# Optimização

## Aula 29



Prof. Doutor Engº Jorge Nhambiu

# Programação Não Linear com Restrições

**Aula 29: Programação Não-Linear - Funções de Várias Variáveis com Restrições**

- Ponto Regular;
- Introdução aos Multiplicadores de Lagrange;
- Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias;
- Sentido Geométrico dos multiplicadores de Lagrange;
- Teorema dos Multiplicadores de Lagrange;
- Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K-T);
- Optimização Global.

# Programação Não Linear com Restrições


## Onde se Aplica a Programação Não Linear com Restrições?

**Engenharia Mecânica:** Optimização de componentes estruturais, de trocadores de calor, de turbinas e de sistemas energéticos.

**Engenharia Eléctrica:** Planeamento de redes, controlo de sistemas e minimização de perdas em redes HV/MV.

**Engenharia Química e de Processos:** Optimização de reações químicas, balanços energéticos e misturas de compostos.

**Economia e Finanças:** Maximização de lucros, minimização de custos e gestão de portfólios sob restrições.

**Ciência de Dados e Inteligência Artificial:** Treino de redes neurais e problemas de regressão não linear com restrições.

# Programação Não Linear com Restrições

Em que consiste o método geral de Optimização?

O método geral de optimização consiste em procurar um vector de variáveis $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ para minimizar a função custo:

$$f\left(x\right)=f\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)$$

*sujeita a restrições do tipo igualdade*

$$h_i(x)=0 \qquad\qquad i=1 \text{ até } p$$

*e as restrições do tipo desigualdade*

$$g_i(x)\leq 0 \qquad\qquad i=1 \text{ até } m$$

# Programação Não Linear com Restrições

As restrições de desigualdade da equação serão inicialmente ignoradas para discutir-se o teorema de Lagrange. O teorema será depois estendido para as restrições de desigualdade com vista a obter as condições necessárias de Kuhn - Tucker para os modelos gerais.

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Cada restrição tem um multiplicador escalar associado a ela, o qual se chama **Multiplicador de Lagrange**. Estes multiplicadores têm um papel importante na teoria de optimização bem como nos métodos numéricos que serão posteriormente discutidos.

O conceito de Multiplicadores de Lagrange é bastante geral. Ele é utilizado em muitas aplicações de engenharia para alem da optimização. Os Multiplicadores de Lagrange para as restrições podem ser interpretados como a força necessária para impor as restrições.

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Veja-se agora que condições matemáticas são satisfeitas no ponto mínimo C. Represente-se o ponto óptimo por $(x_1^*, x_2^*)$. Para derivar as condições e introduzir os **Multiplicadores de Lagrange**, primeiro assume-se que as restrições do tipo igualdade podem ser usadas para resolver uma variável em função da outra, isto é assume-se que pode se escrever:

$$x_2 = \phi(x_1) \qquad (a)$$

Onde $\phi$ é uma função apropriada de $x_1$. Em certos casos não é possível explicitar a função $\phi(x_1)$, mas para o efeito de cálculo das derivadas assume-se a sua existência.

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Usando as regras de diferenciação em cadeia pode-se escrever

$$\frac{df\left(x_1,x_2\right)}{dx_1}=\frac{\partial f\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial f\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}=0 \qquad \text{(b)}$$

Substituindo a equação (a), a equação precedente pode ser escrita para o ponto óptimo como:

$$\frac{\partial f\left(x_1^*,x_2^*\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial f\left(x_1^*,x_2^*\right)}{\partial x_2}\frac{d\phi}{dx_1}=0 \qquad \text{(c)}$$



# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Para não complicar-se, diferencia-se a equação das restrições $h(x_1,x_2)=0$, no ponto $(x_1^*,x_2^*)$ como:

$$\frac{dh\left(x_1^*,x_2^*\right)}{dx_1}=\frac{\partial h\left(x_1^*,x_2^*\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial h\left(x_1^*,x_2^*\right)}{\partial x_2}\frac{d\phi}{dx_1}=0 \qquad \text{(d)}$$

resolvendo $d\phi\,/\,dx_1$ obtém-se:

$$\frac{d\phi}{dx_1}=-\frac{\partial h\left(x_1^*,x_2^*\right)/\partial x_1}{\partial h\left(x_1^*,x_2^*\right)/\partial x_2} \qquad \text{(e)}$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Substituindo agora $d\phi / dx_1$ da equação (e) na (d) obtém-se:

$$\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1} - \frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2}\left(\frac{\partial h\left(x_1^*, x_2^*\right)/\partial x_1}{\partial h\left(x_1^*, x_2^*\right)/\partial x_2}\right) = 0 \qquad \text{(f)}$$

