

Optimização

Aula 11 – Aula Prática (PL)

Prof Dr, Engº Jorge Nhambiu



Aula 10. Aula Prática (PL)

- Exercícios de aplicação da Técnica das Variáveis Artificiais
- Método das Duas Fases e Big M
- 4 problemas, cada um resolvido do enunciado à solução óptima



Problema 1

Resolver pelo método das Duas Fases

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

s.a.

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Problema 1 Reduzir à forma padrão

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$



Problema 1 Construir o Problema Auxiliar

A 3ª restrição não contém uma variável básica evidente: introduz-se a variável artificial x_5 .

Minimizar $z' = x_5$

s.a.

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

com

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$



1ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	0	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	x_3	1	0	1	0	0	4	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12	-
1	x_5	3	2	0	0	1	18	6
	z_j	3	2	0	0	1	18	
	$z_j - C_j$	3	2	0	0	0		

A SBA $X^0 = (0, 0, 4, 12, 18)$



2ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	0	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	x_1	1	0	1	0	0	4	-
0	x_4	0	2	0	1	0	12	6
1	x_5	0	2	-3	0	1	6	3
	z_j	0	2	-3	0	1	6	
	$z_j - C_j$	0	2	-3	0	0		

A SBA $X^1 = (4, 0, 0, 12, 6)$



3ª Tabela Simplex (1ª fase) Fim

	C_j	0	0	0	0	1	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6
0	x_2	0	1	-1,5	0	0,5	3
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$z_j - C_j$	0	0	0	0	-1	

A SBA $X^2 = (4, 3, 0, 6, 0)$; $z' = 0 \rightarrow$ fim da 1ª fase



1ª Tabela Simplex (2ª fase)

	C_j	3	5	0	0		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
3	x_1	1	0	1	0	4	4
0	x_4	0	0	3	1	6	2
5	x_2	0	1	-1,5	0	3	-
	z_j	3	5	-4,5	0	27	
	$c_j - z_j$	0	0	4,5	0		

A SBA $X^2 = (4, 3, 0, 6)$; $Z = 27$



2ª Tabela Simplex (2ª fase) Fim

	C_j	3	5	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	x_1	1	0	0	-0,33	2
0	x_3	0	0	1	0,33	2
5	x_2	0	1	0	0,5	6
	z_j	3	5	0	1,5	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	-1,5	

A SBA $X^* = (2, 6, 2, 0)$ é óptima; $Z = 36$



Problema 1 Método do Big-M

Em alternativa às Duas Fases, resolve-se o mesmo problema penalizando a variável artificial na própria função objectivo, com um parâmetro M positivo arbitrariamente grande.

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

s.a.

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

com

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$



1ª Tabela Simplex (Big-M)

	C_j	3	5	0	0	-M		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	x_3	1	0	1	0	0	4	4
0	x_4	0	2	0	1	0	12	-
-M	x_5	3	2	0	0	1	18	6
	z_j	-3M	-2M	0	0	-M	-18M	
	$c_j - z_j$	3+3M	5+2M	0	0	0		

A SBA $X^0 = (0, 0, 4, 12, 18)$



2ª Tabela Simplex (Big-M)

	C_j	3	5	0	0	-M		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
3	x_1	1	0	1	0	0	4	-
0	x_4	0	2	0	1	0	12	6
-M	x_5	0	2	-3	0	1	6	3
	z_j	3	-2M	3+3M	0	-M	12-6M	
	$c_j - z_j$	0	5+2M	-3-3M	0	0		

A SBA $X^1 = (4, 0, 0, 12, 6)$



3ª Tabela Simplex (Big-M)

	C_j	3	5	0	0	-M		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
3	x_1	1	0	1	0	0	4	4
0	x_4	0	0	3	1	-1	6	2
5	x_2	0	1	-1,5	0	0,5	3	-
	z_j	3	5	-4,5	0	2,5	27	
	$c_j - z_j$	0	0	4,5	0	-M-2,5		

A SBA $X^2 = (4, 3, 0, 6, 0)$; $Z = 27$



4ª Tabela Simplex (Big-M) Fim

	C_j	3	5	0	0	-M	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3	x_1	1	0	0	-0,33	0,33	2
0	x_3	0	0	1	0,33	-0,33	2
5	x_2	0	1	0	0,5	0	6
	z_j	3	5	0	1,5	1	36
	$c_j - z_j$	0	0	0	-1,5	-M-1	

A SBA $X^* = (2, 6, 2, 0, 0)$ é óptima; $Z = 36$ (igual ao das Duas Fases)



Problema 2

Resolver pelo método das Duas Fases

Minimizar $z = x_1 + 2x_2$

s.a.

