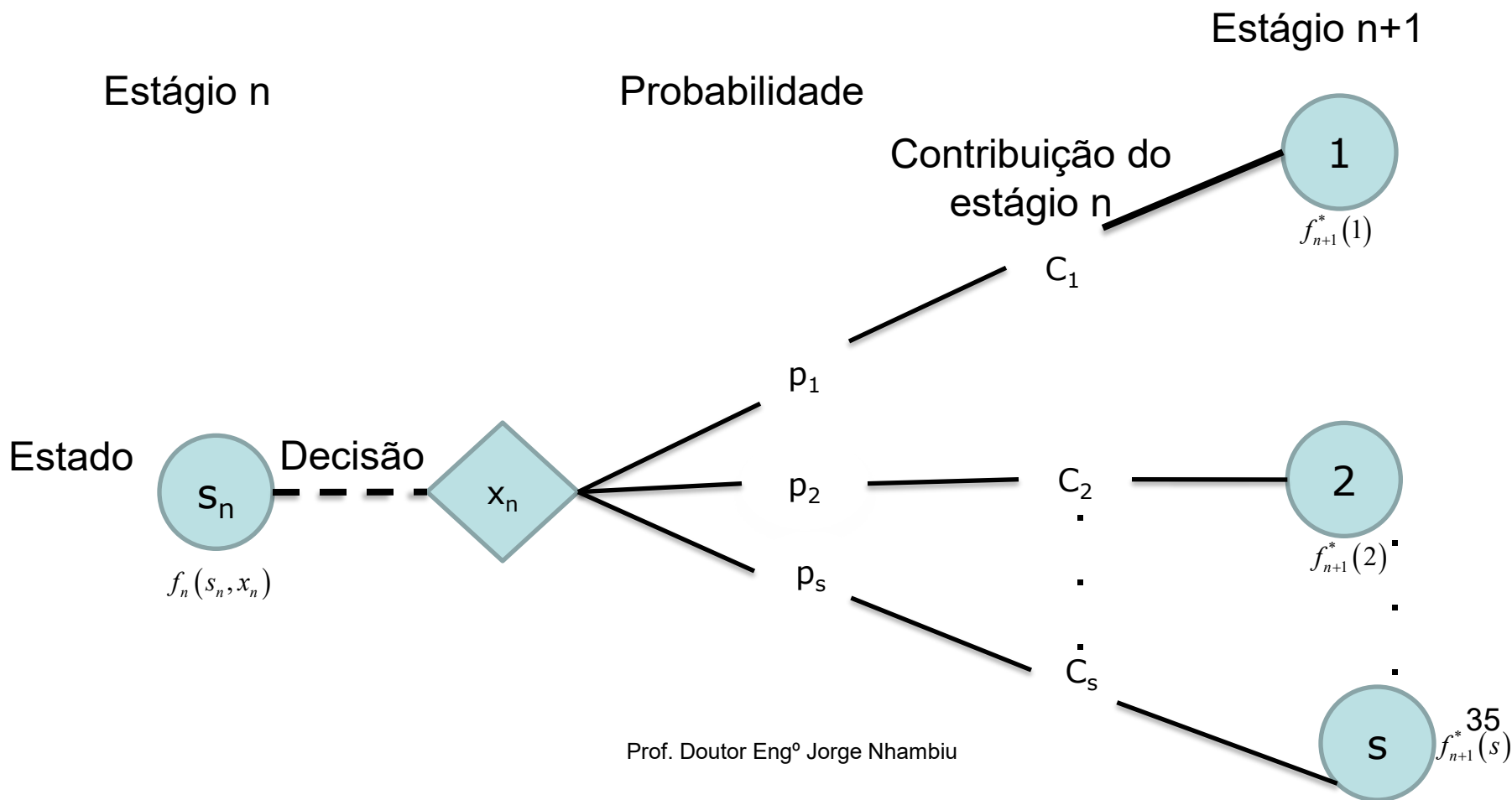


A programação dinâmica probabilística difere da programação dinâmica determinística pelo facto do estado no estágio seguinte não ser completamente determinado pelo estado e pela decisão sobre a política a ser adoptada no estado actual. Em vez disso, há uma distribuição probabilística para qual deva ser o estado seguinte. Entretanto essa distribuição de probabilidades ainda é completamente determinada pelo estado e pela decisão sobre a política a ser adoptada do estágio actual.