Se definir-se $v$ como:

$$v = -\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*\right)/\partial x_2}{\partial h\left(x_1^*, x_2^*\right)/\partial x_2} \qquad \text{(g)}$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

e substituir-se na equação (f) fica-se com:

$$\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1} + v\frac{\partial h\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{(h)}$$

Também voltando arranjar a equação (g) que define ***v*** obtém-se:

$$\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2} + v\frac{\partial h\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

*As equações (h) e (i) ao longo das quais $h(x_1,x_2)=0$ são as condições necessárias para a optimização.*

*Um ponto que viole estas condições não pode ser um ponto mínimo para o problema.*

*O escalar **v** definido na equação (g) é chamado multiplicador de Lagrange.*

*Se o ponto mínimo for conhecido pode-se utilizar a equação **v** para conhecer o seu valor.*

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

É costume usar-se o que é conhecido como função de Lagrange, para se escrever as condições necessárias. A função de Lagrange é designada por $L$ e definida usando as funções de restrições e de custo, como:

$$L\left(x_1, x_2, v\right) = f\left(x_1, x_2\right) + vh\left(x_1, x_2\right) \qquad \text{(h)}$$

é visto que as condições necessárias das equações (h) e (i) dadas em termos de $L$ são:

$$\frac{\partial L\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial L\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2} = 0$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Em notação matricial pode-se ver que o gradiente de **L** é zero no ponto candidato a mínimo, isto é escrevendo esta condição usando a equação (g), ou escrevendo esta condição usando as equações (h) e (I) na forma matricial, obtém-se:

$$\nabla f\left(x^*\right) + v \nabla h\left(x^*\right) = 0 \qquad (m)$$

Onde o gradiente das funções custo e restrição são dados por:

$$\nabla f\left(x^*\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla h = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

A equação (m) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\nabla f\left(x^{*}\right) = -v \nabla h\left(x^{*}\right) \qquad (n)$$

A ultima expressão dá o sentido geométrico das condições necessárias. Ela mostra que no ponto mínimo candidato, o gradiente da função custo e das funções restrições, estão ao longo da mesma linha e são proporcionais um ao outro e o multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{v}$ é a constante de proporcionalidade.

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Considere-se o problema de minimizar *f(x)* sujeita as restrições do tipo igualdade $h_i(x)=0$, onde $i=1$ até p. Faça-se $x^*$ um ponto regular que é um mínimo local para o problema, daí existem multiplicadores de Lagrange tais como:

$$\frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_1}+\sum_{j=1}^{p} v_j^* \frac{\partial h_j\left(x^*\right)}{\partial x_i}=0 \qquad i=\ 1\ at\acute{e}\ n$$

$$h_j\left(x^*\right)=0 \qquad j=1\ at\acute{e}\ p$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Escrevendo esta condição em termos de função de Lagrange obtém-se:

$$L(x,v) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j(x) = f(x) + v^T h(x)$$

Daí pode-se escrever:

$$\nabla L(x^*, v^*) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial L(x^*, v^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1 \; até \; n$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Diferenciando ***L(x,ν)*** em relação a $v_j$ pode-se converter as restrições de igualdade em:

$$\frac{\partial L\left(x^*, v^*\right)}{\partial v_j} \equiv h_j\left(x^*\right) = 0 \qquad\qquad j = 1 \; at\acute{e} \; p$$

Estas últimas condições mostram que a função de Lagrange é estacionária em relação a **x** e a **v.**

# Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Qualquer ponto que não satisfaça as condições do teorema não pode ser um ponto mínimo local, contudo um ponto que satisfaça as condições não tem que ser um mínimo. É um simples candidato a ponto mínimo que pode ser um ponto de inflexão ou um máximo.

