



Optimização

Aula 26



Programação Não Linear

Aula 26: Programação Não-Linear - Funções de Uma única variável (Prática)

- Método da Bisseccção;
- Método de Newton.



Problema 26.1

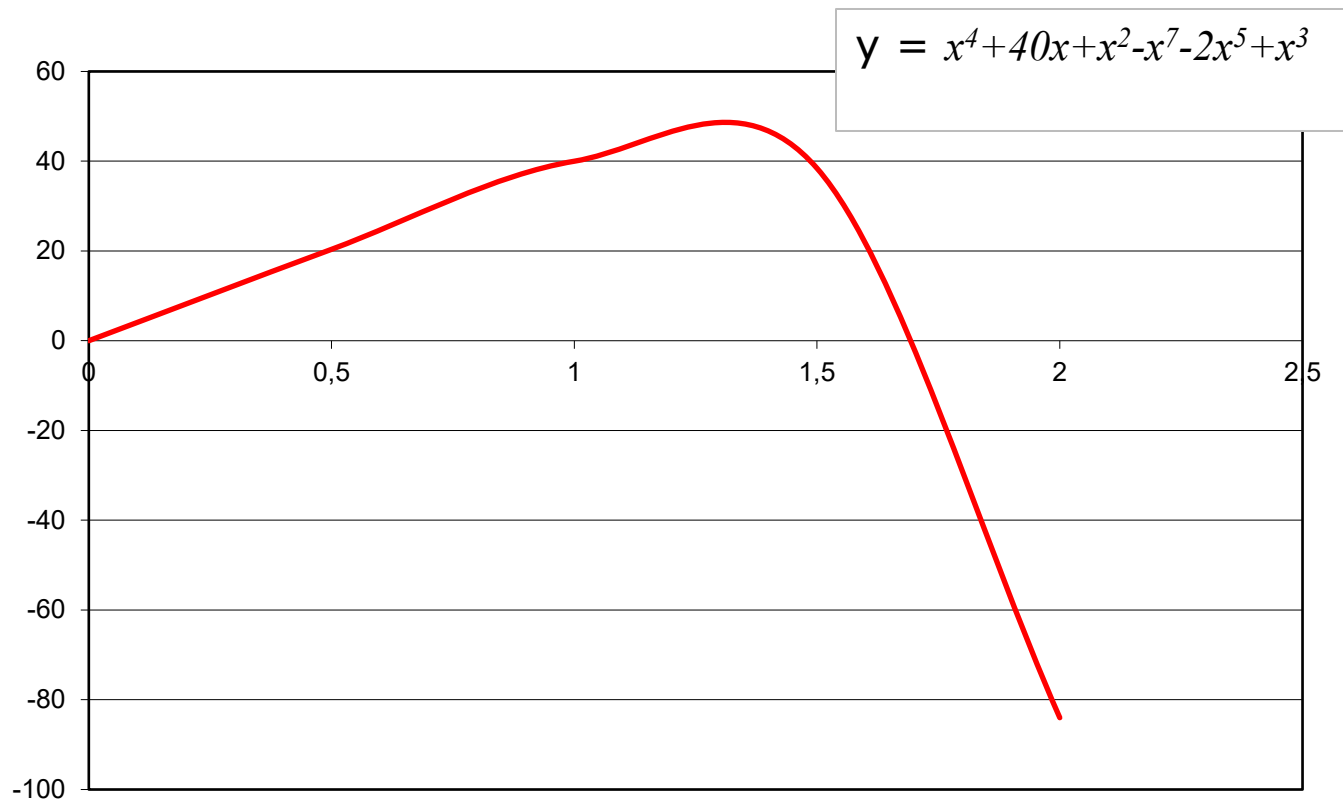
Considere o seguinte problema

Maximizar $f(x) = x^4 + 40x + x^2 - x^7 - 2x^5 + x^3$

- a) Aplique o método de Bisseccção para resolver aproximadamente esse problema. Use uma tolerância de erro $\varepsilon = 0,02$ e limites iniciais [0 e 5]
- b) Aplique o método de Newton, com $\varepsilon = 0,0001$ e $x_1 = 5$ a este problema



Problema 26.1 (Resolução I)





Problema 26.1 (Resolução II)

Método da Bissecção

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x$$

Pelo facto da segunda derivada ser não positiva em qualquer ponto, $f(x)$ é uma função côncava e portanto o método da bissecção pode ser aplicado tranquilamente para encontrar o seu máximo global (supondo-se que exista um máximo global).



