



Optimização

Aula 30



Programação Não Linear com Restrições

Aula 30: Programação Não-Linear - Funções de Várias Variáveis com Restrições (Prática)

- Ponto Regular;
- Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias;
- Condições Necessárias Kunhn-Tucker (K-T);
- Programação Convexa.



Problema 30.1



Encontre os pontos estacionários, com as condições K-T, para a seguinte função:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 - 2x_1$$

s.a.

$$x_1 + x_2 = 4$$





Problema 30.1 (Resolução I)



A equação de Lagrange determina-se de:

$$L(x_1, x_2, \nu) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 - 2x_1 + \nu(x_1 + x_2 - 4)$$



As condições K-T dão o seguinte:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 - 5x_2 - 2 + \nu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 5x_1 + \nu = 0$$

$$x_1 + x_2 - 4 = 0$$



Problema 30.1 (Resolução II)

Obtém-se um sistema de três equações com três incógnitas

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 - 2 + \nu = 0 \\ 4x_2 - 5x_1 + \nu = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases}$$



Problema 30.1 (Resolução III)

Resolvendo-o por substituição

$$\begin{cases} 24 - 6x_2 - 5x_2 - 2 + \nu = 0 \\ 4x_2 - 20 + 5x_2 + \nu = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 22 - 11x_2 + \nu = 0 \\ -20 + 9x_2 + \nu = 0 \end{cases}$$



Conclui-se que o ponto estacionário tem as coordenadas $x_1=1,9$ e $x_2=2,1$; e o multiplicador de Lagrange $\nu=1,1$

$$\begin{cases} x_1 = 1,9 \\ x_2 = 2,1 \\ \nu = 1,1 \end{cases}$$



Problema 30.2



Encontre a solução óptima do seguinte problema:

$$\text{Maximize } f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - x_2^3$$

s.a :

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

com

$$x_1, x_2 \geq 0$$





Problema 30.2 (Resolução I)

*Passando o problema para a
forma padrão tem-se*

$$\text{Minimize } -f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^3$$

s.a :

$$x_1 + x_2 - 1 \leq 0$$

com

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Problema 30.2 (Resolução II)

*Aplicando as condições K-T
obtém-se:*

$$L(x_1, x_2, u, s) = -x_1 - 2x_2 + x_2^3 + u(x_1 + x_2 - 1 + s^2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, u, s)}{\partial x_1} = -1 + u = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, u, s)}{\partial x_2} = -2 + 3x_2^2 + u = 0$$

$$x_1 + x_2 - 1 + s^2 = 0$$

$$us = 0$$

$$u \geq 0$$



Problema 30.2 (Resolução III)

Obtém-se um sistema de quatro equações com quatro incógnitas

$$\begin{cases} -1 + u = 0 \\ -2 + 3x_2^2 + u = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 + s^2 = 0 \\ us = 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo $u=0$, obtém-se:

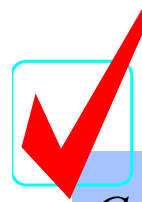
$$\begin{cases} -1 = 0 \Rightarrow \text{impossível} \\ -2 + 3x_2^2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 + s^2 = 0 \\ us = 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto não pode ser candidato pois existe a contradição de -1 ser igual a zero.



Problema 30.2 (Resolução IV)

Fazendo $s=0$, obtém-se:



Conclui-se que o ponto estacionário que maximiza a função tem as coordenadas: $x_1, x_2 = (0,423; 0,577)$, o multiplicador de Lagrange $u=1$ e o valor da função nesse ponto é de 1,385.

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ -2 + 3x_2^2 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ u \geq 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u = 1 > 0 \\ x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 \\ x_1 = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,423 \end{array} \right.$$



Problema 30.3



Resolva o seguinte problema utilizando as condições K-T:

$$\text{Minimize } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_1^2 - x_2^2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





Problema 30.3 (Resolução I)

Passando o problema para a forma padrão tem-se:

$$\text{Minimize } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 - 4 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2^2 + 4 \leq 0$$



Problema 30.3 (Resolução II)

A equação de Lagrange determina-se de:

$$L(x_1, x_2, \nu) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \nu(x_1 + 2x_2 - 4) + u(-x_1^2 + x_2^2 + 4 + s^2)$$