As $\boldsymbol{n}$ variáveis $\boldsymbol{x}$ e os **p** multiplicadores $\boldsymbol{v}$ são desconhecidos e as condições necessárias das equações apresentadas providenciam equações suficientes para determina-los.

Os multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{v_i}$, não têm sinal, isto é, podem ser positivos, negativos ou zero. Isto contrasta com os multiplicadores de Lagrange para problemas com restrições do tipo desigualdade nos quais é requerido que sejam não negativos.

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Os gradientes das condições da equação de Lagrange podem ser arranjados na seguinte forma:

$$\frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_i} = -\sum v_j^* \frac{\partial h_j\left(x^*\right)}{\partial x_i} \qquad i = 1 \; at\acute{e} \; n$$

Desta forma mostra-se que o gradiente da função custo é uma combinação linear das restrições no ponto candidato a mínimo.

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Os problemas de optimização também oferecem restrições do tipo desigualdade na forma:

$$g_i(x) \leq 0 \qquad\qquad i = 1 \; até \; m$$

Pode-se transformar as restrições do tipo desigualdade, em do tipo igualdade por meio de adição a ela de novas variáveis, estas variáveis são chamadas **variáveis de folga**

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Como as restrições encontram-se na forma $\leq$ o seu valor é negativo ou zero, então as variáveis de folga devem ser não negativas, isto é positivas ou zero, para transformar a desigualdade em igualdade. Uma restrição de desigualdade do tipo $g_i(x) \leq 0$ é equivalente a uma restrição de igualdade do tipo $g_i(x) + s_i = 0$, onde $s_i \geq 0$ é a variável de folga.

Introduzindo uma nova variável $s_i$ tem-se de introduzir uma restrição do tipo $s_i \geq 0$ para cada restrição do tipo desigualdade. Isto aumenta a dimensão do problema de optimização.

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

As restrições do tipo $s_i \geq 0$ podem ser evitadas se usar-se $s_i^2$ como variáveis de folga em vez de $\mathbf{s}_i$. As restrições de desigualdade do tipo $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ então, são convertidas para igualdades do tipo:

$$g_i + s_i^2 = 0$$

Onde $s_i$ tem um valor real

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

As ***m*** equações necessárias para determinar as variáveis de folga obtêm-se da derivação da equação de **Lagrange** em função das variáveis de folga da seguinte maneira:

$$\left(\partial L / \partial s = 0\right)$$

Note-se que uma vez o ponto do óptimo seja especificado ele pode ser usado para calcular a variável de folga, pela equação:

$$g_i + s_i^2 = 0$$

# Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias

Se a restrição for satisfeita neste ponto, isto é se $g_i(x) \leq 0$, então $s_i^2 \geq 0$.

Se for violada então $s_i^2$ é negativo o que não é aceitável, isto é o ponto candidato não é um mínimo.

Esta é uma condição necessária adicional para os multiplicadores de Lagrange do tipo " ≤ " dada como:

$$u_j^* \geq 0 \qquad\qquad j = 1 \text{ até } m$$

Onde $u_j^*$ é o multiplicador de Lagrange para a j-ésima restrição de desigualdade

# Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K - T)

Seja *x** um ponto regular de um conjunto de restrições e é um mínimo local para *f(x)* sujeito as restrições:

$$h_i(x) = 0; \qquad i = 1 \text{ até } p$$

$$g_i(x) \leq 0; \qquad i = 1 \text{ até } m$$

Define-se a função de Lagrange para o problema como:

$$L(x, v, u, s) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i\left(g_i(x) + s_i^2\right)$$

$$= f(x) + v^T h(x) + u^T\left(g(x) + s^2\right)$$

# Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K - T)

Daí existem multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{v^*}$ (um vector **p**) e $\boldsymbol{u^*}$ (um vector **m**) tal que o Lagrangeano seja estacionário em relação a $\boldsymbol{x_j}$, $\boldsymbol{v_i}$, $\boldsymbol{u_i}$ e $\boldsymbol{s_i}$, isto é:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0;$$

$$h_i\left(x^*\right) = 0 \qquad i = 1 \text{ } até \text{ } p$$

$$g_i\left(x^*\right) + s_i^2 = 0 \qquad i = 1 \text{ } até \text{ } m$$

$$u_i^* s_i = 0 \qquad i = 1 \text{ } até \text{ } m$$

$$u_i^* \geq 0 \qquad i = 1 \text{ } até \text{ } m$$

# Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K - T)