Problema 26.1 (Resolução III)

Método da Bissecção

<i>Iteração</i>	$f'(x)$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	<i>novo x</i>	$f(x)$	
0		0	5	2,5	-644,727	continuar
1	-1973,36	0	2,5	1,25	45,08514	continuar
2	3,883057	1,25	2,5	1,875	-30,3536	continuar
3	-347,095	1,25	1,875	1,5625	33,35275	continuar
4	-95,76	1,25	1,5625	1,40625	43,04517	continuar
5	-33,3722	1,25	1,40625	1,328125	44,78928	continuar
6	-12,2129	1,25	1,328125	1,289063	45,0942	continuar
7	-3,59817	1,25	1,289063	1,269531	45,12619	parar



Problema 26.1 (Resolução IV)

Método de Newton

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x$$

Portanto, a fórmula para calcular a nova solução experimental (x_{i+1}) a partir da actual x_i é:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} = x_i - \frac{4x^3 + 40 + 2x - 7x^6 - 10x^4 + 3x^2}{12x^2 + 2 - 42x^5 - 40x^3 + 6x}$$



Problema 26.1 (Resolução V)

Método de Newton

Após seleccionar-se $\varepsilon=0,001$, e escolher-se $x_i=5$ como solução experimental inicial pode-se ver na tabela seguinte as soluções restantes:

Iteração	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	x_{i+1}	$(x_{i+1}-x_i) \leq \varepsilon$
1	5	-83400	-115000	-135918	4,153902	continuar
2	4,153902	-23260,6	-38551,8	-54576,4	3,447519	continuar
3	3,447519	-6430,23	-12918,9	-21927,9	2,858366	continuar
4	2,858366	-1727,92	-4321,62	-8830,75	2,368983	continuar
5	2,368983	-422,793	-1437,49	-3581,95	1,96767	continuar
6	1,96767	-68,0044	-470,145	-1483,29	1,650708	continuar
7	1,650708	22,76782	-146,398	-650,07	1,425504	continuar
8	1,425504	42,34429	-39,4953	-328,155	1,305149	continuar
9	1,305149	45,00921	-7,00132	-217,712	1,27299	continuar
10	1,27299	45,12599	-0,38973	-193,834	1,270979	continuar
11	1,270979	45,12639	-0,00143	-192,411	1,270972	parar