Programação Dinâmica Probabilística

A estrutura básica resultante para a programação dinâmica probabilística é descrita em forma de diagrama na figura seguinte:





Programação Dinâmica Probabilística

No diagrama, S representa o número de estágios possíveis no estágio $n+1$ e designou-se esses estados do lado direito por $1, 2, \dots, S$. O sistema vai para o estágio i com a probabilidade p_i ($i=1, 2, \dots, S$) dado o estado s_n e a decisão x_n . Se o sistema for para o estado i , C_i será a contribuição do estágio n à função objectivo.



Programação Dinâmica Probabilística

Para fins ilustrativos, suponhamos que o objectivo seja minimizar a soma esperada das contribuições de cada um dos estágios. Nesse caso, $f_n(s_n, x_n)$ representa a soma mínima esperada do estágio n em diante, dado que o estado e a decisão sobre a política a ser adoptada no estágio n sejam, respectivamente s_n e x_n , consequentemente:

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^S p_i [C_i + f_{n+1}^*(i)]$$

com

$$f_{n+1}^*(i) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(i, x_{n+1})$$

Em que essa minimização é extraída dos valores viáveis de x_{n+1}



Problema de afectação múltipla (PD probabilística e discreta)

Uma conhecida marca de automóveis pretende distribuir 5 viaturas por 3 vendedores da marca. A procura de automóveis em cada um dos concessionários é aleatória, de acordo com as seguintes distribuições de probabilidades:

Vend. Procura	1	2	3
0	0,3	0,2	0,5
1	0,4	0,3	0,2
2	0,2	0,2	0,1
3	0,1	0,3	0,2
Lucro (x 100 Dólares)	200	210	220



Objectivo do problema:

- Distribuir os veículos de forma a ***maximizar*** o lucro.
- x_n ($n = 1, 2, 3$) as variáveis de decisão que representam o número de automóveis a distribuir por cada estágio (concessionário) n ;
- S_n = número de automóveis disponíveis para o estágio (concessionário) n , que pode ser 0, 1, 2, 3, 4 ou 5;
- $c_i(x_i)$ = lucro esperado no concessionário i com uma atribuição de x_i veículos.



- Atendendo às probabilidades do quadro anterior, os valores dos lucros esperados são:

Vendedores Automóveis	1	2	3
	0	0	0
0	0	0	0
1	140	168	110
2	200	189	176
3	220	336	220
4	220	336	220
5	220	336	220



Objectivo do problema:

- escolher x_1, x_2, x_3 de forma a maximizar $\sum_{i=1}^3 c_i(x_i)$
- Sujeito a
$$\sum_{i=1}^3 x_i = 5$$
- com $x_i \geq 0$ e inteiro



Solução

Para x_1^* tem-se $s_2 = 5 - 1 = 4$, consultando o quadro do Estágio 2 para $s_2 = 4$ tem-se $x_2^* = 3$. Considerando $x_2^* = 3$ obtém-se $s_3 = 4 - 3 = 1$, que no quadro do Estágio 3 corresponde a $x_3^* = 1$. Portanto, esta solução traduz-se na distribuição de 1, 3 e 1 automóveis para os concessionários 1, 2 e 3, respectivamente, onde se obterão lucros de 140, 336 e 110 ($\times 100$ Dólares), respectivamente.