São de salientar os seguintes pontos importantes relativos as condições necessárias de primeira ordem de Kuhn – Tucker:

*As condições K-T não são aplicáveis nos pontos não regulares.*

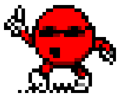
*Qualquer ponto que não satisfaça as condições K-T não pode ser um mínimo local, a não ser que seja um ponto irregular. Os pontos que satisfazem as condições são chamados pontos Kuhn-Tucker.*

# Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K - T)

Os pontos que satisfazem as condições K-T podem ser restritos ou não restritos. Eles são não restritos quando não há igualdades e todas as desigualdades são inactivas. Se o ponto candidato for não restrito ele pode ser um mínimo ou máximo local ou um ponto de inflexão dependendo da forma da matriz Hessiana.

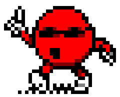
Se houver restrições de igualdade e as desigualdades não forem activas (i.e. u=0), daí os pontos que satisfazem as condições K-T são só estacionários. Eles podem ser mínimo máximo ou ponto de inflexão.

# Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K - T)



Se certas restrições de desigualdade estiverem activas e o seus multiplicadores forem positivos, daí os pontos que satisfazem as condições K-T não podem ser um máximo local da função custo (ele pode ser um máximo local se as desigualdades activas tiverem zero multiplicadores). Ele também não pode ser um mínimo local; dependerá das condições necessárias e suficientes de segunda ordem, já anteriormente discutidas.

# Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K - T)



É importante notar que o valor dos multiplicadores de Lagrange para cada restrição depende da forma funcional da restrição. Por exemplo os multiplicadores de Lagrange para a restrição $x/y - 10 \leq 0$ $(y>0)$ é diferente da mesma restrição escrita na forma $x - 10y \leq 0$, ou $0{,}1\ x/y - 1 \leq 0$. O óptimo do problema não muda trocando a forma da restrição, mas os multiplicadores de Lagrange alteram-se.

# Condições KT. Exemplo.

*Redução à forma padrão:*

*Maximizar* $z = 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2$

*sujeito a*

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

*Minimizar* $z = -2x_1 \cdot x_2 - x_2^2$

*sujeito a*

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

*Introduz-se a função de Lagrange, deriva-se esta função em relação a $x_1$ e $x_2$ e depois introduzem-se as condições KT.*

$$L(x_1, x_2, u) \; -2x_1x_2 - x_2^2 + u\left(x_1 + 2x_2 - 4 + s^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_2 + u = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_1 - 2x_2 + 2u = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 4 + s^2 = 0$$

$$us = 0$$

$$u \geq 0$$

*Obtém-se um sistema de quatro equações com quatro incógnitas*

# T. Exemplo.

*O sistema pode ser resolvido fazendo* $u = 0$

$$
\begin{aligned}
&-2x_2 + u = 0 \\
&-2x_1 - 2x_2 + 2u = 0 \\
&x_1 + 2x_2 - 4 + s^2 = 0 \\
&us = 0 \\
&u \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
s^2 &= 4
\end{aligned}
\qquad f(x_1,x_2) = 0
$$

*Fazendo agora* $s = 0$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 1,33 \\
x_1 &= 1,33 \\
u &= 2,66
\end{aligned}
\qquad f(x_1,x_2) = -5,33
$$

*O ponto máximo tem as coordenadas* $x_1=1,33$ *e* $x_2=1,33$ *e corresponde ao valor da função* $f(x_1,x_2)=5,33$

# Optimização Global

*Uma função é convexa só e só se a sua Hessiana for ao **menos positiva semi - definida** ou **positiva definida** em todos os pontos de domínio da função; e ela é chamada **estritamente convexa** se a Hessiana for **positiva definida** em todos os pontos.*

*Uma restrição do tipo igualdade ou desigualdade sempre define a região de possível convexidade do problema.*