Problema 26.2

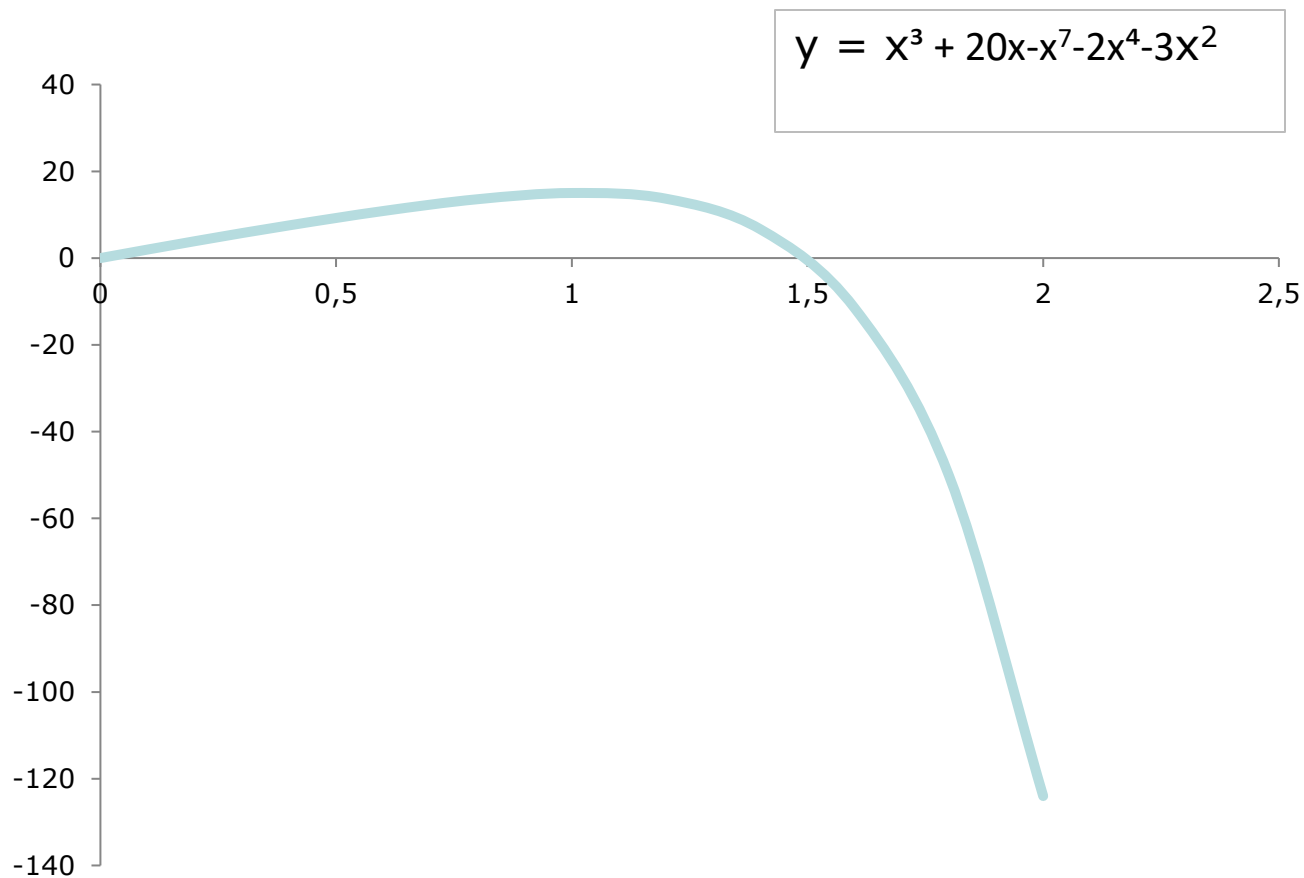
Considere o seguinte problema

Maximizar $f(x) = x^3 + 20x - x^7 - 2x^4 - 3x^2$

- a) Aplique o método de Bisseccção para resolver aproximadamente esse problema. Use uma tolerância de erro $\varepsilon = 0,007$ e encontre limites iniciais $[0 \text{ e } 2]$
- b) Aplique o método de Newton, com $\varepsilon = 0,001$ e $x_1 = 1$ a este problema



Problema 26.2 (Resolução I)





Problema 26.2 (ResoluçãoII)

Método da Bissecção

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 6x - 42x^5 - 24x^2 - 6$$

Pelo facto da segunda derivada ser não positiva em qualquer ponto, $f(x)$ é uma função côncava e portanto o método da bissecção pode ser aplicado tranquilamente para encontrar o seu máximo global (supondo-se que exista um máximo global).



Problema 26.2 (Resolução III)

Método da Bissecção

<i>Iteração</i>	<i>df/dx</i>	$\underline{x}$	$\bar{x}$	<i>Novo x</i>	<i>f(x)</i>
0		0	2	1	15
1	2	1	2	1,5	-0.58594
2	-88,9844	1	1,5	1,25	12.61444
3	-25,1404	1	1,25	1,125	14.64264
4	-8,53476	1	1,125	1,0625	14.98525
5	-2,65496	1	1,0625	1,03125	15.02896
6	-0,19016	1	1,03125	1,015625	15.02303
7	0,937417	1,015625	1,03125	1,023438	15.0282
8	0,381974	1,023438	1,03125	1,027344	15.02913



Problema 26.2 (Resolução IV)

Método de Newton

As duas primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x$$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = 6x - 42x^5 - 24x^2 - 6$$

Portanto, a fórmula para calcular a nova solução experimental (x_{i+1}) a partir da actual x_i é:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} = x_i - \frac{3x^2 + 20 - 7x^6 - 8x^3 - 6x}{6x - 42x^5 - 24x^2 - 6}$$