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 - x_2 = -1$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Problema 2 Reduzir à forma padrão

Minimizar $z = x_1 + 2x_2$

s.a.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + x_2 = 1 \quad (\text{multiplicou-se a 3ª restrição por } -1)$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$



Problema 2 Construir o Problema Auxiliar

As restrições 1^a e 3^a não têm variável básica evidente: introduzem-se as variáveis artificiais x_5 e x_6 .

$$\text{Minimizar } z' = x_5 + x_6$$

s.a.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_6 = 1$$

com

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$



1ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	0	1	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
1	x_5	1	1	-1	0	1	0	3	3
0	x_4	2	1	0	1	0	0	8	8
1	x_6	-1	1	0	0	0	1	1	1
	z_j	0	2	-1	0	1	1	4	
	$z_j - C_j$	0	2	-1	0	0	0		

A SBA $X^0 = (0, 0, 0, 8, 3, 1)$



2ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	0	1	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
1	x_5	2	0	-1	0	1	-1	2	1
0	x_4	3	0	0	1	0	-1	7	2,33
0	x_2	-1	1	0	0	0	1	1	-
	z_j	2	0	-1	0	1	-1	2	
	$z_j - C_j$	2	0	-1	0	0	-2		

A SBA $X^1 = (0, 1, 0, 7, 2, 0)$



3ª Tabela Simplex (1ª fase) Fim

	C_j	0	0	0	0	1	1	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	x_1	1	0	-0,5	0	0,5	-0,5	1
0	x_4	0	0	1,5	1	-1,5	0,5	4
0	x_2	0	1	-0,5	0	0,5	0,5	2
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - C_j$	0	0	0	0	-1	-1	

A SBA $X^2 = (1, 2, 0, 4, 0, 0)$; $z' = 0 \rightarrow$ fim da 1ª fase



1ª Tabela Simplex (2ª fase) Fim

	C_j	1	2	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	x_1	1	0	-0,5	0	1
0	x_4	0	0	1,5	1	4
2	x_2	0	1	-0,5	0	2
	z_j	1	2	-1,5	0	5
	$z_j - C_j$	0	0	-1,5	0	

A SBA $X^* = (1, 2, 0, 4)$ é óptima; $Z = 5$



Problema 2 Método do Big-M

Penaliza-se cada variável artificial com $+M$ na função objectivo de minimização.

$$\text{Minimizar } z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$$

s.a.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_6 = 1$$

com

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$



1ª Tabela Simplex (Big-M)

	C_j	1	2	0	0	M	M		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
M	x_5	1	1	-1	0	1	0	3	3
0	x_4	2	1	0	1	0	0	8	8
M	x_6	-1	1	0	0	0	1	1	1
	z_j	0	2M	-M	0	M	M	4M	
	$z_j - C_j$	-1	2M-2	-M	0	0	0		

A SBA $X^0 = (0, 0, 0, 8, 3, 1)$



2ª Tabela Simplex (Big-M)

	C_j	1	2	0	0	M	M		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
M	x_5	2	0	-1	0	1	-1	2	1
0	x_4	3	0	0	1	0	-1	7	2,33
2	x_2	-1	1	0	0	0	1	1	-
	z_j	2M-2	2	-M	0	M	-M+2	2	
	$z_j - C_j$	2M-3	0	-M	0	0	-2M+2		

A SBA $X^1 = (0, 1, 0, 7, 2, 0)$



3ª Tabela Simplex (Big-M) Fim

	C_j	1	2	0	0	M	M	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	x_1	1	0	-0,5	0	0,5	-0,5	1
0	x_4	0	0	1,5	1	-1,5	0,5	4
2	x_2	0	1	-0,5	0	0,5	0,5	2
	z_j	1	2	-1,5	0	1,5	0,5	5
	$z_j - C_j$	0	0	-1,5	0	1,5-M	0,5-M	

A SBA $X^* = (1, 2, 0, 4, 0, 0)$ é óptima; $Z = 5$ (igual ao das Duas Fases)