*Uma restrição não linear do tipo igualdade sempre define a região de não convexidade do problema.*

*Se todas as funções restrições do tipo igualdade forem lineares e todas as restrições do tipo desigualdade escritas na forma standart (minimização da função com restrições de desigualdade do tipo menor ou igual) forem convexas, a região provável é convexa; por outro lado pode ou não ser convexa.*

# Optimização Global

*Se a função custo for convexa sobre uma região convexa possível, o problema é chamado problema de programação convexa.*

*Para um problema de programação convexa, as condições necessárias Khun-Tucker de primeira ordem são também suficientes, e qualquer mínimo local é também mínimo global.*

*Os problemas não convexos podem também ter pontos de mínimo global.*

# Condições De Segunda Ordem Para Optimização Com Restrições

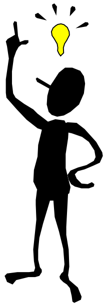
A solução das condições necessárias dão um candidato a mínimo.

As condições suficientes determinam quando um ponto candidato é um mínimo local ou não.

Primeiro vai-se abordar as condições suficientes para problemas de programação convexa e só depois para problemas de programação no geral.

# Condições suficientes para problemas convexos

Quais são as condições suficientes para problemas convexos?



Para problemas de programação convexos as condições necessárias de primeira ordem K-T também se mostram suficientes. Dai se poder-se mostrar a convexidade do problema, qualquer solução das condições necessárias satisfaz automaticamente as condições suficientes.

# Condições suficientes para problemas convexos

**Teorema** (I)

Se *(fx)* for uma função custo convexa definida no domínio convexo (conjunto de restrições) dai as condições Kuhn-Tucker de primeira ordem são necessárias como também suficientes para definirem um mínimo global.

Para se usar o teorema deve-se mostrar que o conjunto de restrições **S** é convexo e dado por:

$$S = \{x / h_i(x) = 0,\ i = 1 \text{ até } p;\ g_i(x)=0;\ i = 1 \text{ até } m\}$$

Todas as restrições de igualdade $h_i(x)$ devem ser lineares e a Hessiana das restrições de desigualdade $g_i(x)$ deve ser positiva semi-definida ou positiva definida para a convexidade do conjunto **S**.

# Condições suficientes para problemas convexos

**Teorema** (II)

Se um problema com restrições tiver uma função não linear do tipo restrição de igualdade ele não pode ser convexo.

Se todas as funções do problema forem lineares quanto as sua variáveis, daí o problemas é convexo.

Depois de se mostrar a convexidade de **S**, é necessário mostra-se que ***f(x)*** também é convexa em **S** para o problema ser convexo.

Para estes problemas qualquer ponto que satisfaça as condições necessárias de K-T dará um mínimo global.

# Condições de segunda ordem para Problemas em Geral

Nos casos não sujeitos à restrições usa-se a informação de segunda ordem que se obtém das funções (isto é a curvatura) no ponto candidato **x*** para determinar se ele é um candidato a mínimo local.

Nos problemas sem restrições nos quais a suficiência local do teorema requer que a parte quadrática da expansão em séries de Taylor para a função em **x*,** seja positiva para todas as variações **d,** diferentes de zero. Nos casos restritos deve-se também considerar as restrições activas em **x*** para determinar as variações sensíveis de **d**.

# Condições de segunda ordem para Problemas em Geral

Considere-se só os pontos $x=x^*+d$ na vizinhança de **x*** que satisfaçam as equações de restrições activas.

Qualquer $d \neq 0$ satisfazendo as restrições activas de primeira ordem deve estar no plano tangente restrito. Como os **d's** são ortogonais ao gradiente das restrições activas (os gradientes das restrições são normais ao plano tangente as restrições). Daí o produto escalar de $d$ por cada gradiente de restrições $h_i$ e $g_i$ deve ser zero, isto é:

$$\nabla h_i^T d = 0 \quad e \quad \nabla g_i^T d = 0,$$

Daí, a direcção $d$ é determinante para definir a região possível em torno do ponto $x^*$.

Note-se que só as restrições de desigualdade activas $(g_i=0)$ são usadas para determinar $d$.