Problema 26.2 (Resolução V)

Método de Newton

Após seleccionar-se $\varepsilon=0,001$, e escolher-se $x_i=1$ como solução experimental inicial, pode-se ver na tabela seguinte as soluções restantes:

Iteração i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	x_{i+1}
1	1	15	2	-66	1,030303
2	1,030303	15,0291	-0,11991	-74,0559	1,028684
3	1,028684	15,0292	-0,00037	-73,6037	1,028679
Parar					



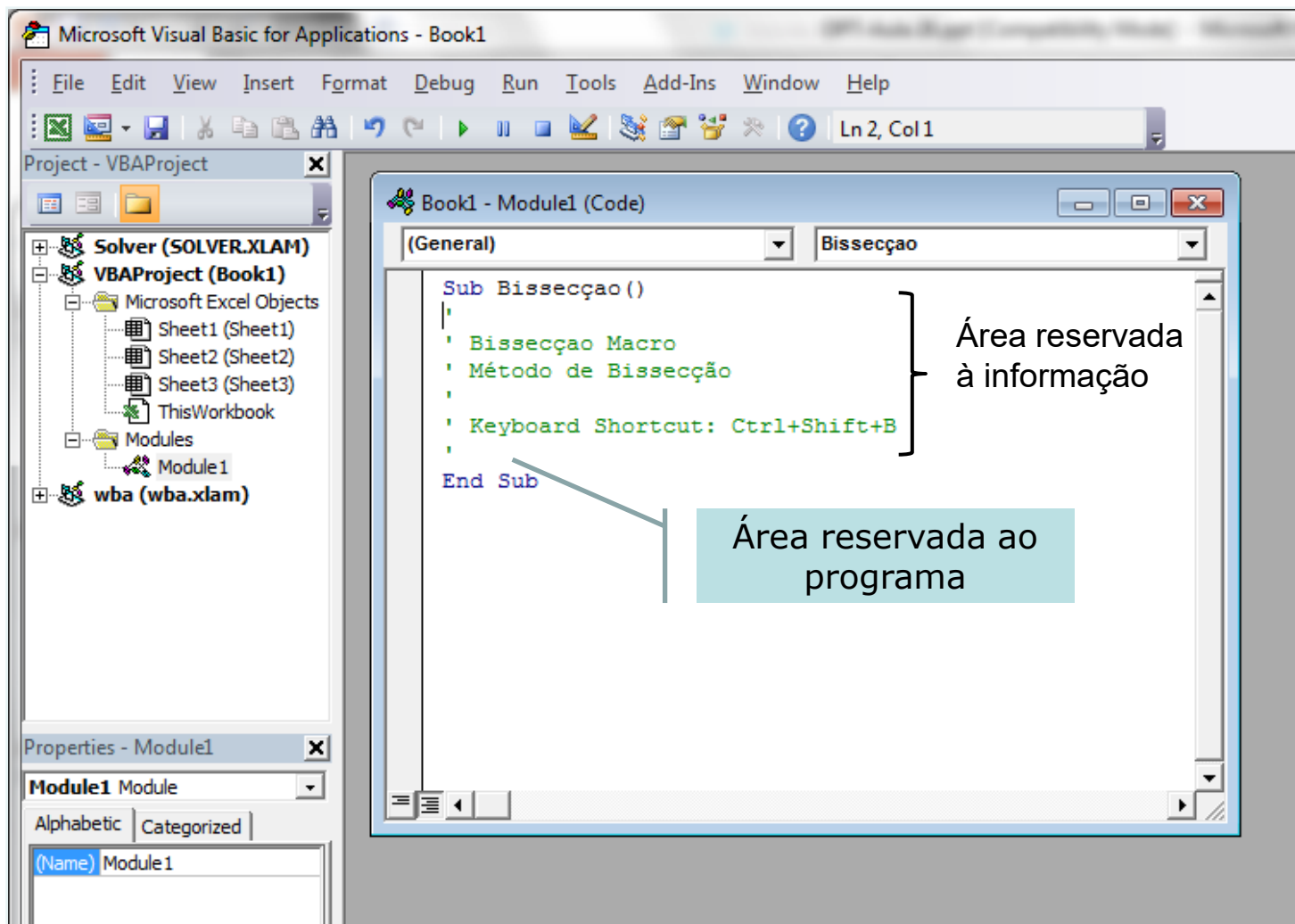
Macro do Excel (I)