As condições K-T dão o seguinte:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 + \nu - 2ux_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 + 2\nu + 2ux_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 4 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2^2 + 4 + s^2 = 0$$

$$us = 0$$

$$u \geq 0$$



Problema 30.3 (Resolução III)

Obtém-se um sistema de cinco equações com cinco incógnitas

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + v - 2ux_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2v + 2ux_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + 4 + s^2 = 0 \\ us = 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo $u=0$, obtém-se:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + v = 0 & x_1 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 2v = 0 & x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 & v = 2 \\ -x_1^2 + x_2^2 + 4 + s^2 = 0 & s^2 = -9 \\ us = 0 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto não pode ser candidato pois x_1 viola a condição de não negatividade e também $s^2 = -9$ o que torna-se impossível.



Problema 30.3 (Resolução IV)

Fazendo $s=0$, obtém-se:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + v - 2ux_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2v + 2ux_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + 4 = 0 \\ us = 0 \\ u \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2,194 \\ x_2 &= 0,903 \\ v &= -2,562 \\ u &= 0,622 \end{aligned}$$



Conclui-se que o ponto com as coordenadas $(x_1, x_2) = (2,194; 0,903)$ é o ponto que minimiza a função com o valor de $f(x) = 9,592$ com os valores de $v = -2,562$ e $u = 0,622$.



Problema 30.4



Pretende-se projectar um termopermutador de calor de tubo e carcaça com o comprimento L . O objectivo principal do projecto consiste em maximizar a área de transferência de calor do termopermutador, sabendo-se que a área da secção transversal da carcaça é de 2500 cm^2 e que o raio mínimo dos tubos disponíveis no mercado é de $0,5 \text{ cm}$. Estabeleça as condições K-T para este problema de optimização e determine o número de tubos necessário para optimizar a transferência de calor.





Problema 30.4 (Resolução I)



A função custo consiste em determinar a área máxima de transferência de calor, que se obtém do perímetro do tubo, multiplicado pelo comprimento do tubo e pelo número de tubos e determina-se de:

$$\text{Max } 2\pi RLN$$



A área disponível para a colocação dos tubos não deve ultrapassar os 2500 cm².

$$\pi R^2 N \leq 2500$$



O raio mínimo de tubos no mercado é de 0,5 cm.

$$R \geq 0,5$$



Problema 30.4 (Resolução II)



Como a maximização do termopermutador não depende da variação do comprimento do tubo mas só da secção da carcaça e dos diâmetros dos tubos o problema passa a ser:

$$\text{Max } 2\pi RN$$

sa :

$$\pi R^2 N \leq 2500$$

$$R \geq 0,5$$



Problema 30.4 (Resolução III)

Passando o problema para a forma padrão tem-se

$$\text{Min } -2\pi RN$$

$$\pi R^2 N - 2500 \leq 0$$

$$0,5 - R \leq 0$$

Introduzindo as variáveis de folga obtém-se:

$$\text{Min } -2\pi RN$$

$$\pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0$$

$$0,5 - R + s_2^2 = 0$$



Problema 30.4 (Resolução IV)

*Aplicando as condições K-T
obtém-se:*

$$L = -2\pi RN + u_1 (\pi R^2 N - 2500 + s_1^2) + u_2 (0,5 - R + s_2^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial N} = -2\pi R + u_1 \pi R^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = -2\pi N + 2u_1 \pi RN - u_2 = 0$$

$$\pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0$$

$$0,5 - R + s_2^2 = 0$$

$$u_1 s_1 = 0$$

$$u_2 s_2 = 0$$

$$u_1, u_2 \geq 0$$



Problema 30.4 (Resolução V)

Que é um sistema de seis equações com seis incógnitas:

$$-2\pi R + u_1\pi R^2 = 0$$

$$-2\pi N + 2u_1\pi RN - u_2 = 0$$

$$\pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0$$

$$0,5 - R + s_2^2 = 0$$

$$u_1 s_1 = 0$$

$$u_2 s_2 = 0$$

$$u_1, u_2 \geq 0$$

Para se resolver este sistema de equações existem quatro combinações possíveis:

$u_1, u_2 = 0$ ou $u_1, s_2 = 0$ ou $s_1, u_2 = 0$ ou $s_1, s_2 = 0$



Problema 30.4 (Resolução VI)

*Resolvendo o sistema de equações:
para $u_1, u_2 = 0$*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi R = 0 \\ -2\pi N = 0 \\ -2500 + s_1^2 = 0 \\ 0,5 + s_2^2 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ N = 0 \\ s_1^2 = 2500 \\ s_2^2 = -0,5 \quad (\text{impossível}) \end{array} \right.$$

Conclui-se que o ponto viola a condição da variável de folga s_2^2 ser maior ou igual a zero o que faz com que o ponto não possa ser candidato a óptimo.