# Condições de segunda ordem para Problemas em Geral

**Teorema (I):**

Seja ***x**** que satisfaz as condições necessárias K-T de primeira ordem para problemas gerais de optimização. Define-se a Hessiana da função de Lagrange ***L*** no ponto ***x**** como:

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f + \sum_{i=1}^{P} v_i^* \nabla h_i^2 + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla \mathrm{g}_\mathrm{i}^2$$

# Condições de segunda ordem para Problemas em Geral

**Teorema (II):**
Seja diferente de zero a direcção provável *(d≠0)* satisfazendo os seguintes sistemas lineares no ponto x*.

$$\nabla h_i^T d = 0 \qquad i = 1 \text{ } até \text{ } p$$

$$\nabla g_i^T d = 0 \qquad i = 1 \text{ } até \text{ m}$$

para todas as desigualdades activas (isto é aqueles i com $g_i(x^*) = 0$).
Daí se ***x**** for um mínimo local para um problema de optimização será certo que:

$$Q \geq 0 \qquad \text{Onde:} \qquad Q = d^T \nabla^2 L\left(x^*\right) d$$

*Note-se que qualquer ponto que não satisfaça as condições necessárias de segunda ordem não pode ser um ponto mínimo local.*

# Condições suficientemente fortes para Problemas Restritos no Geral

**Teorema (I):**

Seja $\boldsymbol{x}^*$ satisfazendo as condições necessárias K-T de primeira ordem para problemas gerais de optimização. Define-se a Hessiana da função de Lagrange $\boldsymbol{L}$ no ponto $\boldsymbol{x}^*$ como:

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f + \sum_{i=1}^{P} v_i^* \nabla h_i^2 + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla \mathrm{g}_\mathrm{i}^2$$

Defina-se a direcção possível (***d≠0***) como solução dos sistemas lineares.

$$\nabla h_i^T d = 0 \quad i = 1 \; ate \; p$$

$$\nabla g_i^T d = 0 \quad i = 1 \; até \; m, \; para \; desigualdades \; activas \; com \; u_i > 0$$

# Condições suficientemente fortes para Problemas Restritos no Geral

**Teorema (II):**

Seja também:

$$\Delta g_i^T d \leq 0 \qquad \textit{para as restrições com } u_i = 0.$$

$$Se \qquad Q \geq 0 \quad onde: \; Q = d^T \nabla^2 L\left(x^*\right) d$$

Daí ***x**** é um ponto mínimo local isolado (isolado significa que não há outro ponto mínimo local na vizinhança de ***x****).

Este resultado pode ser sumariado no teorema seguinte:

# Condições suficientemente fortes

**Teorema (I)**

Seja ***x**** satisfazendo as condições necessárias K-T de primeira ordem para um problema de optimização no geral, se:

$$\nabla^2 L\left(x^*\right)$$

for positivo definido, ***x**** é um ponto mínimo isolado.

Deve ser enfatizado que se a equação da Hessiana de Lagrange, não for satisfeita não se pode concluir não ser ***x**** um mínimo local. Pode ser um mínimo local mas não isolado. Note-se também que o teorema não pode ser usado para qualquer ***x**** se o assumido não for satisfeito. Nesses casos, não se pode tirar qualquer conclusão acerca do ponto ***x****.

# Condições suficientemente fortes

**Teorema (II)**

Um caso que acontece em algumas aplicações e precisa de uma menção especial, ocorre quando o número total de restrições activas (com a última uma desigualdade) no ponto candidato a mínimo **x*** for igual ao número de variáveis independentes do problema. Desde que **x*** satisfaça as condições **K-T** o gradiente de todas as restrições activas são linearmente independente. Daí a única solução é **d=0** e o teorema para **Condições suficientes para problemas restritos no geral** não pode ser usado. Contudo desde que **d=0** for a única solução, não há direcção provável na vizinhança que possa reduzir a função custo no futuro. Daí o ponto **x*** é candidato a mínimo local da função custo.