The image shows two overlapping Excel dialog boxes with callouts explaining their components:

- Record Macro Dialog (Left):**
 - Nome do macro:** Points to the 'Macro name' field containing 'Bisseccao'.
 - Atalho de acesso:** Points to the 'Shortcut key' field showing 'Ctrl+Shift+ B'.
 - Descrição do Macro:** Points to the 'Description' field containing 'Método de Bisseccao'.
- Macro Dialog (Right):**
 - Parar de editar o Macro:** Points to the 'Stop Recording' button in the 'Macros' ribbon.
 - Editar o macro:** Points to the 'Edit' button in the 'Macro' dialog.



Macro do Excel (II)





Macro do Excel (III)

L36																fx	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		
17					-120												
18					-140												
19																	
20																	
21																	
22		Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)					Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)
23		0		0	2	1	15	FALSE									
24		1	2	1	2	1.5	-0.58594	FALSE									
25		2	-88.9844	1	1.5	1.25	12.61444	FALSE									
26		3	-25.1404	1	1.25	1.125	14.64264	FALSE									
27		4	-8.53476	1	1.125	1.0625	14.98525	FALSE									
28		5	-2.65496	1	1.0625	1.03125	15.02896	FALSE									
29		6	-0.19016	1	1.03125	1.015625	15.02303	FALSE									
30		7	0.937417	1.015625	1.03125	1.023438	15.0282	FALSE									
31		8	0.381974	1.023438	1.03125	1.027344	15.02913	Parar									
32																	
33																	
34																	

Planilha onde se vai escrever os resultados do programa



Macro do Excel – Programa (IV)

Sub Bisseccao()

,

' Bisseccao Macro

' Método de Bisseccção

,

' Keyboard Shortcut: Ctrl+Shift+B

,

Dim I, Xesq, Xdir, Xnovo, dFx, Fx

I = 0

KI = 23

K = 23

Xesq = 0

Xdir = 2



Macro do Excel – Programa (V)

Do

K = 23 + I

Range("J" & K).Value = I

Range("L" & K).Value = Xesq

Range("M" & K).Value = Xdir

Xnovo = (Xdir + Xesq) / 2

Range("N" & K).Value = Xnovo

$$Fx = Xnovo^3 + 20 * Xnovo - Xnovo^7 - 2 * Xnovo^4 - 3 * Xnovo^2$$

Range("O" & K).Value = Fx

Range("P" & K).Value = "Continuar"



Macro do Excel – Programa (VI)

I = I + 1

KI = KI + 1

$dFx = 3 * X_{novo}^2 + 20 - 7 * X_{novo}^6 - 8 * X_{novo}^3 - 6 * X_{novo}$

Range("K" & KI).Value = dFx

If dFx < 0 Then Xesq = Xesq Else Xesq = Xnovo

If dFx > 0 Then Xdir = Xdir Else Xdir = Xnovo

Loop Until (Abs((Xesq - Xdir) / 2) <= 0.0007)

Range("P" & K).Value = "Parar"

Range("K" & KI).Value = ""

End Sub



Macro do Excel (VI)

Iteração	df/dx	x-	x+	Novo x	f(x)	Comentário
0		0	2	1	15	Continuar
1	2	1	2	1,5	-0,58594	Continuar
2	-88,9844	1	1,5	1,25	12,61444	Continuar
3	-25,1404	1	1,25	1,125	14,64264	Continuar
4	-8,53476	1	1,125	1,0625	14,98525	Continuar
5	-2,65496	1	1,0625	1,03125	15,02896	Continuar
6	-0,19016	1	1,03125	1,015625	15,02303	Continuar
7	0,937417	1,015625	1,03125	1,023438	15,0282	Continuar
8	0,381974	1,023438	1,03125	1,027344	15,02913	Continuar
9	0,09802	1,027344	1,03125	1,029297	15,02919	Continuar
10	-0,04554	1,027344	1,029297	1,02832	15,0292	Parar

Resultados do programa