Concessionário 1 (unidades)	Concessionário 2 (unidades)	Concessionário 3 (unidades)	Lucro Acumulado ($\times 100$ euros)
1	3	1	$140 + 336 + 110 = 586$



Problema de Programação Linear (PD determinística e contínua)

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

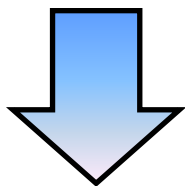
$$x_1, x_2 \geq 0$$



- Estágios
 - 1 – destinado a decidir o valor de x_1
 - 2 – destinado a decidir os valor de x_2
- Estados – dizem respeito à quantidade de recurso disponível para as restantes actividades.

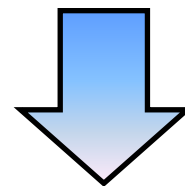


Estágio 2



$$s_2 = \begin{bmatrix} 4 - x_1 \\ 12 \\ 18 - 3x_1 \end{bmatrix}$$

Estágio 1



$$s_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$



Função de Transição

- Num Estágio n o valor óptimo da função de transição será:

$$f_n^*(b_1, b_2, b_3) = \underset{x_n}{\text{Max}} f_n(b_1, b_2, b_3, x_n)$$

No estágio 2 (estágio inicial do cálculo) tem-se:

$$\begin{aligned} f_2^*(b_1, b_2, b_3) = & \underset{\substack{2x_2 \leq b_2 \\ 2x_2 \leq b_3 \\ x_2 \geq 0}}{\text{Max}} (5x_2) \end{aligned}$$



Função de Transição

No estágio 1 (estágio final do cálculo) tem-se:

$$f_1^*(4,12,18) = \underset{s.a.}{Max} \left\{ 3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1) \right\}$$
$$x_1 \leq 4$$
$$3x_1 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0$$



Cálculo no Estágio 2

Sendo a variável de estado

$$s_2 = \begin{bmatrix} 4 - x_1 \\ 12 \\ 18 - 3x_1 \end{bmatrix}$$

então x_2^* deve satisfazer simultaneamente:

$$\begin{cases} 2x_2 \leq 12 \\ 2x_2 \leq 18 - 3x_1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Pelo que o valor máximo de x_2 é igual a

$$\text{Min} \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}$$

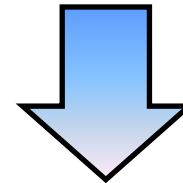
O quadro deste estágio é então:

Recursos restantes	$f_2^*(\text{recursos restantes})$	x_2^*
$12 \geq 0$ $18 - 3x_1 \geq 0$	$5 \times \text{Min} \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}$	$\text{Min} \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}$



Cálculo no Estágio 1

$$f_1^*(4,12,18) = \underset{\substack{x_1 \leq 4 \\ 3x_1 \leq 18 \\ x_1 \geq 0}}{\text{Max}} \left\{ \underbrace{3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)} \right\}$$



$$f_1^*(4,12,18) = \underset{\substack{x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0}}{\text{Max}} \left\{ \underbrace{3x_1 + 5 \times \text{Min} \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}} \right\}$$



$$x_1 \leq 4$$

$$\text{Min} \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} = \begin{cases} 6 & \text{para } 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 9 - \frac{3}{2}x_1 & \text{para } 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$f_1^*(4, 12, 18) = \begin{cases} 3x_1 + 30 & \text{para } 0 \leq x_1 \leq 2 \rightarrow \text{valor máximo} = 36 \text{ com } x_1 = 2 \\ 45 - \frac{9}{2}x_1 & \text{para } 2 \leq x_1 \leq 4 \rightarrow \text{valor máximo} = 36 \text{ com } x_1 = 2 \end{cases}$$

$$f_1^* = 36 \quad x_1^* = 2 \quad x_2^* = \text{Min} \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} = 6$$



Aplicações

- Caixeiro viajante
- Mochila
- Programação Linear e Não Linear
- Afecção Múltipla
- ...