# Programação Não Linear com Restrições (Resolução com o Solver)

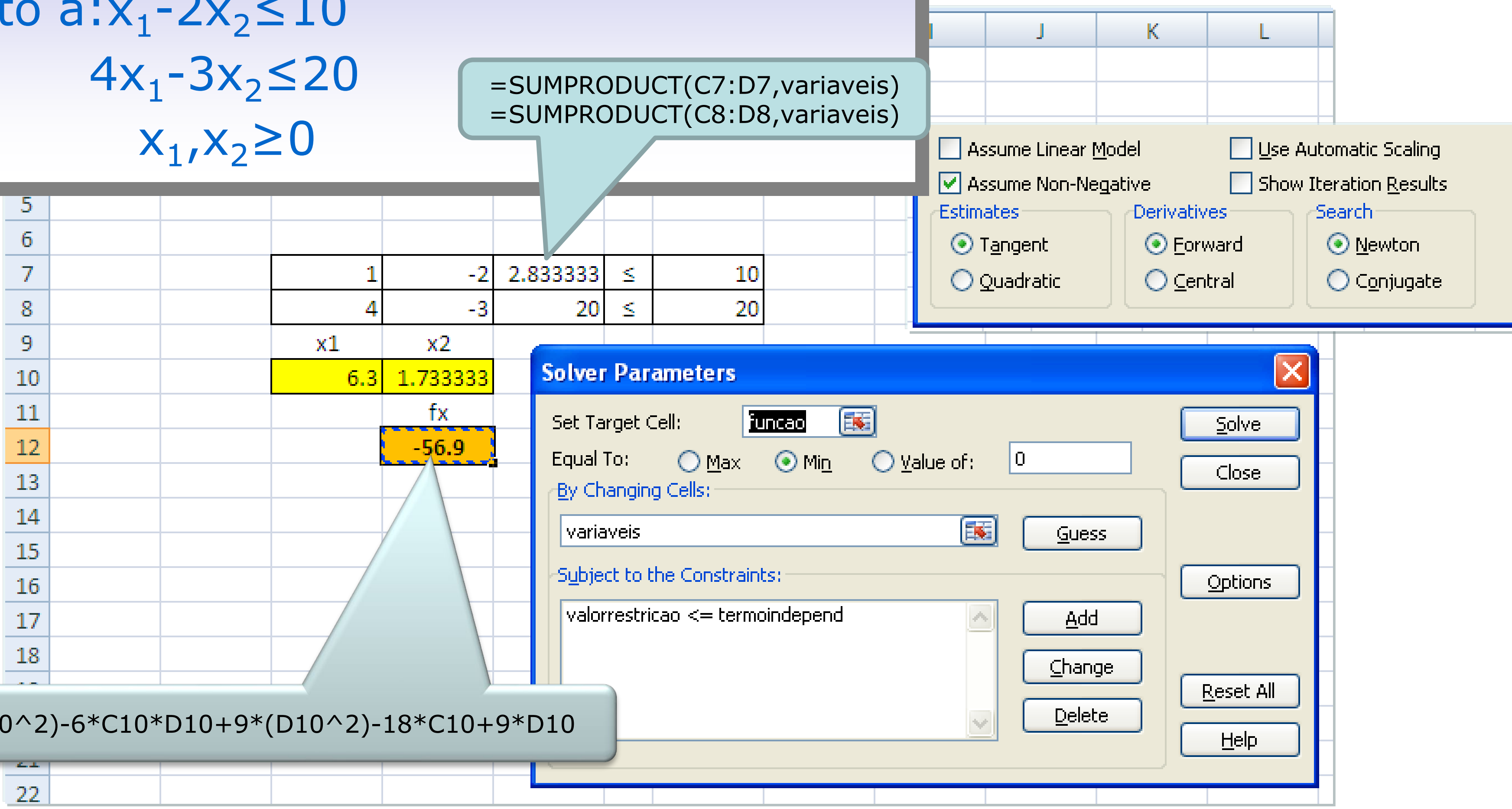
Maximizar $f(x)=2x_1^2-6x_1x_2+9x_2^2-18x_1+9x_2$

Sujeito a: $x_1-2x_2\le 10$

$4x_1-3x_2\le 20$

$x_1,x_2\ge 0$

=SUMPRODUCT(C7:D7,variaveis)
=SUMPRODUCT(C8:D8,variaveis)




=2*(C10^2)-6*C10*D10+9*(D10^2)-18*C10+9*D10