Problema 3

Resolver pelo método das Duas Fases

Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Problema 3 Reduzir à Forma Padrão

Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$



Problema 3 Construir o Problema Auxiliar

As restrições 2ª e 3ª não têm variável básica evidente: introduzem-se as variáveis artificiais x_6 e x_5 .

$$\text{Minimizar } z' = x_5 + x_6$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 6$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 0$$

com

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$



1ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	0	1	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
0	x_3	1	1	1	0	0	0	6	6
1	x_6	1	3	0	-1	0	1	6	6
1	x_5	1	-1	0	0	1	0	0	0
	z_j	2	2	0	-1	1	1	6	
	$z_j - C_j$	2	2	0	-1	0	0		

A SBA $X^0 = (0, 0, 6, 0, 0, 6)$



2ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	0	1	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
0	x_3	0	2	1	0	-1	0	6	3
1	x_6	0	4	0	-1	-1	1	6	1,5
0	x_1	1	-1	0	0	1	0	0	-
	z_j	0	4	0	-1	-1	1	6	
	$z_j - C_j$	0	4	0	-1	-1	0		

A SBA $X^1 = (0, 0, 6, 0, 0, 6)$



3ª Tabela Simplex (1ª fase) Fim

	C_j	0	0	0	0	1	1	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	x_3	0	0	1	0,5	-0,5	-0,5	3
0	x_2	0	1	0	-0,25	-0,25	0,25	1,5
0	x_1	1	0	0	-0,25	0,75	0,25	1,5
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - C_j$	0	0	0	0	-1	-1	

A SBA $X^2 = (1,5; 1,5; 3; 0)$; $z' = 0 \rightarrow$ fim da 1ª fase



1ª Tabela Simplex (2ª fase)

	C_j	2	1	0	0		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
0	x_3	0	0	1	0,5	3	6
1	x_2	0	1	0	-0,25	1,5	-
2	x_1	1	0	0	-0,25	1,5	-
	z_j	2	1	0	-0,75	4,5	
	$c_j - z_j$	0	0	0	0,75		

A SBA $X^2 = (1,5; 1,5; 3; 0); Z = 4,5$



2ª Tabela Simplex (2ª fase) Fim

	C_j	2	1	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_4	0	0	2	1	6
1	x_2	0	1	0,5	0	3
2	x_1	1	0	0,5	0	3
	z_j	2	1	1,5	0	9
	$c_j - z_j$	0	0	-1,5	0	

A SBA $X^* = (3, 3, 0, 6)$ é óptima; $Z = 9$



Problema 4

Resolver pelo método das Duas Fases

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$

s.a.

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Problema 4 Reduzir à Forma Padrão

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$

s.a.

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

com

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$



Problema 4 Construir o Problema Auxiliar

Nenhuma das duas restrições tem uma variável básica evidente: introduzem-se as variáveis artificiais x_4 e x_5 .

$$\text{Minimizar } z' = x_4 + x_5$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 6$$

com

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$



1ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	1	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
1	x_4	1	1	0	1	0	5	5
1	x_5	2	1	-1	0	1	6	3
	z_j	3	2	-1	1	1	11	
	$z_j - C_j$	3	2	-1	0	0		

A SBA $X^0 = (0, 0, 0, 5, 6)$



2ª Tabela Simplex (1ª fase)

	C_j	0	0	0	1	1		
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
1	x_4	0	0,5	0,5	1	-0,5	2	4
0	x_1	1	0,5	-0,5	0	0,5	3	6
	z_j	0	0,5	0,5	1	-0,5	2	
	$z_j - c_j$	0	0,5	0,5	0	-1,5		

A SBA $X^1 = (3, 0, 0, 2, 0)$



3ª Tabela Simplex (1ª fase) Fim

	C_j	0	0	0	1	1	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_2	0	1	1	2	-1	4
0	x_1	1	0	-1	-1	1	1
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$z_j - C_j$	0	0	0	-1	-1	

A SBA $X^2 = (1, 4, 0, 0, 0)$; $z' = 0 \rightarrow$ fim da 1ª fase



1ª Tabela Simplex (2ª fase) Fim

	C_j	3	2	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	b
2	x_2	0	1	1	4
3	x_1	1	0	-1	1
	z_j	3	2	-1	11
	$z_j - C_j$	0	0	-1	

A SBA $X^* = (1, 4, 0)$ é óptima; $Z = 11$