Problema 30.4 (Resolução VII)

*Resolvendo o sistema de equações:
para $u_1, s_2 = 0$*

$$\begin{cases} -2\pi R = 0 & R = 0 \text{ o que contradiz } R = 0,5 \\ -2\pi N + 2u_1\pi R - u_2 = 0 \\ \pi R^2 N - 2500 + s_1^2 = 0 \\ R = 0,5 \end{cases}$$

Com uma das equações obtém-se $R=0$ e com outra $R=0,5$ o que é uma contradição o que faz com que o ponto não possa ser candidato a óptimo.



Problema 30.4 (Resolução VIII)

*Resolvendo o sistema de equações:
para $u_2, s_1 = 0$*

$$\begin{cases} -2\pi R + u_1\pi R^2 = 0 \\ -2\pi N + 2u_1\pi RN = 0 \\ \pi R^2 N - 2500 = 0 \\ 0,5 - R + s_2^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} -R = 0 \Rightarrow R = 0 \\ 1 = u_1 R \Rightarrow u_1 = \frac{1}{R} \text{ não satisfaz} \\ N = 0 \\ s_2^2 = -0,5 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto viola a condição da variável de folga s_2^2 ser maior ou igual a zero o que faz com que o ponto não possa ser candidato a óptimo.



Problema 30.4 (Resolução IX)

*Resolvendo o sistema de equações:
para $s_2, s_1 = 0$*

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2}{R} \\ -2\pi N + 2\frac{2}{R}\pi R - u_2 = 0 \\ N = \frac{2500}{\pi R^2} = \frac{2500}{\pi 0,5^2} = 3183,09 \\ R = 0,5 \end{cases} = \begin{cases} u_1 = 4 \\ -2\pi N + 4\pi N - u_2 = 0 \\ N = 3183,09 \\ R = 0,5 \end{cases} \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_2 = 2\pi N = 20000 \\ N = 3183,09 \\ R = 0,5 \end{cases}$$

Conclui-se que o ponto estacionário com as coordenadas: número de tubos $N=3183$ de raio $R=0,5$ cm é que maximiza a função com a área de 10000 cm^2



Problema 30.4 (Resolução X)

Para testar a convexidade do problema analisa-se primeiro a convexidade da função custo através da sua Hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial N} &= -2\pi R & \frac{\partial^2 f}{\partial N^2} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial R} &= -2\pi R & \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} &= 0 \\ & & \frac{\partial^2 f}{\partial R \partial N} &= -2\pi\end{aligned}\quad \begin{vmatrix} 0 & -2\pi \\ -2\pi & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4\pi^2 < 0$$

$d_1=0, d_2 < 0$, a função é *negativa semi-definida* por isso *côncava*.



Problema 30.4 (Resolução XI)

Para testar a convexidade do problema analisa-se depois a convexidade da restrição através da sua Hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial N} &= \pi R^2 & \frac{\partial^2 g_1}{\partial N^2} &= 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial R} &= 2\pi RN & \frac{\partial^2 g_1}{\partial R^2} &= 2\pi N \\ & & \frac{\partial^2 g_1}{\partial R \partial N} &= 2\pi R\end{aligned}\quad \begin{vmatrix} 0 & 2\pi R \\ 2\pi R & 2\pi N \end{vmatrix} = 0 - 4\pi^2 R^2 < 0$$



$d_1=0$, $d_2 < 0$, a restrição é **negativa semi-definida** por isso **côncava**. A função objectivo é côncava, as restrições de desigualdade uma é não linear e é côncava e a outra é linear, então trata-se de programação côncava e os pontos estacionários não são um mínimo, mas sim um máximo.